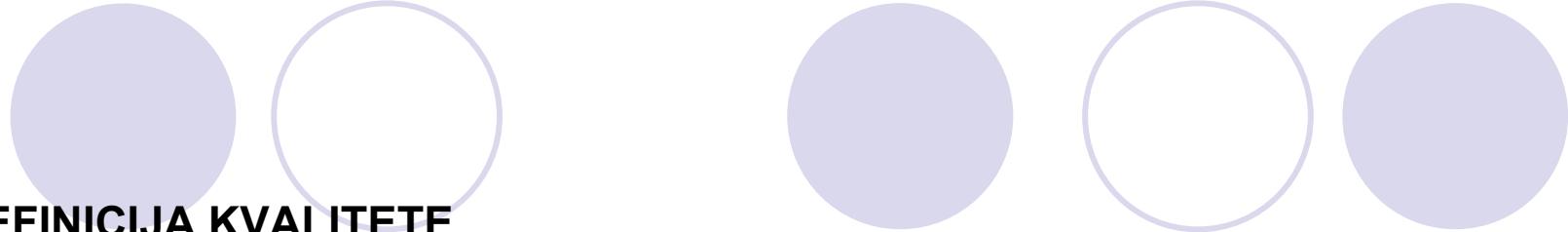


# KONTROLA KVALITETE

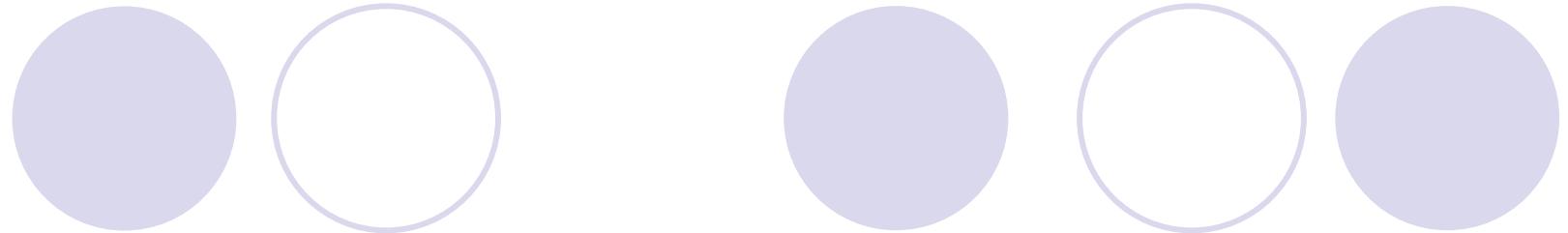
**Prof.dr.sc.Vedran Mudronja**



## DEFINICIJA KVALITETE

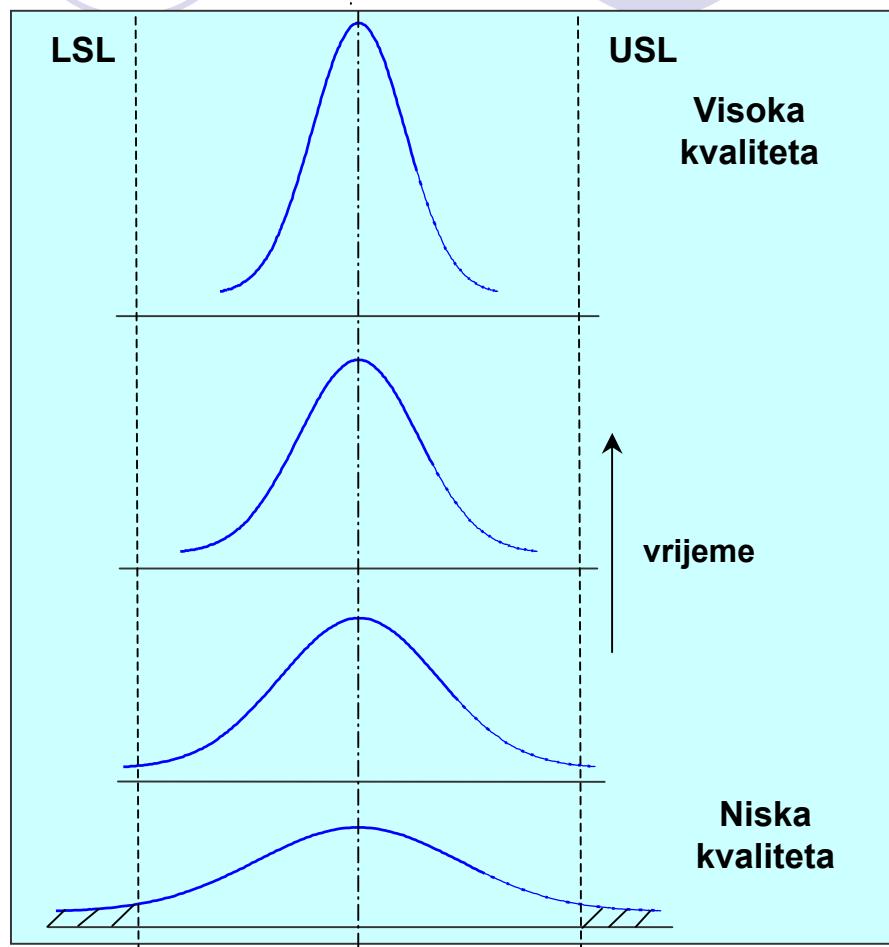
Ishikawa o kvaliteti:

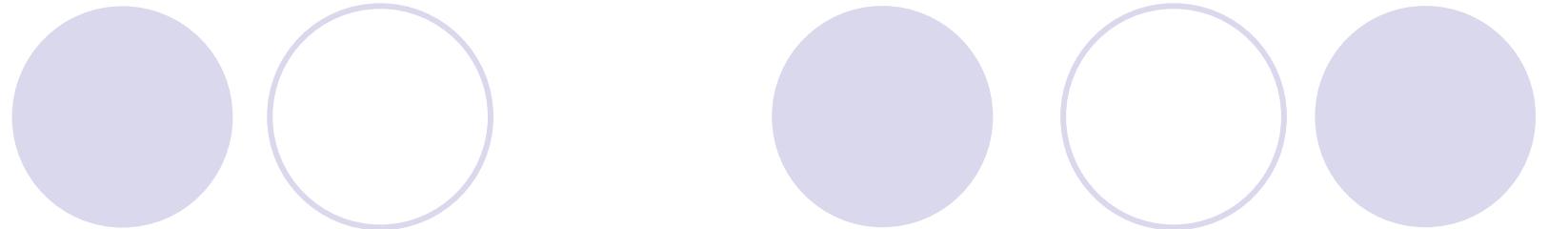
- Kvaliteta je ekvivalent sa zadovoljstvom kupca.
- Kvaliteta mora biti definirana opsežno. Nije dovoljno samo reći da je proizvod visoke kvalitete. Moramo fokusirati pažnju na kvalitetu svakog aspekta organizacije.
- Potrebe i zahtjevi kupca se mijenjaju. Stoga, se i definicija kvalitete uvijek mijenja.
- Cijena proizvoda ili usluge je bitan dio njene kvalitete. Ako je proizvod precijenjen ne može pridobiti zadovoljstvo kupca.



## Kvaliteta – zadovoljstvo kupca

- Danas o kvaliteti govorimo isključivo u kontekstu **zadovoljstva kupca**. To znači da je kvaliteta: kvaliteta proizvoda ili usluge, rok isporuke, cijena, organizacija poslovanja, sustav upravljanja i dr.
- **Kvaliteta u užem smislu** (tehnička strana kvalitete) prepostavlja ispunjavanje svih tehničkih zahtjeva na kvalitetu proizvoda ili usluge.
- Najznačajnija mjera kvalitete u užem smislu je veličina rasipanja značajke procesa (proizvoda). Najočitiji argument poboljšavanja kvalitete procesa (proizvoda) je **stalno smanjivanje rasipanja**.

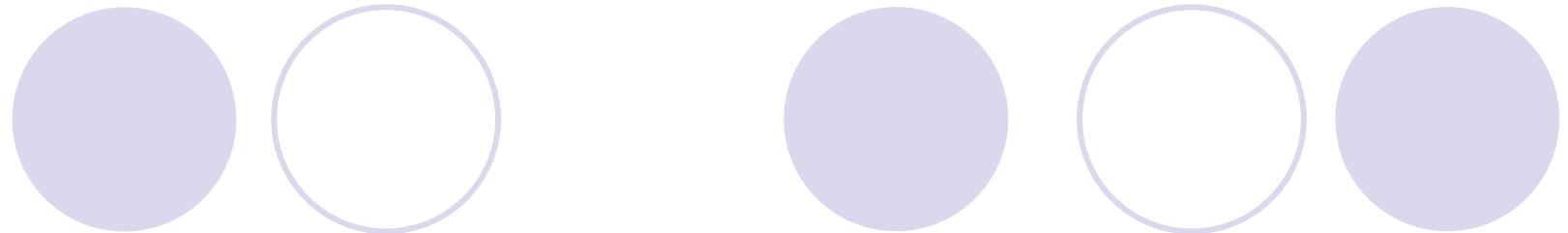




Suvremena kontrola kvalitete zahtijeva izvršitelje koji posjeduju posebna znanja i sposobnosti.

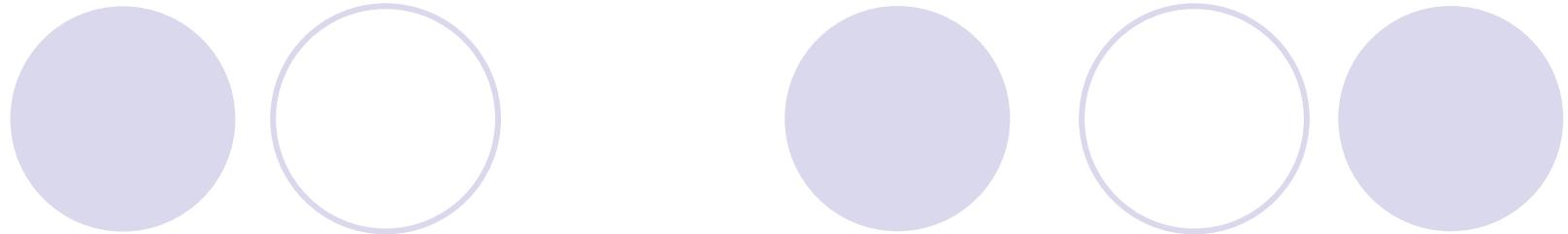
Česta pojava u prošlosti, a nažalost u mnogim organizacijama slična je pojava i danas, bila je:

- kontrolori nemaju posebnu izobrazbu;
- kontrolori su bili prisiljeni prihvaćati (propuštati) škart. Kontrolor nije odgovoran za kvalitetu proizvoda i proizvodnje. **Kontrolor je odgovoran za točnost iskazanog nalaza obavljene kontrole (podataka);**
- sposobniji radnici su bili unaprijeđeni na druge poslove dok su oni manje sposobni bili raspoređeni u odjele kontrole kvalitete.



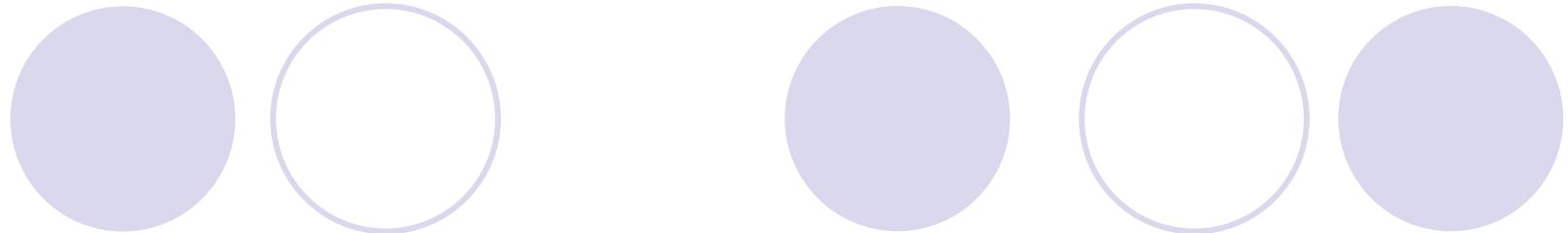
Ključ suvremene kontrole kvalitete je u koncentraciji na **elemente procesa**, a ne na značajke proizvoda. To nije «lov» na nesukladne proizvode.

(Često se u praksi događalo da određeni programi poboljšavanja kvalitete propadnu zbog pretjeranog broja kontrolnih karata, koje su samo rijetki mogli razumjeti. Jedan od razloga korištenja velikog broja kontrolnih karata je premještanje fokusa na proizvod, a ne na elemente procesa).



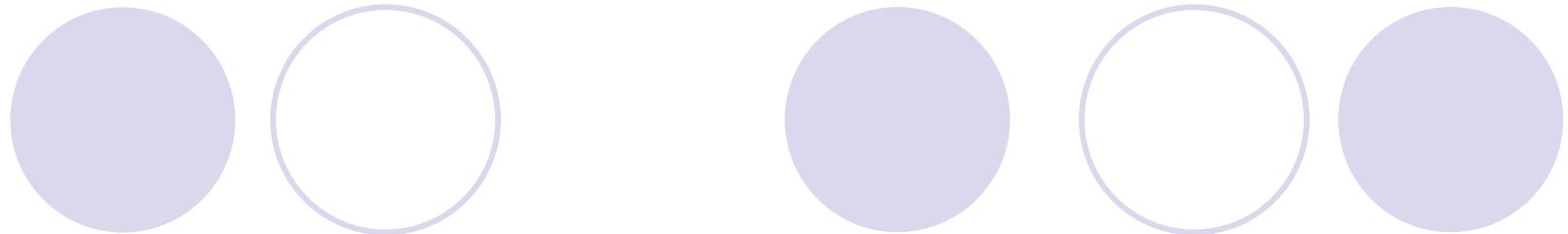
Za uspješno provođenje kontrole kvalitete potrebno je ispuniti 4 temeljne prepostavke:

1. razumjeti statističke tehnike koje se koriste u statističkim metodama kontrole kvalitete;
2. razumjeti svrhu i ciljeve (filozofiju) primjene tih metoda;
3. poznavati mjerne i kontrolne postupke koji se koriste u procesima;
4. osigurati da viši menadžment razumije ciljeve koji se mogu postići primjenom metoda kontrole kvalitete.



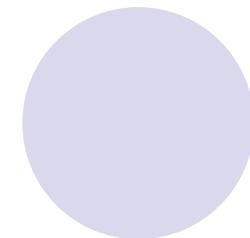
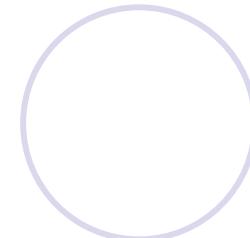
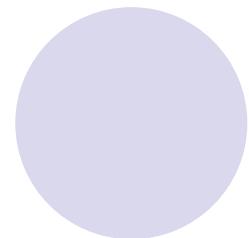
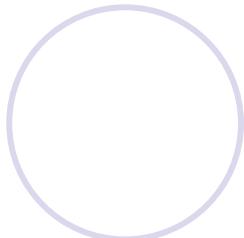
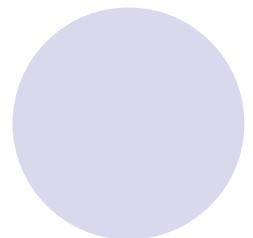
Za statističko praćenje procesa treba odrediti slijedeće elemente:

- jednu ili više ključnih značajki kvalitete koje treba pratiti;
- mjerni postupak (mjerno sredstvo, mjeritelja, mjesto i uvjete mjerjenja);
- statističku metodu;
- veličinu i broj uzoraka;
- učestalost uzimanja uzorka.



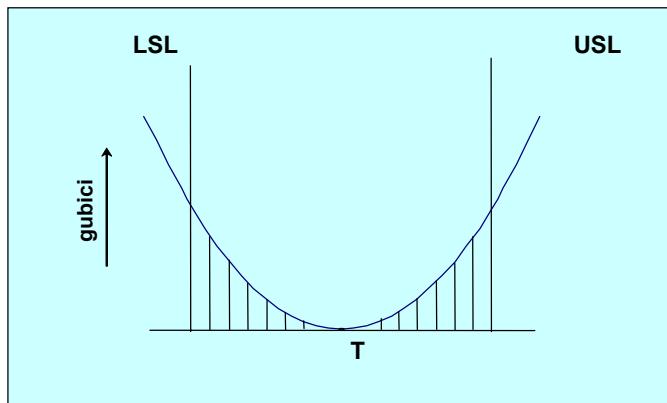
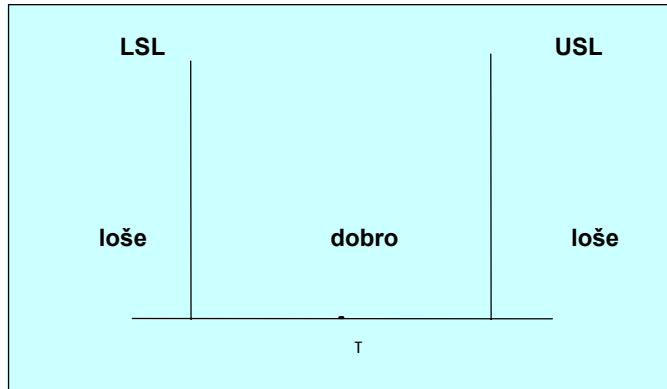
Prije početka kontrole procesa trebalo bi znati odgovor na slijedeća pitanja:

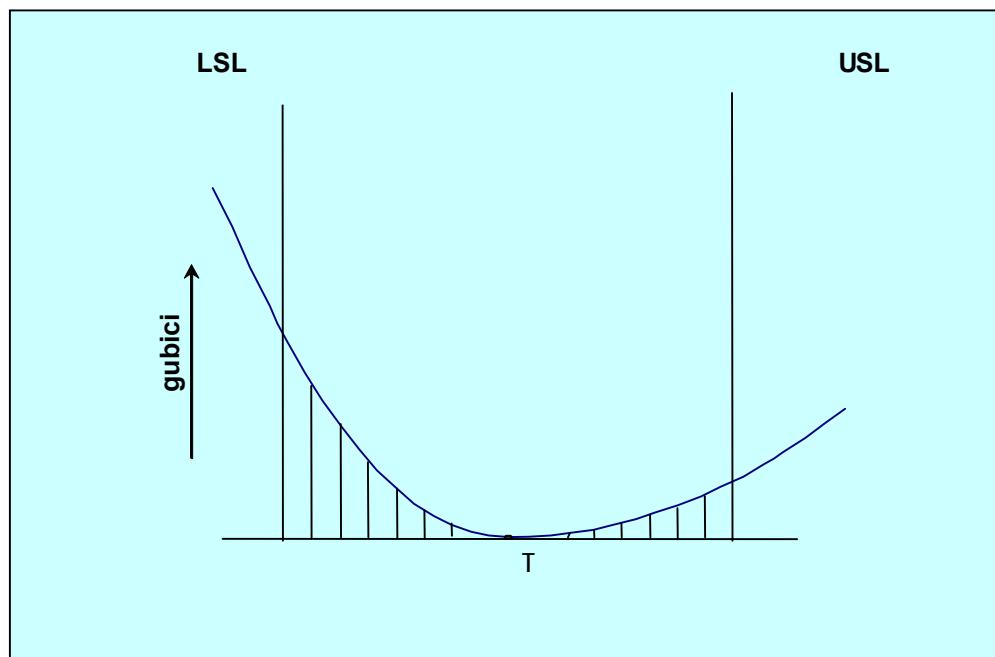
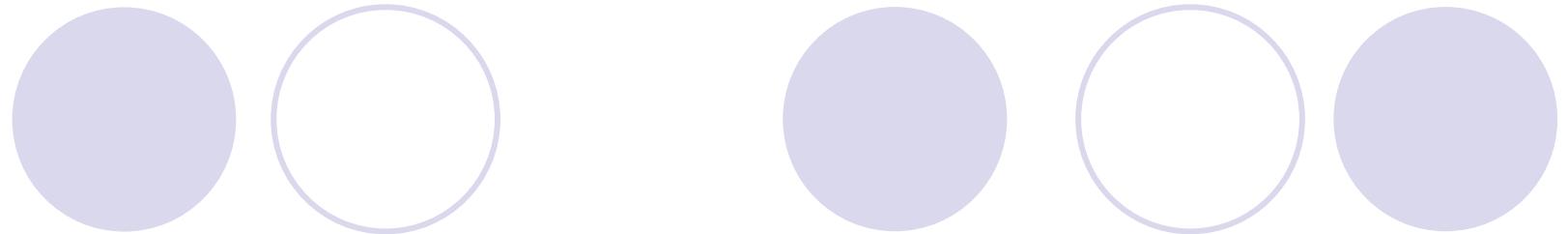
- Koji su ključni elementi procesa koji utječu na sve proizvode?
- Kakva je međusobna interakcija tih elemenata procesa?
- Da li nekoliko elemenata procesa utječe na jednu značajku proizvoda?
- Da li izmjene u jednom elementu procesa utječu na promjene u ostalim elementima procesa?
- Koji su elementi procesa ili značajke proizvoda najosjetljivije na neplanirane izmjene?

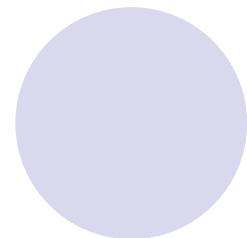
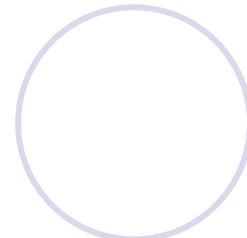
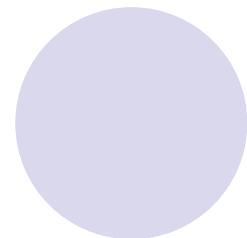
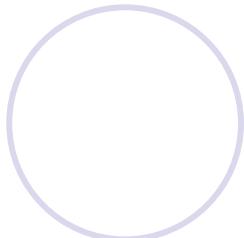
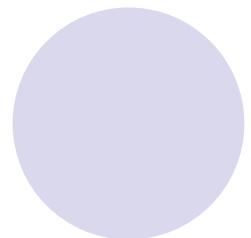


## **TAGUCHIJEVA FUNKCIJA GUBITAKA**

## TAGUCHIJEVA FUNKCIJA GUBITAKA

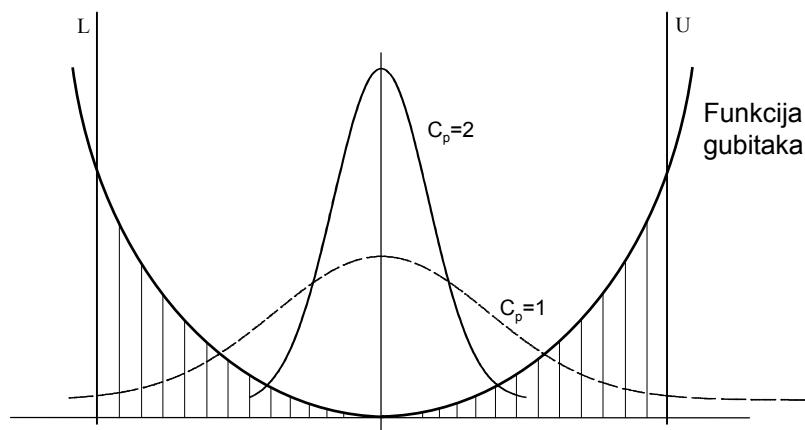






$$\text{GUBITAK } (Y) = k \cdot ( Y - \text{CILJANA VRIJEDNOST} )^2$$

k - konstanta ovisna o strukturi troškova gubitaka,  
y - trenutna vrijednost značajke kvalitete



U – gornja granica dopuštenih odstupanja

L – donja granica dopuštenih odstupanja

$C_p$  – indeks sposobnosti procesa

# Kvaliteta – zadovoljstvo kupca

- Danas o kvaliteti (kvaliteti u širem smislu) govorimo isključivo u kontekstu **zadovoljstva kupca**.
- To znači da je kvaliteta: kvaliteta proizvoda ili usluge, rok isporuke, cijena, organizacija poslovanja, sustav upravljanja i dr.
- Kupac očekuje kvalitetu koja je u osnovi izvrsna i ekonomski prihvatljiva.
- **Razinu kvalitete određuju kupci.**

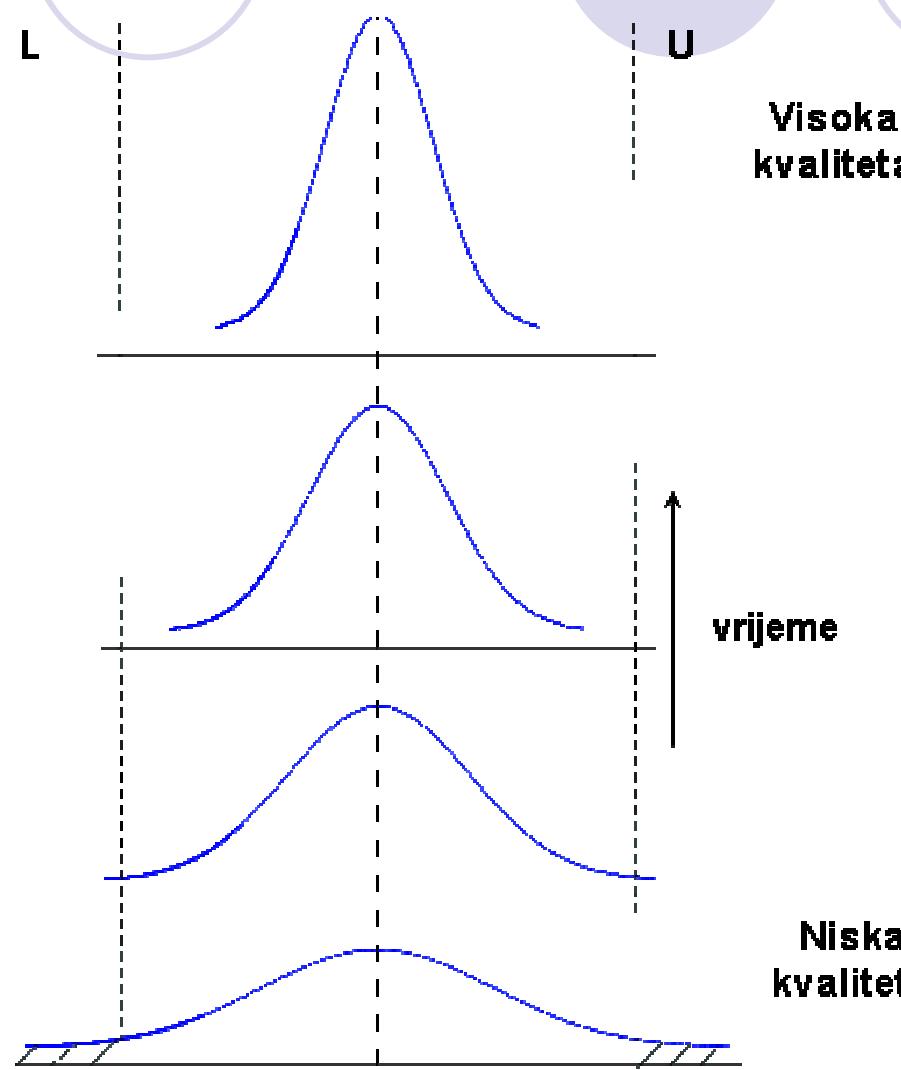
# Kvaliteta u užem smislu

- **Kvaliteta u užem smislu** (tehnička strana kvalitete) pretpostavlja ispunjavanje svih tehničkih zahtjeva na kvalitetu proizvoda ili usluge.

Najznačajnija mjera kvalitete u užem smislu je **veličina rasipanja** značajke procesa (proizvoda).

- Najočitiji argument poboljšavanja kvalitete procesa (proizvoda) je **stalno smanjivanje rasipanja**.

# Manje rasipanje – viša kvaliteta



# Suvremena kontrola kvalitete

- Temeljna zadaća i razlog postojanja odjela kontrole kvalitete je stalna **borba s rasipanjem**. To znači mjeriti, bilježiti i analizirati dobivene rezultate, te iz tih rezultata (podataka) učiti.
- **Svrha mjerjenja je prikupiti podatke iz kojih se izvodi zaključak.**

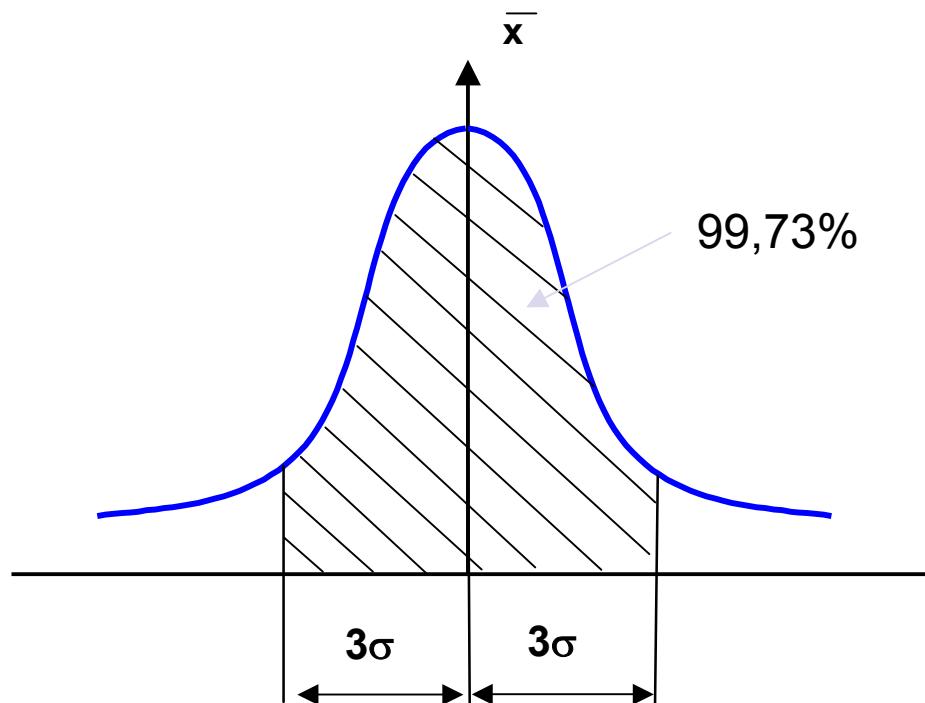
# $\sigma$ - mjera kvalitete

- U statistici je  $\sigma$  mjera rasipanja. Možemo s toga reći da je  **$\sigma$  mjera kvalitete.**
- Pojam “standard deviation” koji se danas označava s grčkim slovom  $\sigma$  prvi put je uveo Karl Pearson (1857.-1936.) 1893. godine, iako je ideja bila starija stotinjak godina.
- Hrvatski nazivi:
  - standardna devijacija
  - standardno odstupanje
  - standardni odmak
  - normni odmak

# Standardno odstupanje

- Ne mora biti poznata raspodjela za računanje standardnog odstupanja skupa podataka.
- Može se izračunati standardno odstupanje za skoro svaku raspodjelu kao drugi korijen varijance (Ronald Fisher, 1918).
- Standardno odstupanje se najčešće povezuje s normalnom (Gaussovom) raspodjelom.

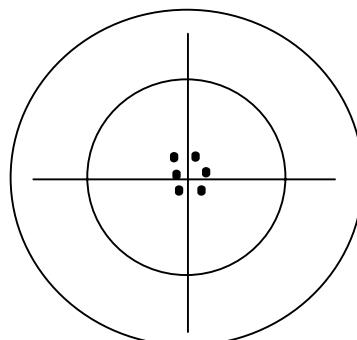
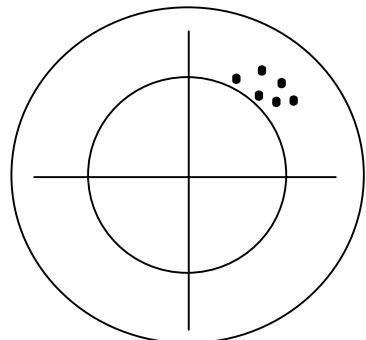
# Zašto interval od $\pm 3\sigma$ ?



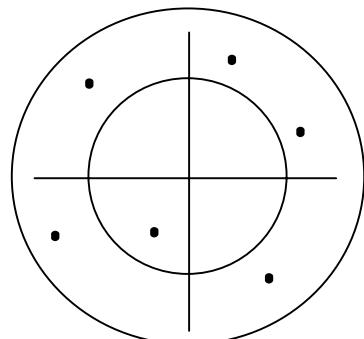
# Normalna raspodjela i DPMO

| Širina zahtjeva U - L | Vjerojatnost % | DPMO    | Pomak od $1,5\sigma$ |         |
|-----------------------|----------------|---------|----------------------|---------|
|                       |                |         | Vjerojatnost ,%      | DPMO    |
| $\pm 1\sigma$         | 68,27          | 317 300 | 30,23                | 697 700 |
| $\pm 2\sigma$         | 95,45          | 45 500  | 69,13                | 308 700 |
| $\pm 3\sigma$         | 99,73          | 2 700   | 93,32                | 66 810  |
| $\pm 4\sigma$         | 99,9937        | 63      | 99,3790              | 6 210   |
| $\pm 5\sigma$         | 99,999 943     | 0,57    | 99,976 70            | 233     |
| $\pm 6\sigma$         | 99,999 999 8   | 0,002   | 99,999 660           | 3.4     |

# $\sigma$ - mjera preciznosti

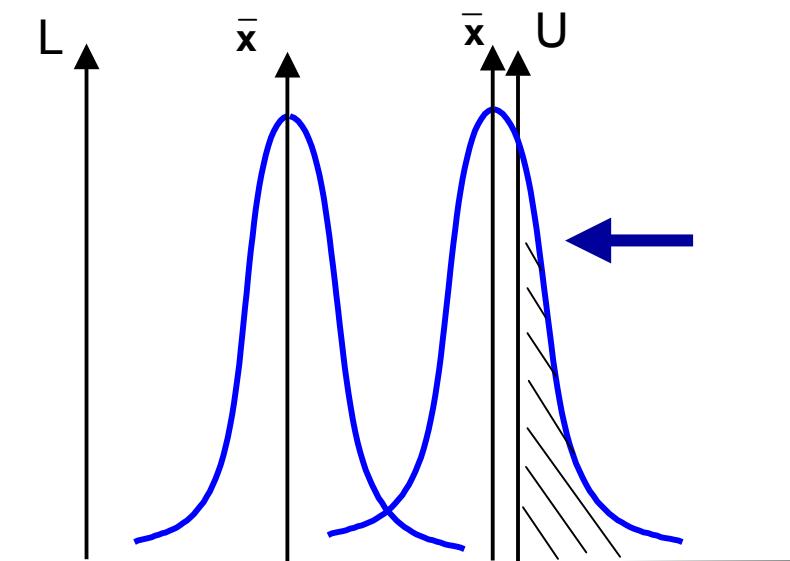


precizan (dobar) strijelac

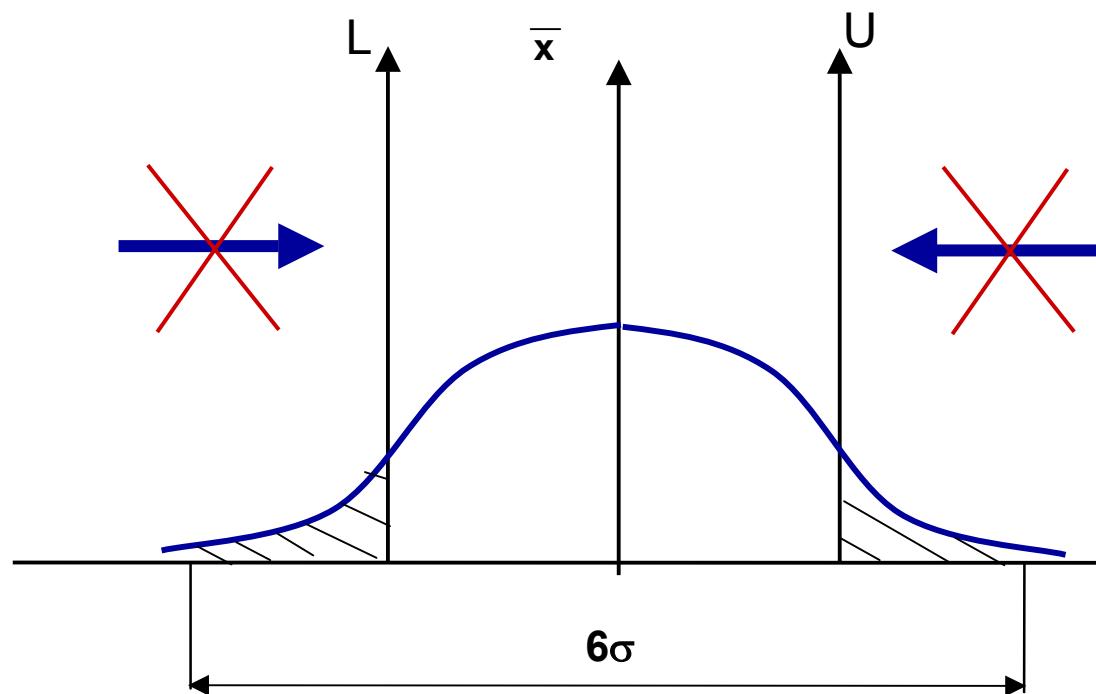


neprecizan (loš) strijelac

# Loše nadziranje procesa



# Loša kvaliteta



---

# KOMBINATORIKA

## 1. PERMUTACIJE BEZ PONAVLJANJA

**Permutacije bez ponavljanja pokazuju na koliko se načina može poredati niz od n elemenata.**

Računaju se pomoću izraza:

$$P^{(n)} = n!$$

Znak «!» označava faktorijele. Pri tome je:

$$n! = n(n - 1)(n - 2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Po dogovoru  $0! = 1$ .

Primjer: Na koliko se načina mogu poredati elementi A, B i C.

$$n = 3;$$

$$P^{(n=3)} = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

A B C  
A C B

B A C  
B C A

C A B  
C B A

## 2. PERMUTACIJE S PONAVLJANJEM

Permutacije s ponavljanjem pokazuju na koliko se načina može poredati niz od n elemenata ako je  $r_1, r_2, \dots, r_k$  istih među njima.

Računaju se pomoću izraza:

$$P_{r_1, r_2, \dots, r_k}^{(n)} = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!}$$

Primjer: Na koliko se načina mogu poredati elementi A, B, C, C.

$$n=4$$

$$r_1=1$$

$$r_2=1$$

$$r_3=2$$

$$P_{r_1, r_2, r_3}^{(n)} = \frac{n!}{r_1! r_2! r_3!} = \frac{4!}{1! 1! 2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 12$$

A B C C

A C B C

A C C B

B A C C

B C A C

B C C A

C A B C

C B A C

C C A B

C C B A

C A C B

C B C A

---

### **3. VARIJACIJE BEZ PONAVLJANJA**

$$V_r^{(n)} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

**Broj mogućih popunjavanja r mesta, ako je na raspolaganju n elemenata.**

### **4. VARIJACIJE S PONAVLJANJEM**

$$\overline{V}_r^{(n)} = n^r$$

**Broj mogućih popunjavanja r mesta, ako je na raspolaganju n elemenata pri čemu se isti element može pojaviti dva ili više puta.**

---

---

Primjer: Koliko se različitih registrarskih pločica može izraditi ako se koriste 4 brojčane oznake i 2 slovne oznake (na raspolaganju su 23 slova)?

Za brojčane oznake:

$$\bar{V}_r^{(n)} = n^r$$
$$\bar{V}_4^{(10)} = 10^4 = 10000$$

Za brojčane oznake:

$$\bar{V}_2^{(23)} = 23^2 = 529$$

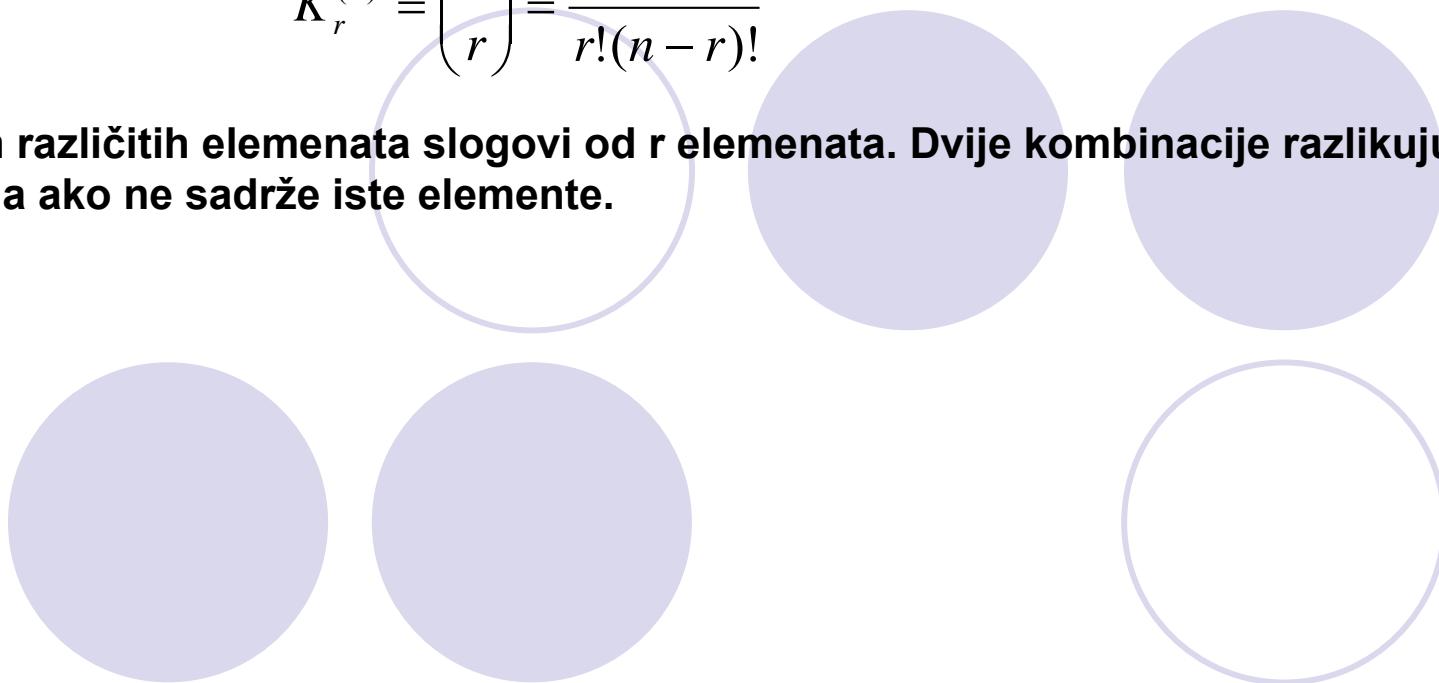
Broj različitih registrarskih pločica iznosi:  $10000 \times 529 = 5290000$

---

## 5. KOMBINACIJE BEZ PONAVLJANJA

$$K_r^{(n)} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

**Tvore se od n različitih elemenata slogovi od r elemenata. Dvije kombinacije razlikuju se jedino onda ako ne sadrže iste elemente.**



---

Primjer: Koliko bi kuna trebalo uplatiti za siguran dobitak na lotu 6/45? Cijena listića (8 kombinacija) iznosi 13,00 Kn.

$$K_r^{(n)} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$K_6^{(45)} = \binom{45}{6} = \frac{45!}{6! \cdot 39!} = \frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 8145060$$

Broj listića: 1018132,5 (1 018 133)

Uplata: 13 235 729 Kn

Vjerojatnost dobitka za 1 listić (8 kombinacija):

$$P = \frac{8}{8145060} \cdot 100\% \approx 0,0001\%$$

## Vjerojatnost

$$P(A) = \frac{m(A)}{n}$$

**Vjerojatnost događaja A je omjer broja  $m(A)$  elementarnih događaja koji realiziraju događaj A i broja n jednakog mogućih elementarnih događaja.**

$$m(A) \leq n$$

$$P(A)=0$$

- nemogući događaj

$$P(A)=1$$

- siguran događaj

## Protivna vjerojatnost

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$Q(A) = 1 - P(A)$$

$$P(A) + Q(A) = 1$$

## Zbrajanje vjerojatnosti

Prepostavimo da se događaji  $A_1, A_2, \dots, A_k$  međusobno isključuju. Pod događajem  $A_1 + A_2 + \dots + A_k$  podrazumijeva se događaj koji nastaje ako se dogodi ili događaj  $A_1$  ili događaj  $A_2$  ili... ili događaj  $A_k$ . Vjerojatnost tog novog događaja jednaka je sumi vjerojatnosti pojedinih događaja  $A_1, A_2, \dots, A_k$ :

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k)$$

$$P\left(\sum_i A_i\right) = \sum_i P(A_i)$$

Primjer: Kolika je vjerojatnost da kocka padne na broj 5 ili 6?

$$P = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

---

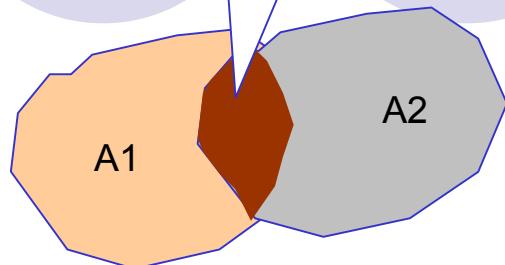
## Množenje vjerojatnosti

Prepostavimo da se događaji  $A_1, A_2, \dots, A_k$  međusobno ne isključuju. Istovremeno pojavljivanje događaja predstavlja složen događaj  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k$  s vjerojatnošću:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k)$$

Za dva događaja  $A_1$  i  $A_2$  kažemo da su nezavisni ako vrijedi:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$$



---

Primjer: Kolika je vjerojatnost dobitka na lotu 6/45 uz uplatu jednog listića?

Vjerojatnost pojavljivanja jednog broja na lotu 6/45 iznosi:

$$P = \frac{1}{45}$$

Za prvo izvlačenje vjerojatnost pojavljivanja jednog od 6 brojeva iznosi:

$$P = \frac{6}{45}$$

---

Za drugo izvlačenje vjerojatnost pojavljivanja jednog od preostalih 5 brojeva iznosi:

$$P = \frac{5}{45 - 1} = \frac{5}{44}$$

Za šesto izvlačenje vjerojatnost preostalog posljednjeg broja iznosi:

$$P = \frac{1}{45 - 5} = \frac{1}{40}$$

Vjerojatnosti od  $P_1$  do  $P_6$  su uvjetne vjerojatnosti, te vjerojatnost dobitka (za jedan stupac u listiću) iznosi:

$$P = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot P_4 \cdot P_5 \cdot P_6 = \frac{6}{45} \cdot \frac{5}{44} \cdot \frac{4}{43} \cdot \frac{3}{42} \cdot \frac{2}{41} \cdot \frac{1}{40}$$

Ako se dobivena vjerojatnost množi s 8 (listić) i 100% dobiva se vjerojatnost od  $\approx 0,0001\%$

---

## Diskontinuirane slučajne varijable

Diskontinuirana slučajna varijabla je takva varijabla  $x$  koja poprima vrijednost  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ali svaku od njih s određenom vjerojatnošću:

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

$$p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_n)$$

Pri tome vjerojatnost  $p(x_i)$  treba zadovoljiti jednakost:

$$\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1$$

Skup svih parova  $\{x_i, p(x_i)\}$  čini razdiobu slučajne varijable.

Zakon  $P(x)$  koji svakoj vrijednosti  $x_i$  pridruži teorijsku vrijednost  $p(x_i)$  zove se funkcijom vjerojatnosti slučajne varijable  $x$ .

Uvjeti funkcije vjerojatnosti  $P(x)$ :

$$1. \quad P(x) \geq 0$$

$$2. \quad \sum_{i=1}^n p(x_i) = 1$$

$$3. \quad F(x_k) = \sum_{i=1}^k p(x_i) = P\{x \leq x_k\}$$

## Binomna razdioba

Koristi se u slučaju kada je broj elemenata osnovnog skupa  $N$  značajno veći u odnosu na veličinu uzorka  $n$ .

**Funkcija vjerojatnosti:**

$$P(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}; \quad p + q = 1, \quad p \ll q$$

**Rekurzivna formula:**

$$P(x) = \frac{n-x+1}{x} \cdot \frac{p}{q} \cdot P(x-1); \quad P(0) = q^n$$

**Definirana je sljedećim parametrima:**

$$B\{n, p\}$$

## Poissonova razdioba

Kada  $n \rightarrow \infty$ , a  $p \rightarrow 0$  tada se binomna razdioba transformira u Poissonovu razdiobu (rijetki događaj).

**Funkcija vjerojatnosti:**

$$P(x) = \frac{m^x}{x!} \cdot e^{-m};$$

$$m = n \cdot p$$

**Rekurzivna formula:**

$$P(x) = \frac{m}{x} \cdot P(x-1); \quad P(0) = e^{-m}$$

## VJEROJATNOSTI POJAVLJIVANJA LOŠIH JEDINICA U UZORCIMA

| Veličina uzorka n | Raspodjela | Omjer loših jedinica |       |       |          |       |       |         |       |       |
|-------------------|------------|----------------------|-------|-------|----------|-------|-------|---------|-------|-------|
|                   |            | p = 0,001            |       |       | p = 0,01 |       |       | p = 0,1 |       |       |
|                   |            | x = 0                | x = 1 | x > 1 | x = 0    | x = 1 | x > 1 | x = 0   | x = 1 | x > 1 |
| 50                | B          | 0,951                | 0,048 | 0,001 | 0,605    | 0,306 | 0,089 | 0,005   | 0,029 | 0,966 |
| 50                | P          | 0,951                | 0,048 | 0,001 | 0,606    | 0,303 | 0,091 | 0,007   | 0,035 | 0,958 |
| 500               | B          | 0,606                | 0,303 | 0,091 | 0,007    | 0,033 | 0,960 | ~ 0     | ~ 0   | ~ 1   |
| 500               | P          | 0,606                | 0,303 | 0,091 | 0,007    | 0,035 | 0,958 | ~ 0     | ~ 0   | ~ 1   |
| 5000              | B          | 0,007                | 0,034 | 0,959 | ~ 0      | ~ 0   | ~ 1   | ~ 0     | ~ 0   | ~ 1   |
| 5000              | P          | 0,007                | 0,035 | 0,958 | ~ 0      | ~ 0   | ~ 1   | ~ 0     | ~ 0   | ~ 1   |

Oznake:

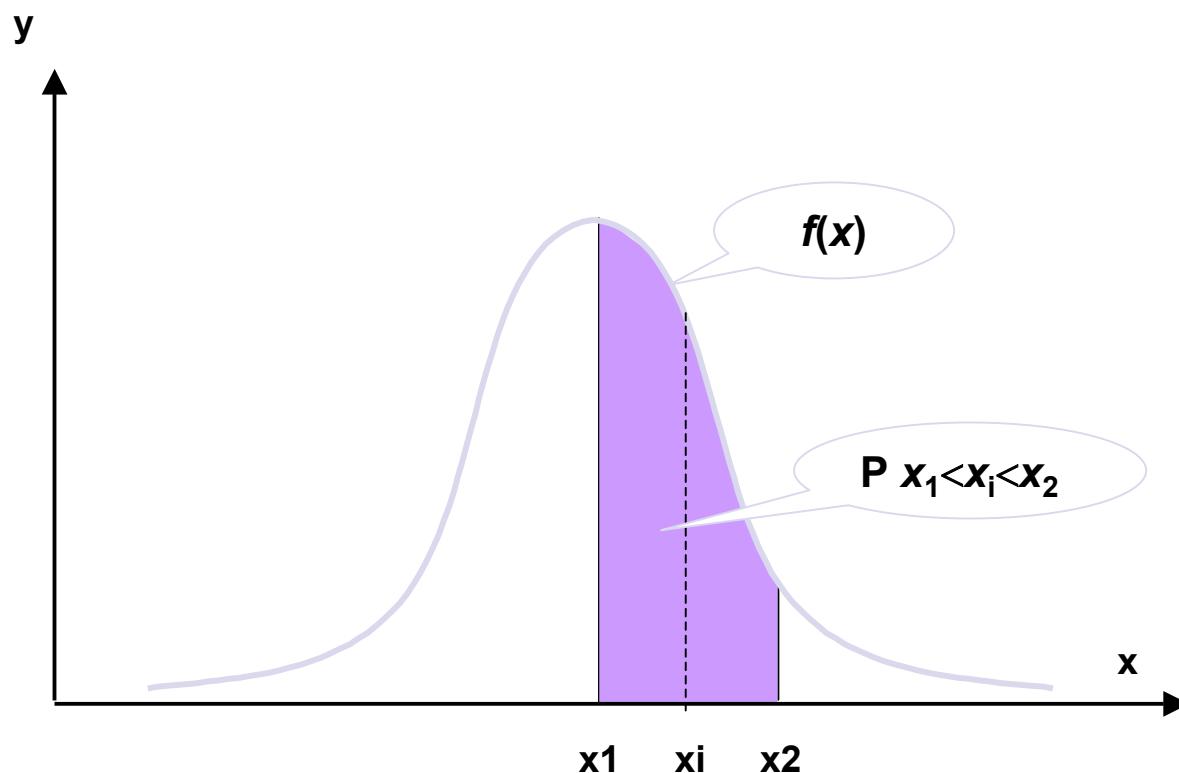
B – binomna raspodjela

P - Poissonova raspodjela

x – broj loših jedinica u uzorku

## Kontinuirane razdiobe

- Slučajna varijabla kod kontinuiranih razdioba može poprimiti bilo koju vrijednost u zadanim intervalima i to sa određenom vjerojatnošću.





**Funkcija vjerojatnosti za kontinuiranu varijablu  $x$  je takva funkcija  $f(x)$  koja ima svojstva:**

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$$

**Funkcija distribucije**

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = P\{x_1 < x < x_2\}$$

- **Pri tom su  $x_1$  i  $x_2$  bilo koje dvije vrijednosti varijable  $x$  koje zadovoljavaju nejednakost  $x_1 < x_2$**

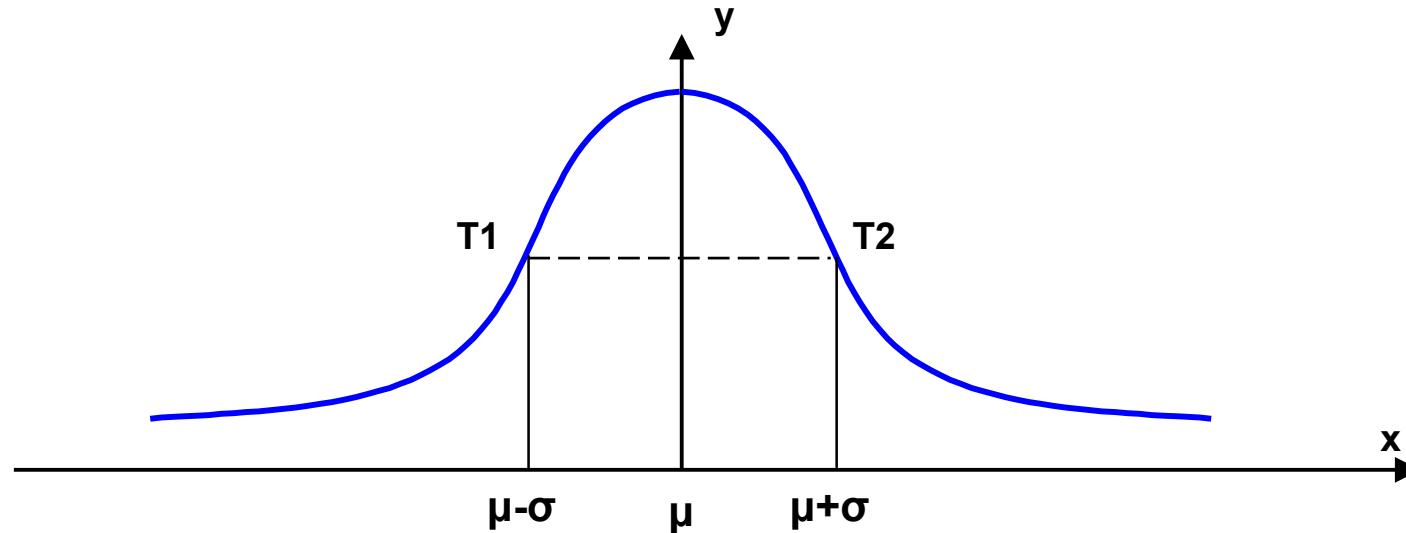
## Normalna razdioba

- Najvažnija kontinuirana razdioba koju susrećemo u teoriji i primjenama matematičke statistike, pa tako i na području mjeriteljstva i kontrole kvalitete;
- Pošto ju je definirao Carl Friedrich Gauss još je zovemo i Gaussova razdioba;
- Mnogo je problema u raznim područjima primjene koji se rješavaju upravo ovom razdiobom. Zbog tih njenih svojstava kad je to god moguće i druge se razdiobe nastoje aproksimirati normalnom razdiobom;
- Za slučajnu varijablu  $x$  kažemo da je distribuirana po zakonu normalne razdiobe ako je područje njenih vrijednosti  $[-\infty, +\infty]$ , a funkcija vjerojatnosti

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Razabiremo da je normalna razdioba jednoznačno određena očekivanjem  $\mu$  i varijancom  $\sigma^2$  pa se označava sa  $N\{\mu, \sigma^2\}$ .



Slika 1. Normalna razdioba

- Krivulja vjerojatnosti je simetrična s obzirom na  $x = \mu$  te na tom mjestu ima maksimum koji je pozitivan;
- Krivulja je zvonolikog oblika s tjemenom na pravcu  $x = \mu$  i asimptotski se približava osi  $x$ .

- Površina ispod krivulje jednaka je 1;
- Točke infleksije T<sub>1</sub> i T<sub>2</sub> imaju apscise  $\mu \pm \sigma$  pa je krivulja to uža, dakle i viša što je  $\sigma$  manji;
- Kod svih kontinuiranih varijabli vjerojatnosti pridružujemo intervale, što znači da svakom intervalu pripada površina ispod krivulje. Prema toj interpretaciji pojedinoj vrijednosti slučajne varijable  $x_i$  pripada vjerojatnost nula, što nije slučaj kod diskontinuirane razdiobe.

Neposredno slijedi da je:

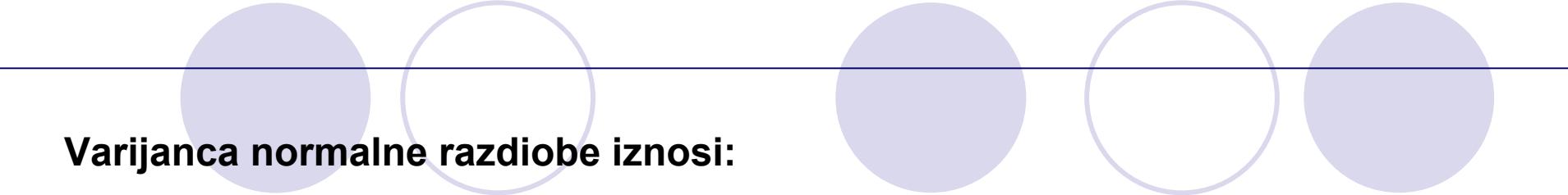
$$P(x_1 < x_i < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = F(x_2) - F(x_1)$$

gdje su  $F(x_1)$  i  $F(x_2)$  funkcije distribucije tj.

$$F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(x)dx$$

$$F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} f(x)dx$$

---



**Varijanca normalne razdiobe iznosi:**

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

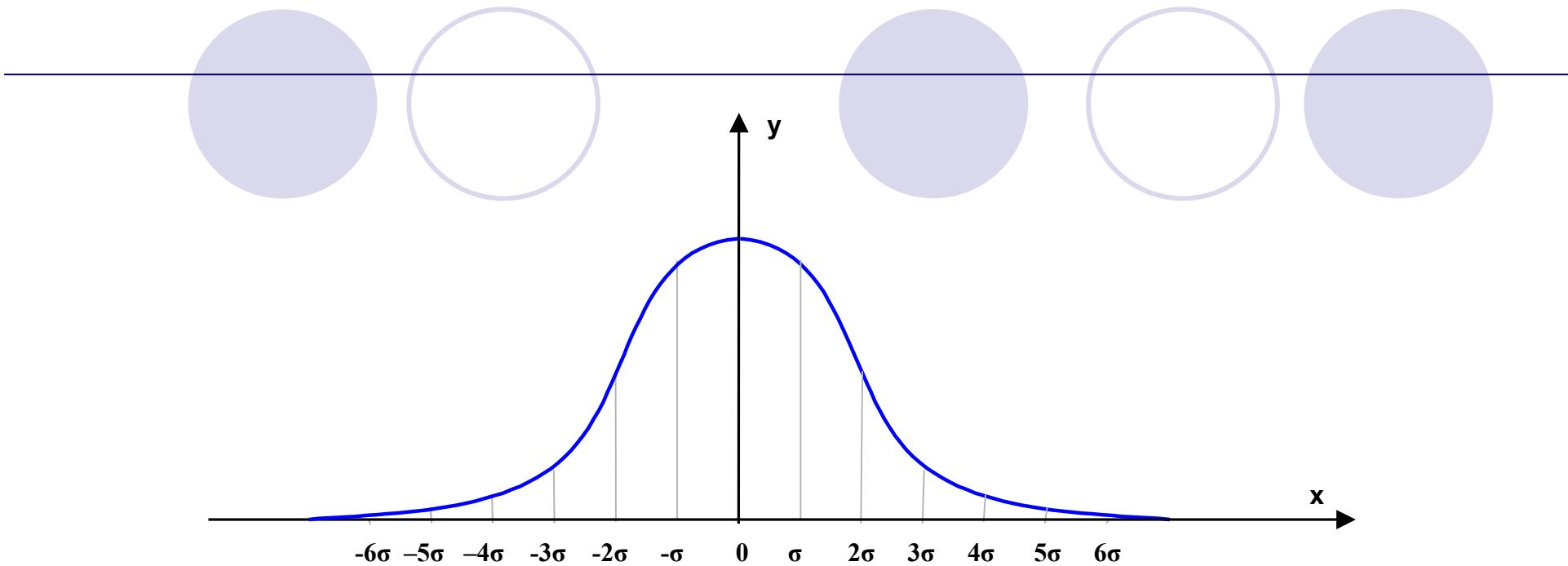
**$n$  – neovisna opažanja (broj ponovljenih mjerena)**

**$\mu$  – očekivanje (istinita vrijednost), koja se kod rezultata mjerena procjenjuje s aritmetičkom sredinom rezultata mjerena**

**$x_i$  – slučajna varijabla (i-ti rezultat mjerena)**

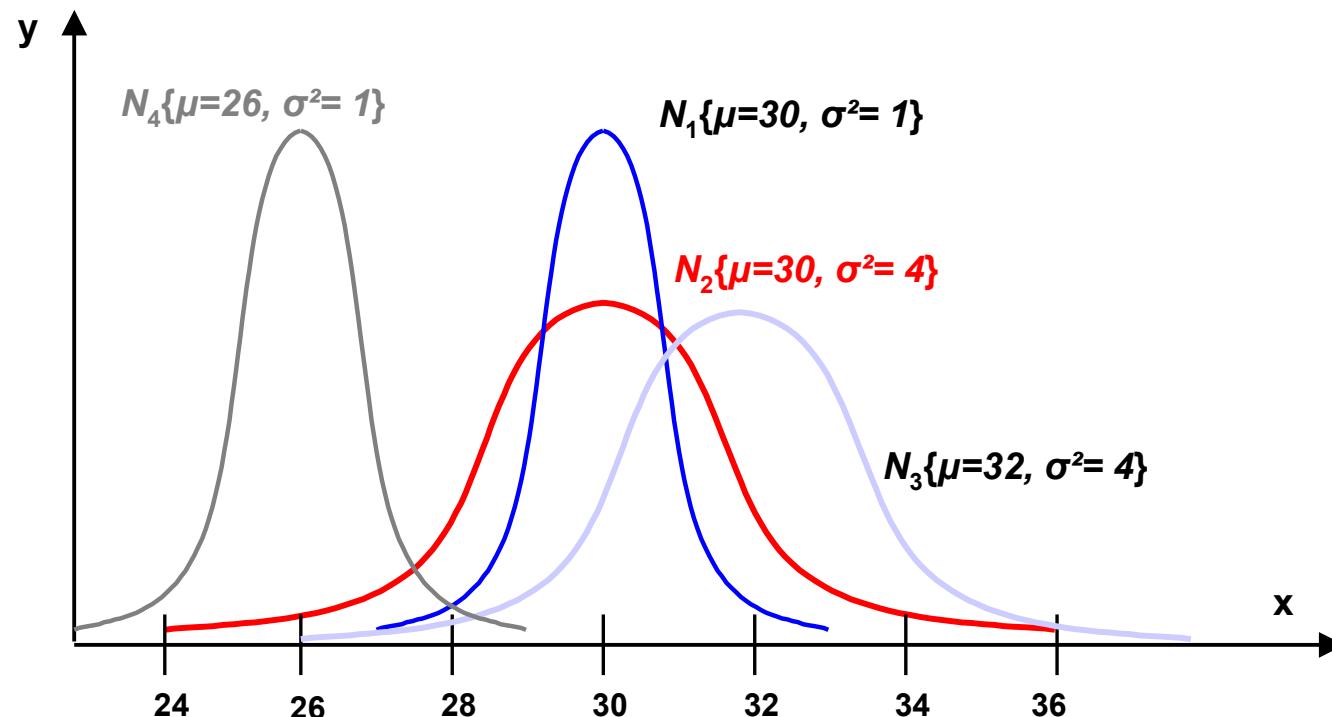
**Iz varijance se može izračunati standardno odstupanje  $\sigma$  (sigma):**

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}$$



| $t$  | $\mu \pm \sigma$     | $P\{\bar{x} - \sigma < x < \bar{x} + \sigma\}$ | Postotak ispod krivulje |
|------|----------------------|--|-------------------------|
| 0,67 | $\mu \pm 0,67\sigma$ | 0,5000   | 50                      |
| 1    | $\mu \pm 1\sigma$    | 0,6827   | 68,27                   |
| 1,96 | $\mu \pm 1,96\sigma$ | 0,9500   | 95                      |
| 2    | $\mu \pm 2\sigma$    | 0,9545   | 95,45                   |
| 3    | $\mu \pm 3\sigma$    | 0,9973   | 99,73                   |
| 6    | $\mu \pm 6\sigma$    | 0,999999998                                    | 99,9999998              |

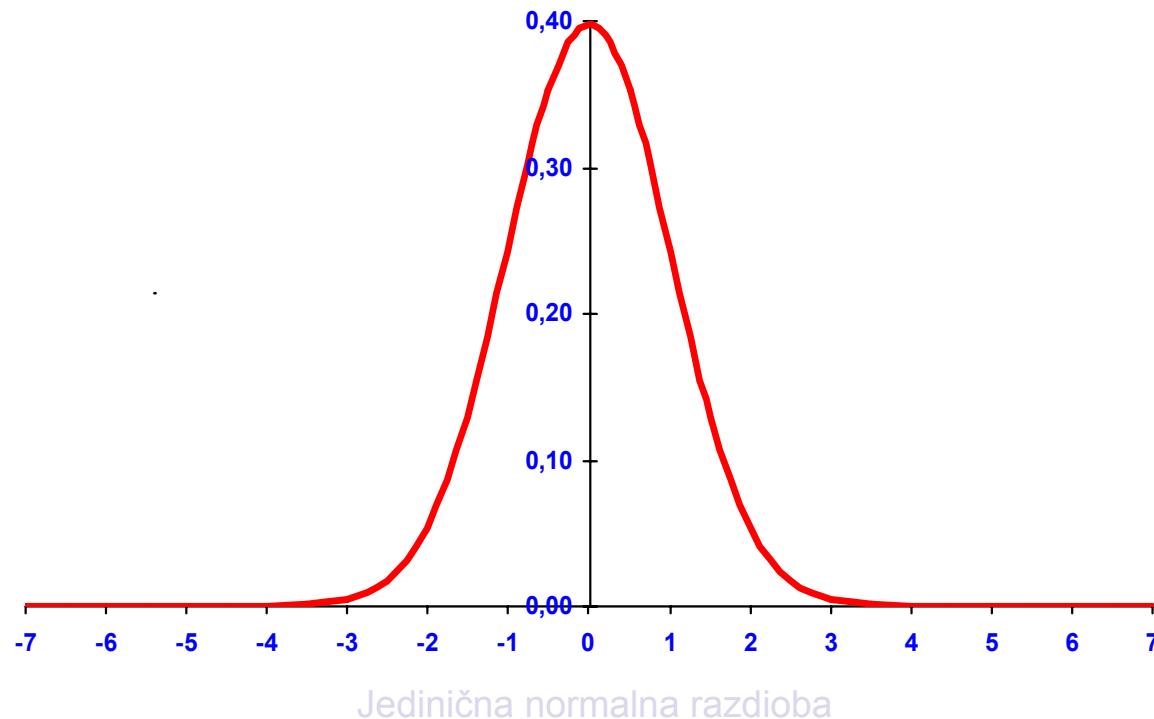
## Odnos više normalnih razdioba različitih varijanci i očekivanja



Izvršimo li zamjenu  $\frac{x - \mu}{\sigma} = z$ , ona prelazi u:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} = \frac{1}{\sigma} \varphi(z)$$

gdje je  $\varphi(z)$  funkcija vjerojatnosti jedinične normalne razdiobe za  $\mu=0$  i  $\sigma^2 = 1$ .



## Vjerojatnosti pri normalnoj razdiobi

$$P(x_1 < x_i < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Izvršimo li zamjenu  $\frac{x-\mu}{\sigma} = z$  dobivamo:

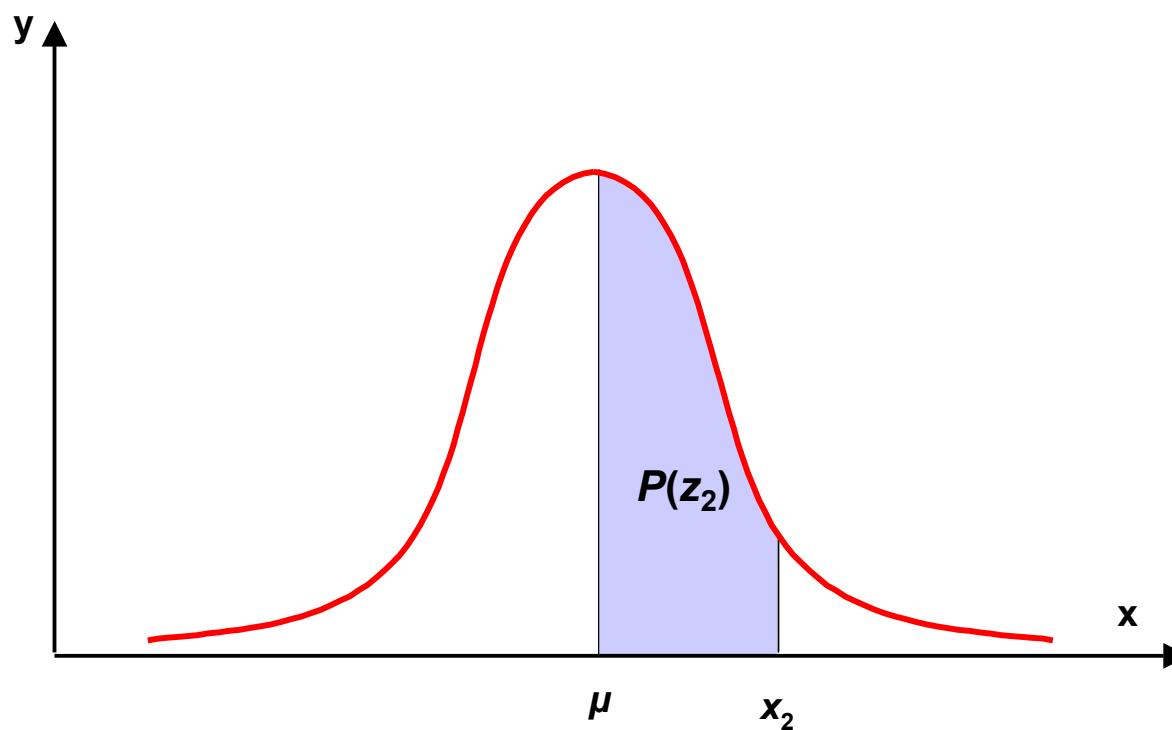
$$P(x_1 < x_i < x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

Pri tom je:  $\frac{x_1 - \mu}{\sigma} = z_1 \quad \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = z_2$

Uzmemo li  $x_1 = \mu$  slijedi da je  $z_1 = 0$  pa imamo

$$P(u_2) = P(\mu < x_i < x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{z_2} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

Toj vjerojatnosti odgovara površina prikazana na donjoj slici. Za različite vrijednosti z vjerojatnosti  $P(z)$  dane su u tablicama za normalnu razdiobu.

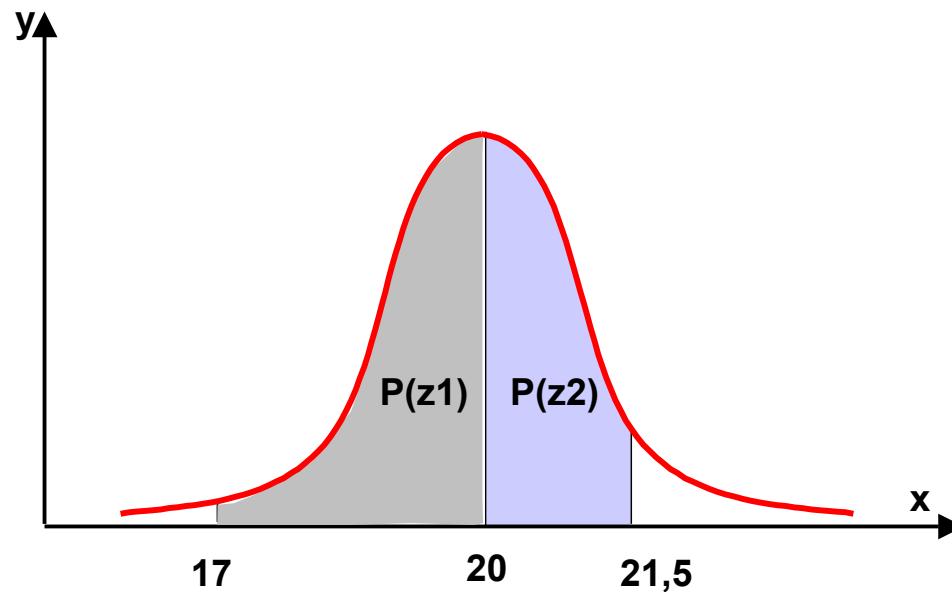


---

**Primjer 1.**

Zadana je normalna razdioba  $N_1\{\mu=20, \sigma^2= 4\}$ . Potrebno je izračunati:

- vjerojatnost  $P(17 < x < 21,5)$ ?
- Kolika je vjerojatnost da varijabla  $x$  poprimi bilo koju vrijednost manju od 21,5?
- Kolika je vjerojatnost da varijabla  $x$  poprimi neku vrijednost veću od 21,5?



---

a)  $P(17 < x < 21,5) = P(z_1) + P(z_2)$

$$z_1 = \frac{17 - 20}{2} = -1,50,$$

$$z_2 = \frac{21,5 - 20}{2} = 0,75$$

Iz tabliceочитамо:

$$P(z_1) = 0,43319$$

$$P(z_2) = 0,27337, \text{ pa je onda:}$$

$$P(17 < x < 21,5) = 0,43319 + 0,27337 = 0,70656$$

b) Prema slici vidimo da je vjerojatnost da varijabla  $x$  poprimi bilo koju vrijednost manju od 21,5 jednaka:

$$P(x < 21,5) = 0,5 + P(z_2) = 0,5 + 0,27337 = 0,77337$$

c)  $P(x > 21,5) = 0,5 - P(z_2) = 0,5 - 0,27337 = 0,22663$

---

## Primjer 2.

Mjerenjem dimenzije nekog komada dobiveni su rezultati koji se pokoravaju zakonu normalne razdiobe  $N1\{\mu=20 \text{ mm}, \sigma^2=0,04 \text{ mm}^2\}$ . Za tu dimenziju propisane su granice tolerancija  $(19,45; 20,40)$ . Koliko će posto proizvoda imati dimenziju izvan toleracijskog polja?

$$\check{S} = 1 - [P(z_1) + P(z_2)]$$

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{-0,55}{0,2} = -2,75$$

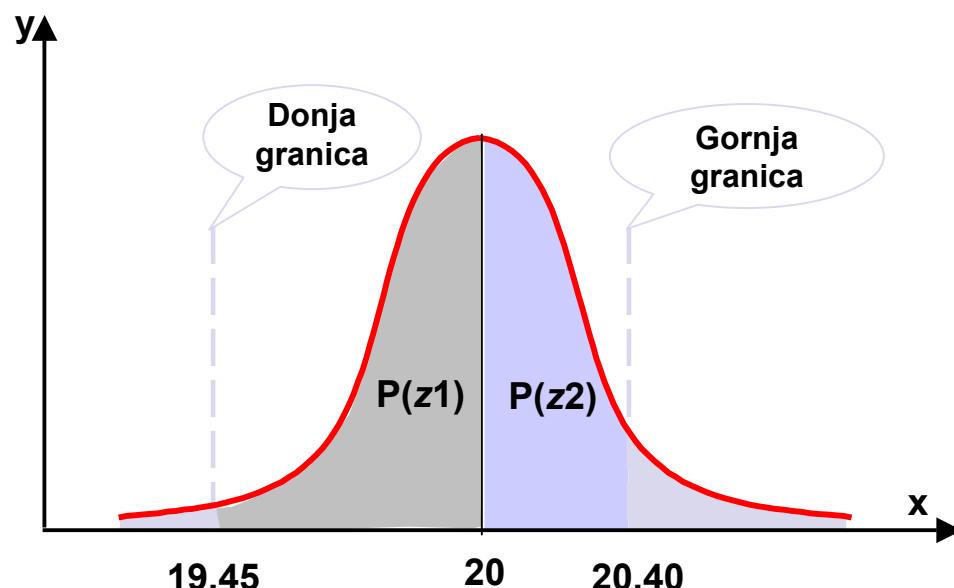
$$z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{0,4}{0,2} = 2,00$$

Iz tablice očitamo:

$$P(z_1) = 0,49702, \quad P(z_2) = 0,47725$$

pa je onda:

$$\check{S} = 1 - (0,49702 + 0,47725) = 0,02573, \text{ odnosno } 2,57 \text{ %}.$$



## Površina ispod krivulje jedinične normalne razdiobe

|     | 0.00   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.04   | 0.05   | 0.06   | 0.07   | 0.08   | 0.09   |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0.0000 | 0.0040 | 0.0080 | 0.0120 | 0.0160 | 0.0199 | 0.0239 | 0.0279 | 0.0319 | 0.0359 |
| 0.1 | 0.0398 | 0.0438 | 0.0478 | 0.0517 | 0.0557 | 0.0596 | 0.0636 | 0.0675 | 0.0714 | 0.0753 |
| 0.2 | 0.0793 | 0.0832 | 0.0871 | 0.0910 | 0.0948 | 0.0987 | 0.1026 | 0.1064 | 0.1103 | 0.1141 |
| 0.3 | 0.1179 | 0.1217 | 0.1255 | 0.1293 | 0.1331 | 0.1368 | 0.1406 | 0.1443 | 0.1480 | 0.1517 |
| 0.4 | 0.1554 | 0.1591 | 0.1628 | 0.1664 | 0.1700 | 0.1736 | 0.1772 | 0.1808 | 0.1844 | 0.1879 |
| 0.5 | 0.1915 | 0.1950 | 0.1985 | 0.2019 | 0.2054 | 0.2088 | 0.2123 | 0.2157 | 0.2190 | 0.2224 |
| 0.6 | 0.2257 | 0.2291 | 0.2324 | 0.2357 | 0.2389 | 0.2422 | 0.2454 | 0.2486 | 0.2517 | 0.2549 |
| 0.7 | 0.2580 | 0.2611 | 0.2642 | 0.2673 | 0.2704 | 0.2734 | 0.2764 | 0.2794 | 0.2823 | 0.2852 |
| 0.8 | 0.2881 | 0.2910 | 0.2939 | 0.2967 | 0.2995 | 0.3023 | 0.3051 | 0.3078 | 0.3106 | 0.3133 |
| 0.9 | 0.3159 | 0.3186 | 0.3212 | 0.3238 | 0.3264 | 0.3289 | 0.3315 | 0.3340 | 0.3365 | 0.3389 |
| 1.0 | 0.3413 | 0.3438 | 0.3461 | 0.3485 | 0.3508 | 0.3531 | 0.3554 | 0.3577 | 0.3599 | 0.3621 |
| 1.1 | 0.3643 | 0.3665 | 0.3686 | 0.3708 | 0.3729 | 0.3749 | 0.3770 | 0.3790 | 0.3810 | 0.3830 |
| 1.2 | 0.3849 | 0.3869 | 0.3888 | 0.3907 | 0.3925 | 0.3944 | 0.3962 | 0.3980 | 0.3997 | 0.4015 |
| 1.3 | 0.4032 | 0.4049 | 0.4066 | 0.4082 | 0.4099 | 0.4115 | 0.4131 | 0.4147 | 0.4162 | 0.4177 |
| 1.4 | 0.4192 | 0.4207 | 0.4222 | 0.4236 | 0.4251 | 0.4265 | 0.4279 | 0.4292 | 0.4306 | 0.4319 |
| 1.5 | 0.4332 | 0.4345 | 0.4357 | 0.4370 | 0.4382 | 0.4394 | 0.4406 | 0.4418 | 0.4429 | 0.4441 |

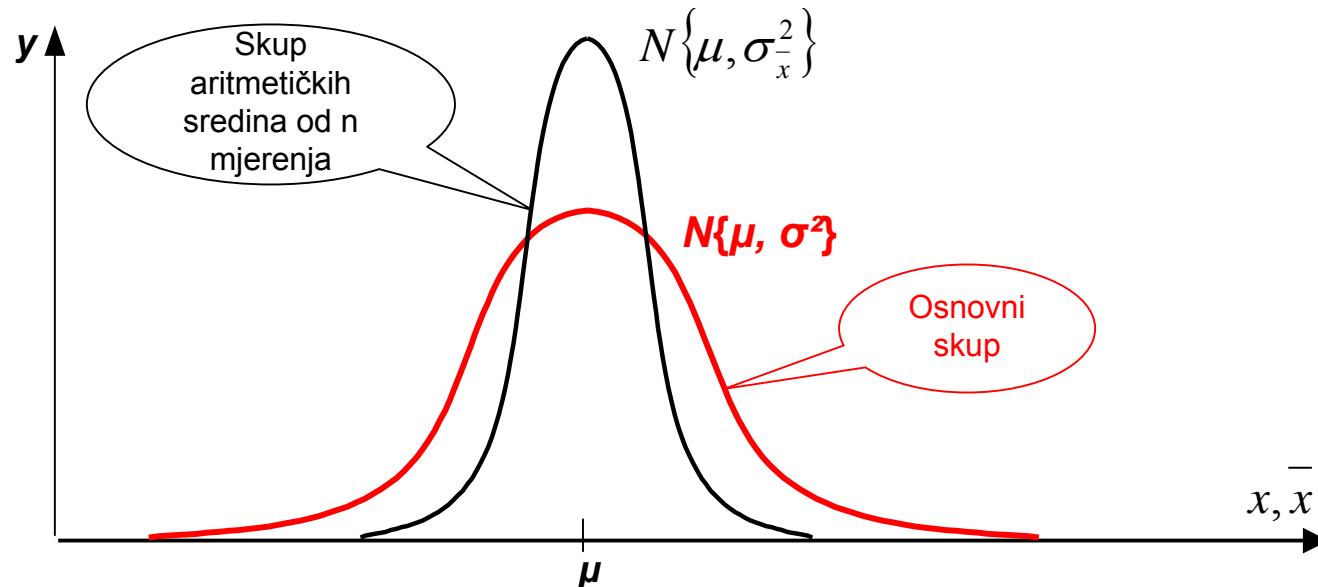


|            | <b>0.00</b>   | <b>0.01</b>   | <b>0.02</b>   | <b>0.03</b>   | <b>0.04</b>   | <b>0.05</b>   | <b>0.06</b>   | <b>0.07</b>   | <b>0.08</b>   | <b>0.09</b>   |
|------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| <b>1.6</b> | <b>0.4452</b> | <b>0.4463</b> | <b>0.4474</b> | <b>0.4484</b> | <b>0.4495</b> | <b>0.4505</b> | <b>0.4515</b> | <b>0.4525</b> | <b>0.4535</b> | <b>0.4545</b> |
| <b>1.7</b> | <b>0.4554</b> | <b>0.4564</b> | <b>0.4573</b> | <b>0.4582</b> | <b>0.4591</b> | <b>0.4599</b> | <b>0.4608</b> | <b>0.4616</b> | <b>0.4625</b> | <b>0.4633</b> |
| <b>1.8</b> | <b>0.4641</b> | <b>0.4649</b> | <b>0.4656</b> | <b>0.4664</b> | <b>0.4671</b> | <b>0.4678</b> | <b>0.4686</b> | <b>0.4693</b> | <b>0.4699</b> | <b>0.4706</b> |
| <b>1.9</b> | <b>0.4713</b> | <b>0.4719</b> | <b>0.4726</b> | <b>0.4732</b> | <b>0.4738</b> | <b>0.4744</b> | <b>0.4750</b> | <b>0.4756</b> | <b>0.4761</b> | <b>0.4767</b> |
| <b>2.0</b> | <b>0.4772</b> | <b>0.4778</b> | <b>0.4783</b> | <b>0.4788</b> | <b>0.4793</b> | <b>0.4798</b> | <b>0.4803</b> | <b>0.4808</b> | <b>0.4812</b> | <b>0.4817</b> |
| <b>2.1</b> | <b>0.4821</b> | <b>0.4826</b> | <b>0.4830</b> | <b>0.4834</b> | <b>0.4838</b> | <b>0.4842</b> | <b>0.4846</b> | <b>0.4850</b> | <b>0.4854</b> | <b>0.4857</b> |
| <b>2.2</b> | <b>0.4861</b> | <b>0.4864</b> | <b>0.4868</b> | <b>0.4871</b> | <b>0.4875</b> | <b>0.4878</b> | <b>0.4881</b> | <b>0.4884</b> | <b>0.4887</b> | <b>0.4890</b> |
| <b>2.3</b> | <b>0.4893</b> | <b>0.4896</b> | <b>0.4898</b> | <b>0.4901</b> | <b>0.4904</b> | <b>0.4906</b> | <b>0.4909</b> | <b>0.4911</b> | <b>0.4913</b> | <b>0.4916</b> |
| <b>2.4</b> | <b>0.4918</b> | <b>0.4920</b> | <b>0.4922</b> | <b>0.4925</b> | <b>0.4927</b> | <b>0.4929</b> | <b>0.4931</b> | <b>0.4932</b> | <b>0.4934</b> | <b>0.4936</b> |
| <b>2.5</b> | <b>0.4938</b> | <b>0.4940</b> | <b>0.4941</b> | <b>0.4943</b> | <b>0.4945</b> | <b>0.4946</b> | <b>0.4948</b> | <b>0.4949</b> | <b>0.4951</b> | <b>0.4952</b> |
| <b>2.6</b> | <b>0.4953</b> | <b>0.4955</b> | <b>0.4956</b> | <b>0.4957</b> | <b>0.4959</b> | <b>0.4960</b> | <b>0.4961</b> | <b>0.4962</b> | <b>0.4963</b> | <b>0.4964</b> |
| <b>2.7</b> | <b>0.4965</b> | <b>0.4966</b> | <b>0.4967</b> | <b>0.4968</b> | <b>0.4969</b> | <b>0.4970</b> | <b>0.4971</b> | <b>0.4972</b> | <b>0.4973</b> | <b>0.4974</b> |
| <b>2.8</b> | <b>0.4974</b> | <b>0.4975</b> | <b>0.4976</b> | <b>0.4977</b> | <b>0.4977</b> | <b>0.4978</b> | <b>0.4979</b> | <b>0.4979</b> | <b>0.4980</b> | <b>0.4981</b> |
| <b>2.9</b> | <b>0.4981</b> | <b>0.4982</b> | <b>0.4982</b> | <b>0.4983</b> | <b>0.4984</b> | <b>0.4984</b> | <b>0.4985</b> | <b>0.4985</b> | <b>0.4986</b> | <b>0.4986</b> |
| <b>3.0</b> | <b>0.4987</b> | <b>0.4987</b> | <b>0.4987</b> | <b>0.4988</b> | <b>0.4988</b> | <b>0.4989</b> | <b>0.4989</b> | <b>0.4989</b> | <b>0.4990</b> | <b>0.4990</b> |

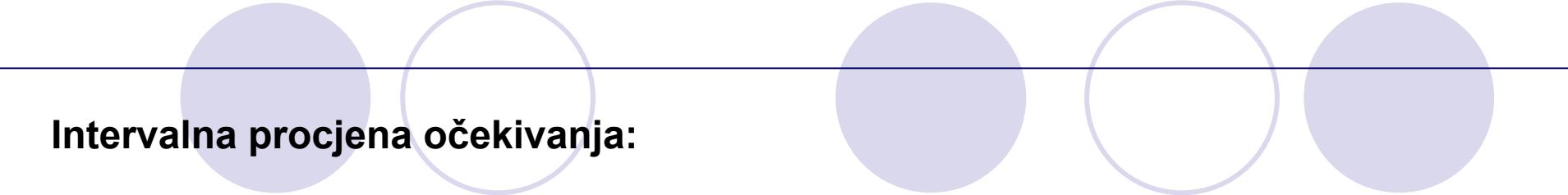
## Intervalna procjena očekivanja

Ako je varijabla  $x$  raspodijeljena po zakonu normalne razdiobe  $N\{\mu, \sigma^2\}$  aritmetičke sredine uzoraka od  $n$  elemenata pokoravaju se zakonu normalne razdiobe  $N\{\mu, \sigma_{\bar{x}}^2\}$  gdje je:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \quad - \text{ varijanca}, \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad - \text{ standardno odstupanje}$$



---



**Intervalna procjena očekivanja:**

$$\bar{x} - z\sigma_{\bar{x}} \leq \mu \leq \bar{x} + z\sigma_{\bar{x}}$$

**Ako se  $\sigma^2$  zamijeni s nepristranom procjenom  $s^2$ :**

$$\bar{x} - zS_{\bar{x}} \leq \mu \leq \bar{x} + zS_{\bar{x}}$$

**gdje je:**

$$S_{\bar{x}}^2 = \frac{s^2}{n}$$

## Studentova t - razdioba

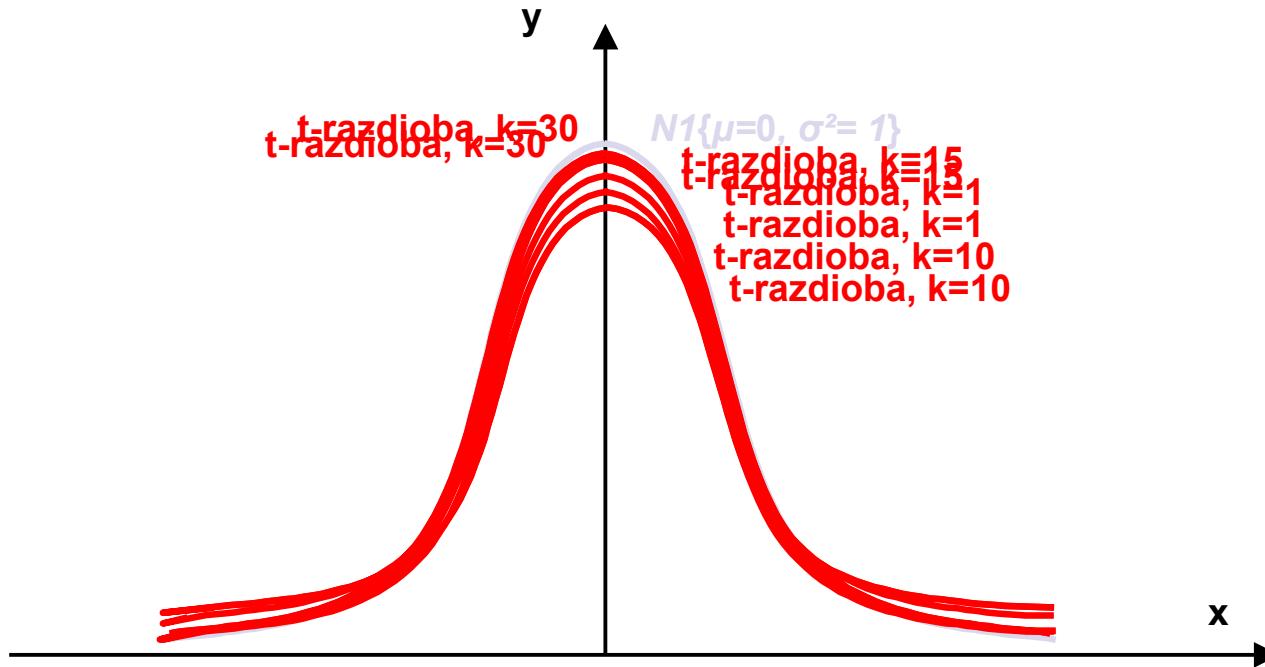
- kontinuirana razdioba;
- Definirao ju je William S. Gosset 1908. godine koji je u to vrijeme radio na poslovima statistike u pivarskoj kompaniji Guinness. Zbog rada u pivovari radove je objavljivao pod pseudonimom "student" pa se zbog toga i razdioba zove studentovom razdiobom;
- Varijabla t- raspodjele može se opisati slijedećim idealiziranim eksperimentom:

Ako je  $x$  normalna varijabla čije je očekivanje  $\mu$  i varijanca  $\sigma^2$ ,  $\bar{x}$  aritmetička sredina slučajnog uzorka veličine  $n$ , a  $s^2$  nepristrana procjena varijance  $\sigma^2$ , onda je:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}$$

**varijabla Studentove razdiobe sa stupnjem slobode  $k=n-1$ .**

## Odnos normalne i studentove razdiobe



- Studentova razdioba je također simetrična s obzirom na  $t=0$  pa su stoga metode koje se tiču dvostranih i jednostranih granica pri računanju vjerojatnosti ispod krivulje analogne onima kod normalne razdiobe.
- Razdioba je jednoznačno određena parametrom  $k$ , koji je jednak  $n-1$ , a zove se stupanj slobode.
- Studentova razdioba teži jediničnoj normalnoj razdiobi kad  $k$  teži u beskonačno. Stoga će za dovoljno veliki  $k$  (u primjenama kad je  $k$  veći od 30) dovoljno dobro dati aproksimirati normalnom razdiobom.
- Studentova razdioba nam omogućava da na bazi malog uzorka procijenimo očekivanje  $\mu$  varijable  $x$  osnovnog skupa iz kojeg potječe uzorak. Odaberemo li  $t_0$  tako da je  $P\{|t| > t_0\} = \alpha$  tada uz vjerojatnost  $1 - \alpha$  vrijedi nejednakost:

$$-t_0 < \frac{\bar{x} - \mu}{s_{\bar{x}}} < t_0, \quad \text{a pri tom je} \quad s_{\bar{x}} = s / \sqrt{n}$$

Prethodna nejednakost ekvivalentna je nejednakosti:

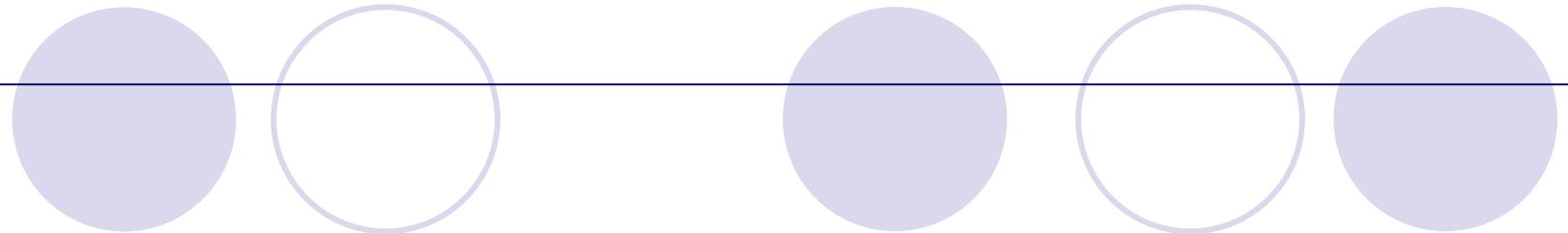
$$\bar{x} - t_0 s_{\bar{x}} < \mu < \bar{x} + t_0 s_{\bar{x}}$$

Koja u stvari nije ništa drugo nego intervalna procjena očekivanja. Za unaprijed zadalu pouzdanost i stupanj slobode  $k=n-1$  može se iz tablice za studentovu razdiobu direktno očitati  $t_0$ , tako da je npr. uz pouzdanost 0,95 intervalna procjena očekivanja na bazi uzorka od  $n=15$  elemenata ( $k=14$ ) dana izrazom:

$$\bar{x} - 2,145 s_{\bar{x}} < \mu < \bar{x} + 2,145 s_{\bar{x}}$$

| $n$      | $k$      | $t_0$  |
|----------|----------|--------|
| 2        | 1        | 12,706 |
| 5        | 4        | 2,776  |
| 15       | 14       | 2,145  |
| 30       | 29       | 2,045  |
| $\infty$ | $\infty$ | 1,960  |





# **STATISTIČKA OBRADA I PRIKAZIVANJE EMPIRIJSKIH PODATAKA**

Rezultati mjerenja:

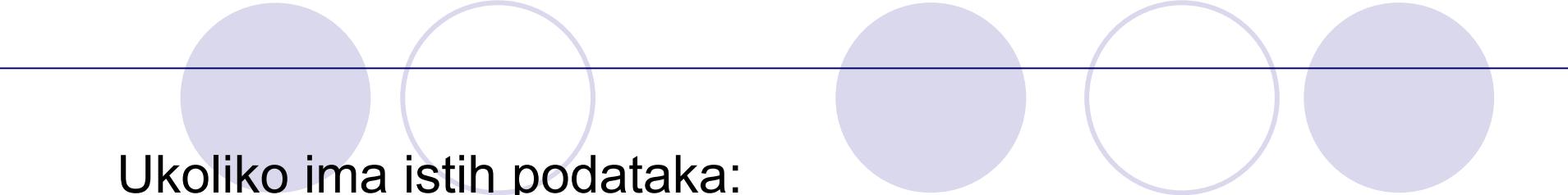
$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, \dots, x_n$$

➤ Srednja vrijednost rezultata mjerenja:

1. Aritmetička sredina  $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

---

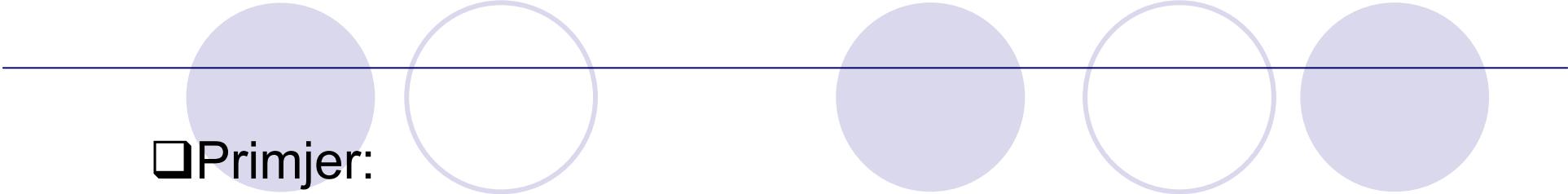


Ukoliko ima istih podataka:

$$\bar{x} = \frac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + \dots + f_n \cdot x_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i \cdot x_i}{n}$$

$f_i$  – frekvencija i-tog podatka (broj pojavljivanja i-tog podatka)

---



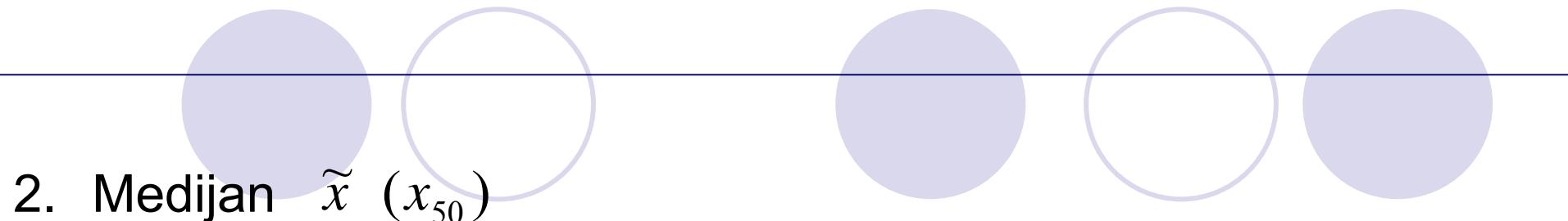
□ Primjer:

Rezultati mjerenja: 7,4,5,3,3,5,4,6,6,3;

$$\bar{x} = \frac{7+4+5+3+3+5+4+6+6+3}{10} = \frac{46}{10} = 4,6$$

ili

$$\bar{x} = \frac{3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 7}{3+2+2+2+1} = \frac{46}{10} = 4,6$$



Medijan je podatak u sredini rastućeg ili padajućeg niza.

✓ Neparni broj podataka  $n = 2k + 1$

Medijan je onaj rezultata od kojeg ima isti broj manjih i većih vrijednosti.  $\tilde{x} = x_{k+1}$

□ Primjer

Rezultati mjerenja: 7, 4, 5, 3, 3, 5, 4, 6, 3;

Podaci poredani po veličini: 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 7

$\tilde{x}$

✓ Parni broj podataka  $n = 2k$

Medijan je aritmetička sredina vrijednosti od kojih ima isti broj većih i manjih.  $\tilde{x} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$

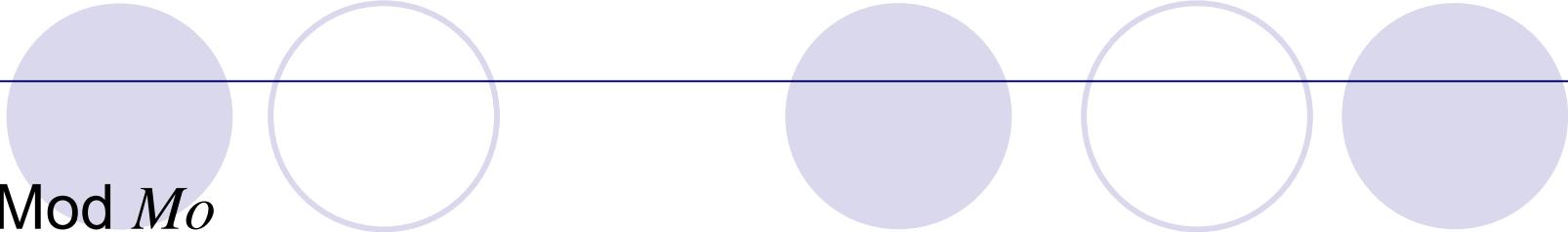
□ Primjer:

Rezultati mjeranja: 7, 4, 5, 3, 3, 5, 4, 6, 6, 3;

Podaci poredani po veličini: 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7

$$\tilde{x} = \frac{4+5}{2} = 4,5$$

---



### 3. Mod $Mo$

Mod je rezultata koji ima najveću frekvenciju.

□ Primjer:

Rezultati mjerenja: 7,4,5,3,3,5,4,6,6,3;

$$Mo = 3$$

➤ Rasipanje rezultata mjerena:

1. Raspon  $R$

Raspon je razlika najveće i najmanje vrijednosti rezultata.

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

□ Primjer:

$x_{\max}$                        $x_{\min}$   
↓                                ↓  
Rezultati mjerena: 7, 4, 5, 3, 3, 5, 4, 6, 6, 3;

$$R = 7 - 3 = 4$$

## 2. Procijenjeno standardno odstupanje $s$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

□ Primjer:

Rezultati mjeranja: 7,4,5,3,3,5,4,6,6,3;

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2}{9}} = 1,43$$

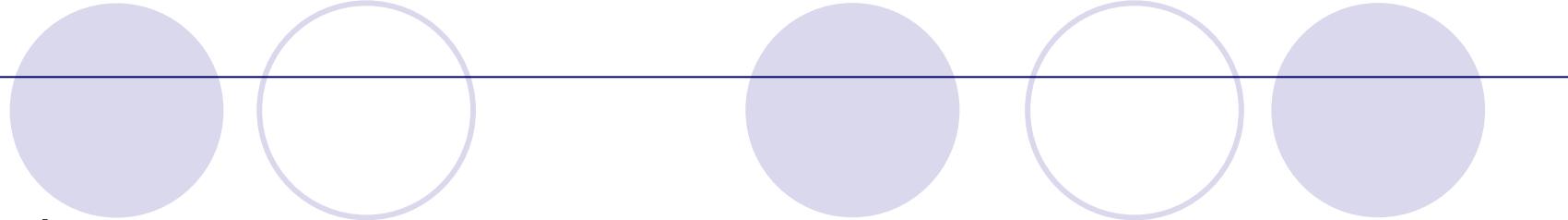
## 3. Procijenjena varijanca $V$

$$V = s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} \quad V = s^2 = 2,04$$

## Smjernice za grupiranje podataka u intervalne razrede

- ✓ Ako je broj podataka  $n$  nekoliko desetaka tada je broj razreda  
 $G \approx 6$  do 8
- ✓ Ako je broj podataka  $n$  100 do 200 tada je broj razreda  
 $G \approx \sqrt{n}$
- ✓ Ako je broj podataka  $n$  nekoliko stotina i više tada je broj razreda  
 $G$  do 15
- ✓ Širina razreda  $i$       
$$i = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{G - 1}$$
- ✓ Donja granica prvog razreda  $D_g$       
$$D_g = x_{\min} - \frac{i}{2}$$

---



□ Primjer:

Rezultati mjerenja:  $n = 30$

|      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|
| 0,16 | 0,19 | 0,10 | 0,12 | 0,18 | 0,19 |
| 0,16 | 0,13 | 0,21 | 0,17 | 0,17 | 0,17 |
| 0,17 | 0,15 | 0,15 | 0,22 | 0,25 | 0,21 |
| 0,23 | 0,16 | 0,14 | 0,11 | 0,17 | 0,14 |
| 0,14 | 0,19 | 0,16 | 0,16 | 0,20 | 0,14 |

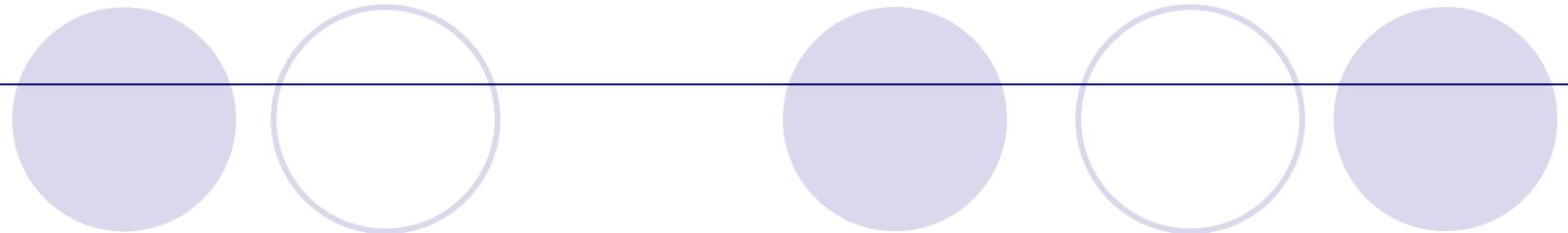
□ Primjer:

Rezultati mjerenja poređani po veličini:

|      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|
| 0,10 | 0,11 | 0,12 | 0,13 | 0,14 | 0,14 |
| 0,14 | 0,14 | 0,15 | 0,15 | 0,16 | 0,16 |
| 0,16 | 0,16 | 0,16 | 0,17 | 0,17 | 0,17 |
| 0,17 | 0,17 | 0,18 | 0,19 | 0,19 | 0,19 |
| 0,20 | 0,21 | 0,21 | 0,22 | 0,23 | 0,25 |

$$x_{\min} = 0,10; \quad x_{\max} = 0,25; \quad R = 0,15;$$

$$\bar{x} = 0,168; \quad \tilde{x} = 0,165; \quad s = 0,035$$

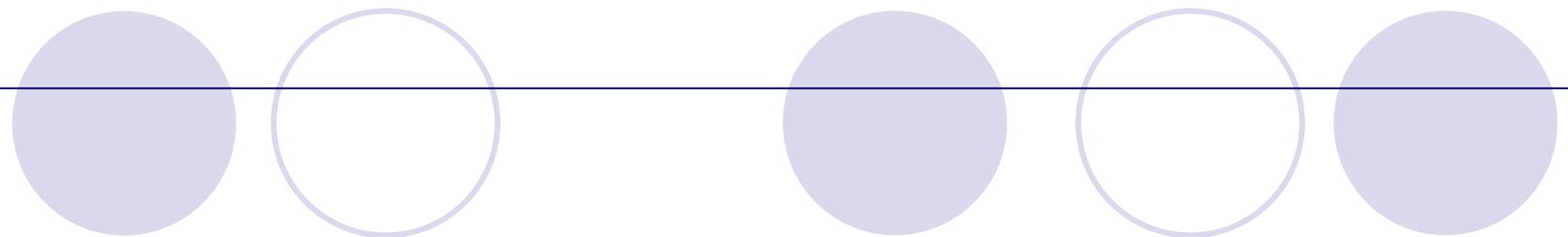


✓ Grupiranje podataka u razrede:

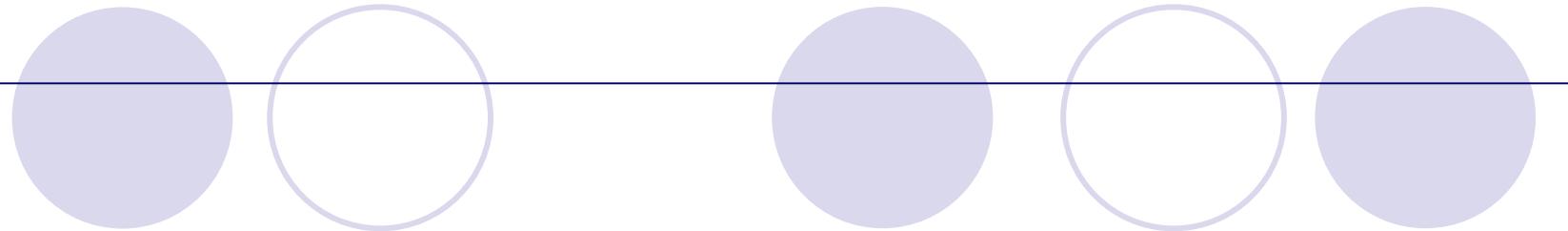
$$G = 6$$

$$i = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{G - 1} = \frac{0,25 - 0,10}{5} = 0,03$$

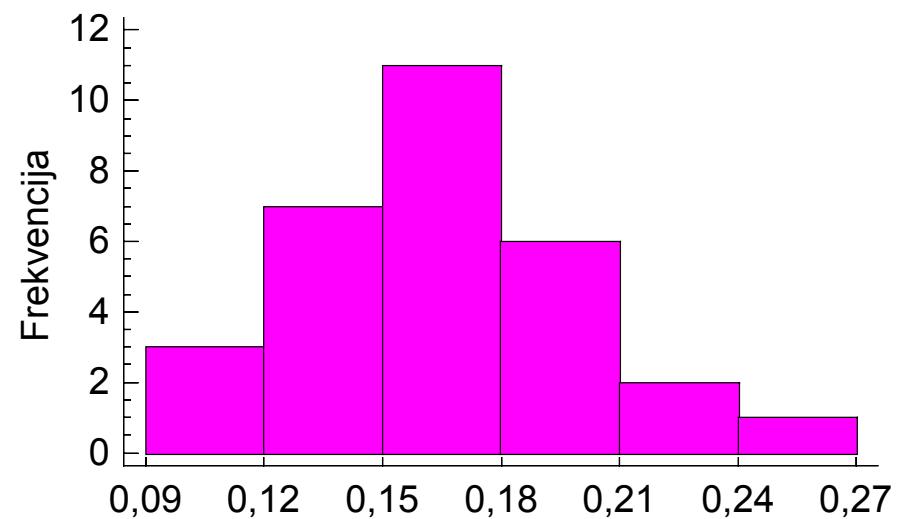
$$D_g = x_{\min} - \frac{i}{2} = 0,10 - 0,015 = 0,885 \approx 0,09$$

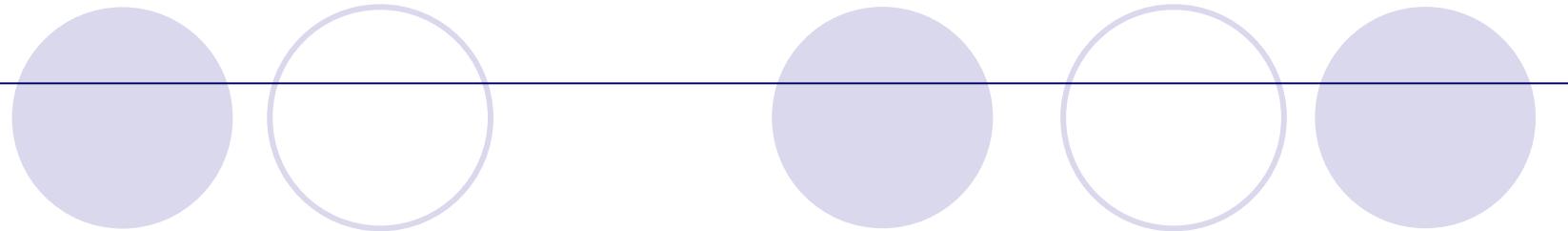


| Razredi   | Sredina razreda $x_i$ |            | Frekvencija $f_i$ |
|-----------|-----------------------|------------|-------------------|
| 0,09-0,12 | 0,105                 | xxx        | 3                 |
| 0,12-0,15 | 0,135                 | xxxxxx     | 7                 |
| 0,15-0,18 | 0,165                 | xxxxxxxxxx | 11                |
| 0,18-0,21 | 0,195                 | xxxxxx     | 6                 |
| 0,21-0,24 | 0,225                 | xx         | 2                 |
| 0,24-0,27 | 0,255                 | x          | 1                 |

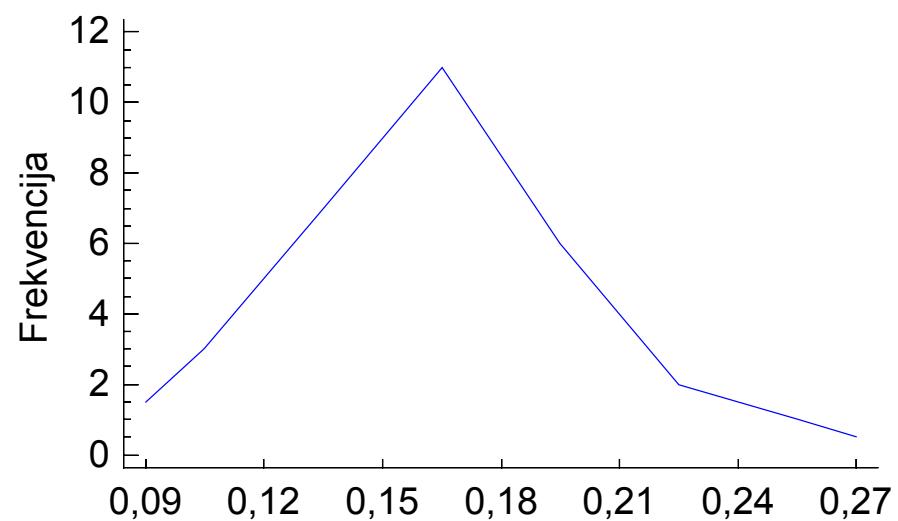


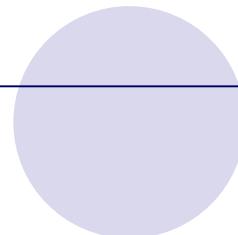
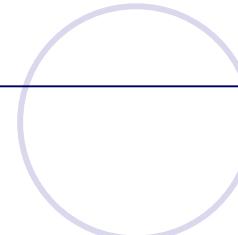
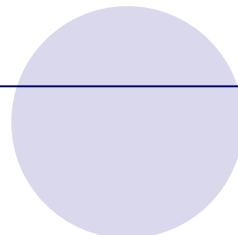
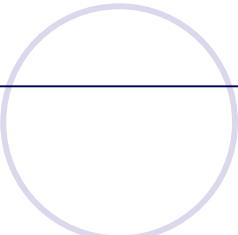
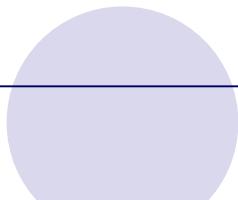
## Histogram



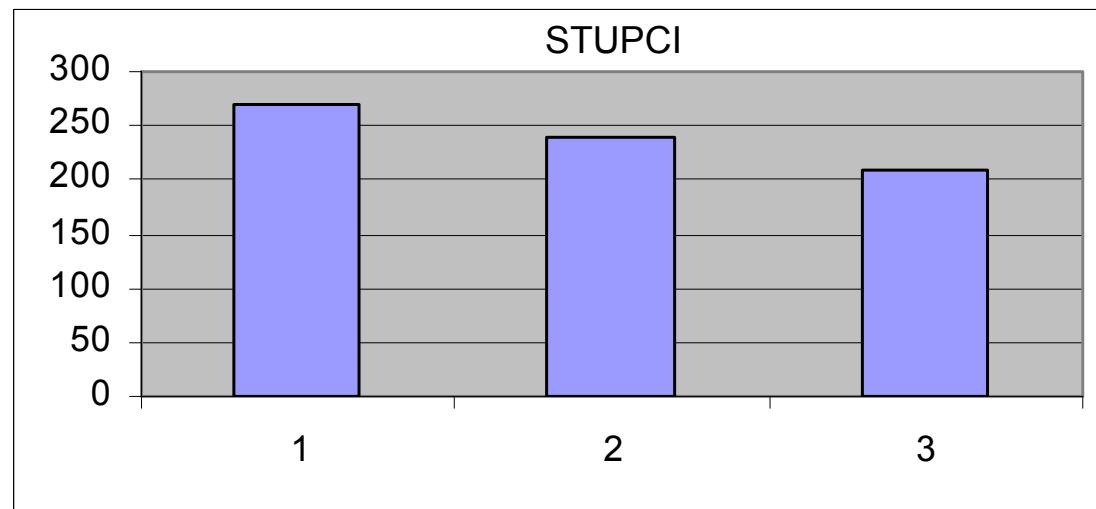


Poligon frekvencija





|   |     |
|---|-----|
| 1 | 270 |
| 2 | 240 |
| 3 | 210 |

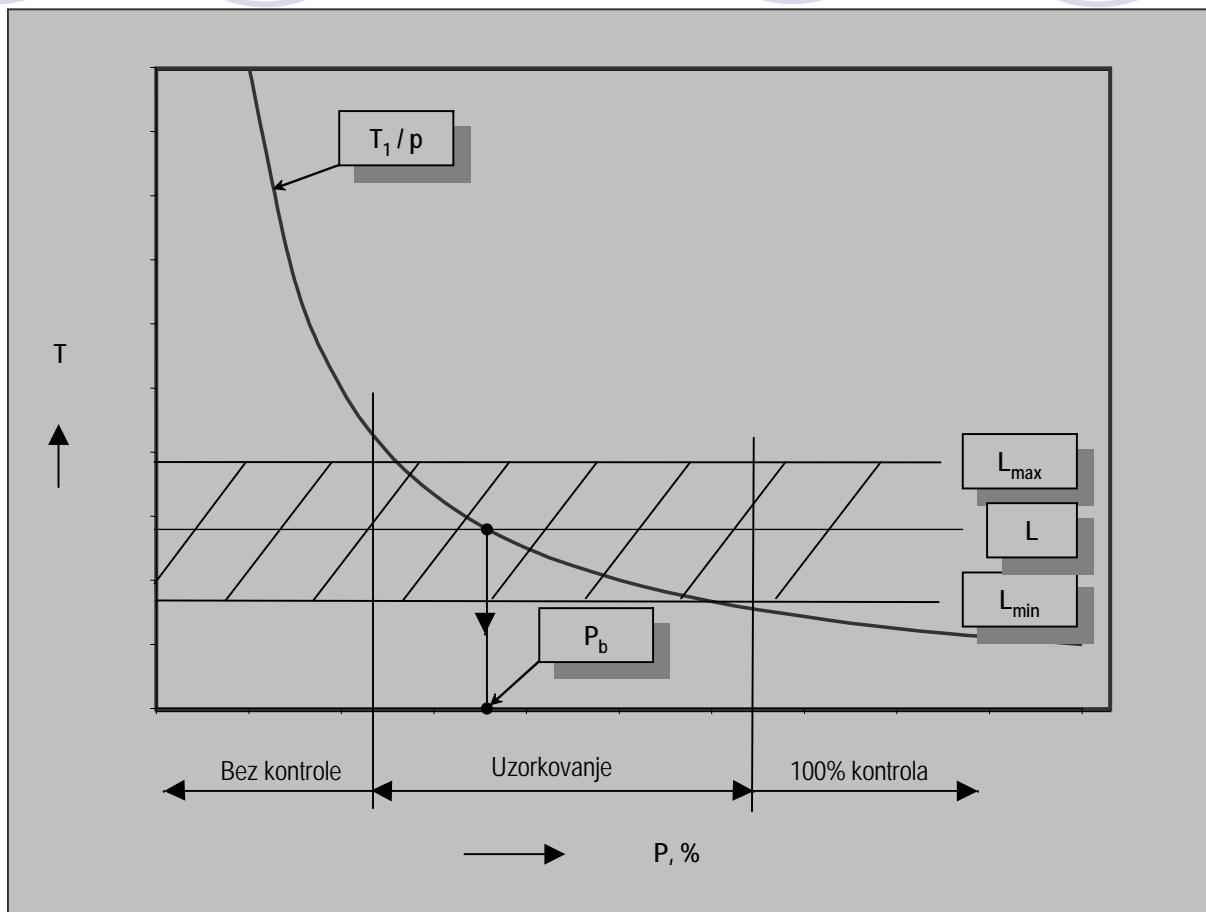


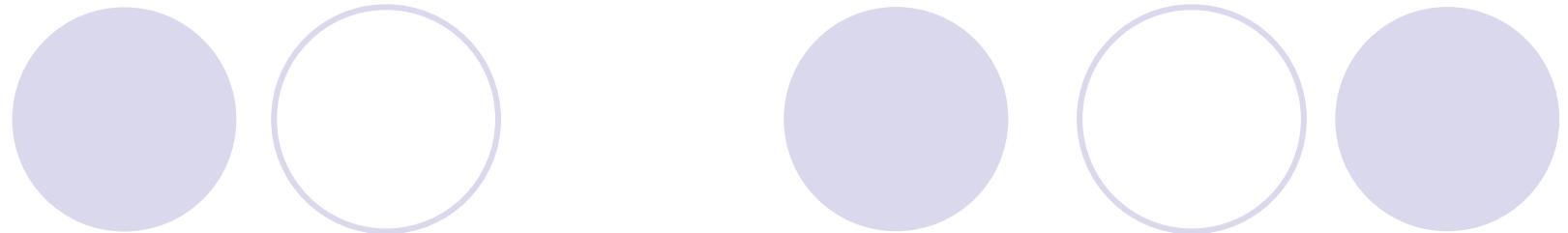
# **PLANOVI UZORKOVANJA (PRIJEMA)**

## **IZBOR NAČINA KONTROLE**

Treba odgovoriti na slijedeća pitanja:

1. U slučaju promatranog dijela najekonomičnije je provoditi 100 %-tnu kontrolu, uzorkovati, ili uopće ne provoditi kontrolu?
2. Ako je odabранo uzorkovanje, koji plan uzorkovanja treba koristiti i koji pokazatelji kvalitete trebaju biti odabrani?





$T_1$  – jedinični trošak kontrole (trošak kontrole jednog komada)

$T_1/p$  – trošak pronalaska (izdvajanja) jednog nesukladnog (lošeg) komada

$L$  – procijenjena šteta (trošak) nastala propuštanjem lošeg komada

$L_{\max}$  – procijenjena najveća šteta zbog propuštanja lošeg komada

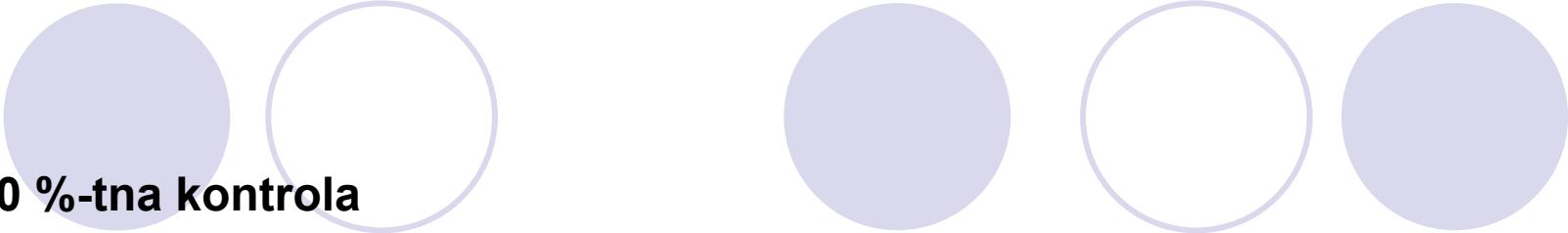
$L_{\min}$  – procijenjena najmanja šteta zbog propuštanja lošeg komada

$p_b$  – granični postotak nesukladnosti (škarta)

$$p_b = T_1/L$$

Procijenjena šteta (trošak) nastala propuštanjem lošeg komada ( $L$ ) može biti trošak popravka (dorade) nesukladne jedinice. U tom slučaju se umjesto termina  $p_b$  često koristi termin BEP (break-even-point).

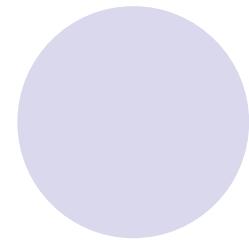
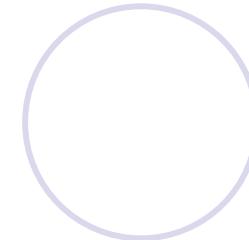
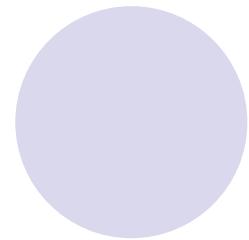
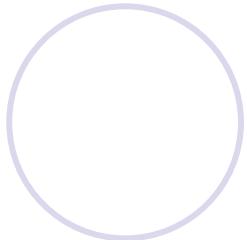
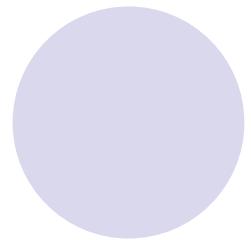
Proračun za BEP vrijednost se može napraviti za jedan dio ili jednu značajku kvalitete dijela (sklopa).



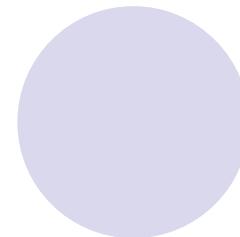
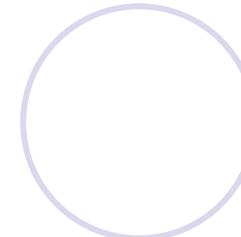
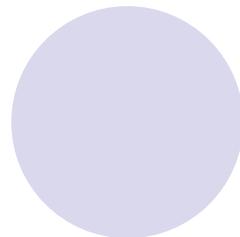
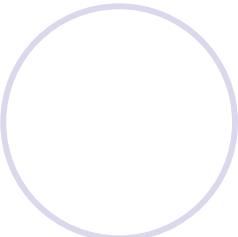
## **100 %-tna kontrola**

100% kontrola uvijek ima, u pravilu, prednost pred uzorkovanjem. Ima nekoliko značajki 100 % kontrole koje imaju nedostatke u usporedbi s uzorkovanjem. To su:

1. **Skupa je.** Svaki izrađen dio se mora pojedinačno provjeravati. Efikasnost se postiže samo primjenom mjernih (kontrolnih) automata, a ne aktivnošću kontrolora.
2. **Nerazumijevanje značenja (postupka) 100%-tne kontrole.** 100 %-tna kontrola je rijetko, u pravilu nikada, potpuna kontrola svih značajki dijela. To je provjera samo određenih značajki. Izjava "*100 %-tna kontrola je potrebna*" u pravilu dovodi do pretjerane kontrole pri čemu se propušta ono što je ključno.
3. **Uključuje sortiranje.** U biti, 100 %-tna kontrola znači odvajanje (sortiranje) loših dijelova od dobrih. To je tzv. «brojanje mrtvih», odnosno postupak koji je potpuno stran suvremenom (preventivnom) pristupu kontroli kvalitete.



4. **Može rezultirati prihvaćanjem nekih nesukladnih ili oštećenih dijelova.** Brojne nezavisne provjere pouzdanosti 100 %-tne kontrole u odvajanju loših dijelova od dobrih bacili su značajnu sumnju na njenu efikasnost. Monotonija ponavljajućih operacija kontrole može rezultirati nemamjernim prihvaćanjem loših dijelova.
  5. **Može rezultirati neprihvaćanjem dobrih dijelova.** Nekada kontrolori misle da njihov posao nije opravдан od njihovih nadređenih ako stalno prihvaćaju dijelove. To ponekad rezultira prekritičnim interpretacijama specifikacija i neprihvaćanjem zadovoljavajućih dijelova.
  6. **Može biti nepraktično.** U slučajevima gdje su potrebna razorna ispitivanja 100 %-tna kontrola je, naravno, nemoguća.
- Vjerojatnost uništenja imovine ili opasnost od ozljeda čini 100 %-tnu kontrolu nužnom.



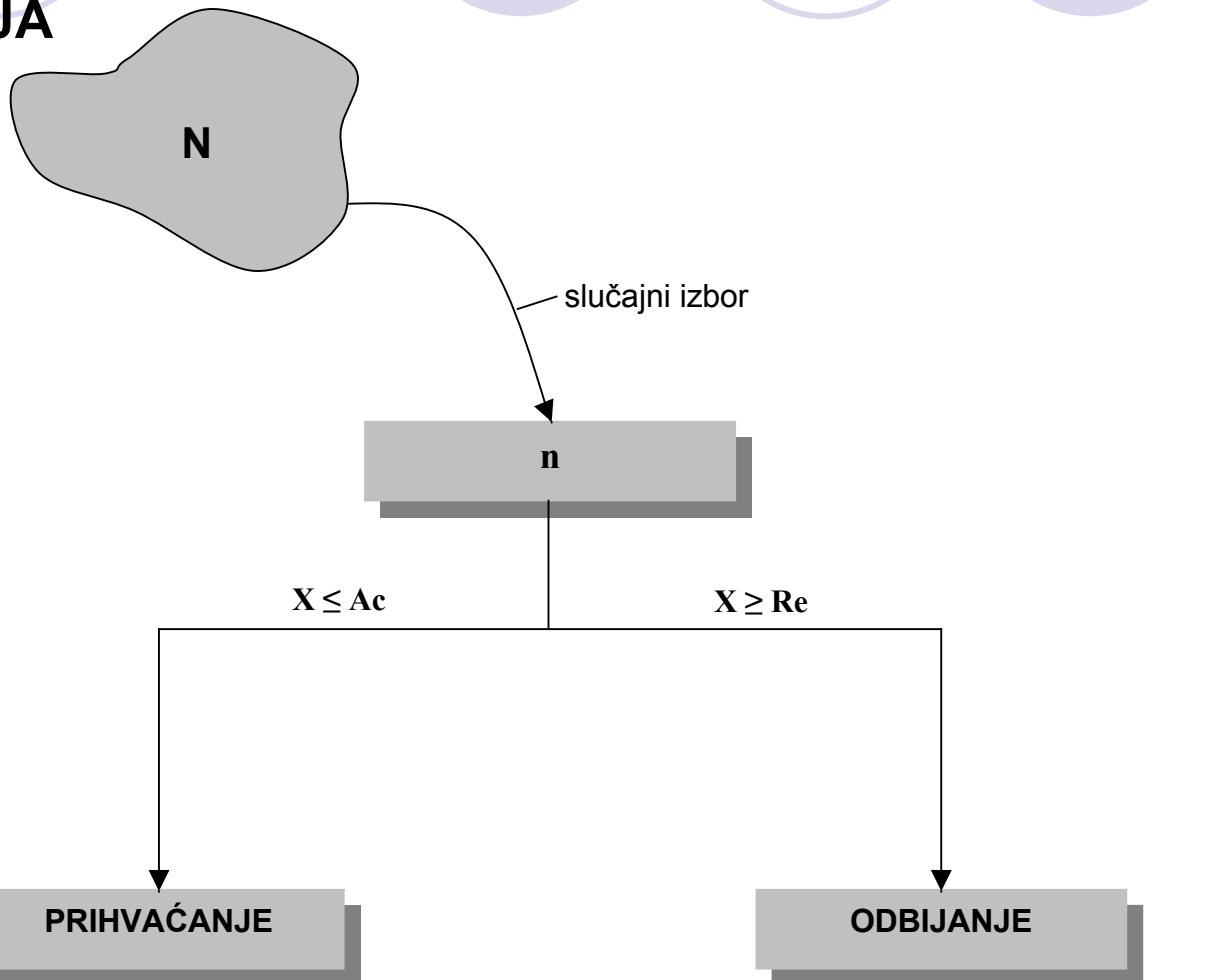
## **Uzorkovanje**

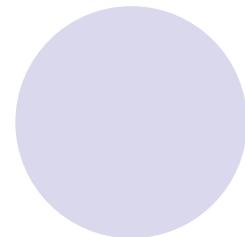
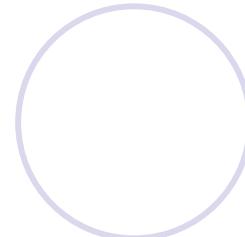
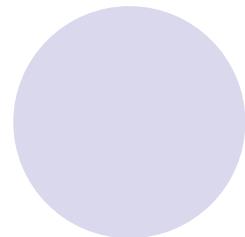
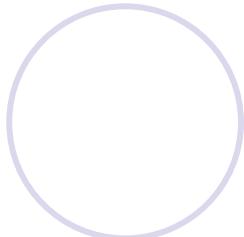
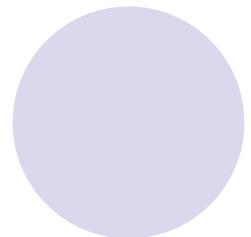
- Pouzdan postupak uzorkovanja može biti relativno jeftin u odnosu na 100 %-tну kontrolu.
- Uzorkovanje može značajno smanjiti monotoniju kontrole.
- U slučaju razornih ispitivanja to je jedina mogućnost.

## **Kad se može koristiti uzorkovanje?**

- Veliki problem u nekim industrijskim primjenama je bila upotreba planova uzorkovanja u situacijama za koje nisu prikladni.
- Razorno ispitivanje čini uzorkovanje imperativom.
- Da li treba uzorkovanje biti primijenjeno može postati pitanje praktičnosti ako će nesukladne jedinice biti uklonjene kasnije u toku proizvodnje.

## SHEMA UZORKOVANJA





N – veličina isporuke (serije)

n – veličina slučajno odabranog uzorka

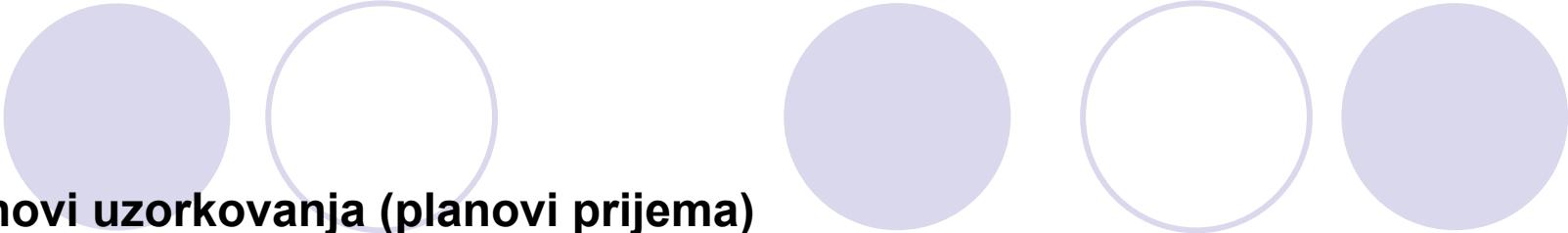
x – broj nesukladnih (loših) jedinica u uzorku

Ac – broj za prihvatanje

Re – broj za odbijanje

**Prihvatanje:** Ako se isporuka prihvata odlazi u tzv. ulazno skladište. Iz ulaznog skladišta uzimaju se dijelovi za potrebe proizvodnje.

**Odbijanje:** Odbijanje ne znači vraćanje isporuke dobavljaču (osim u ugovorenim situacijama). To znači da isporuku treba sortirati, odnosno 100 % kontrolirati i odvojiti loše od dobrih jedinica. Loše jedinice dobavljač zamjenjuje dobrima.



## Planovi uzorkovanja (planovi prijema)

Temeljno pitanje koje se postavlja pri kontroli uzorkovanjem glasi:

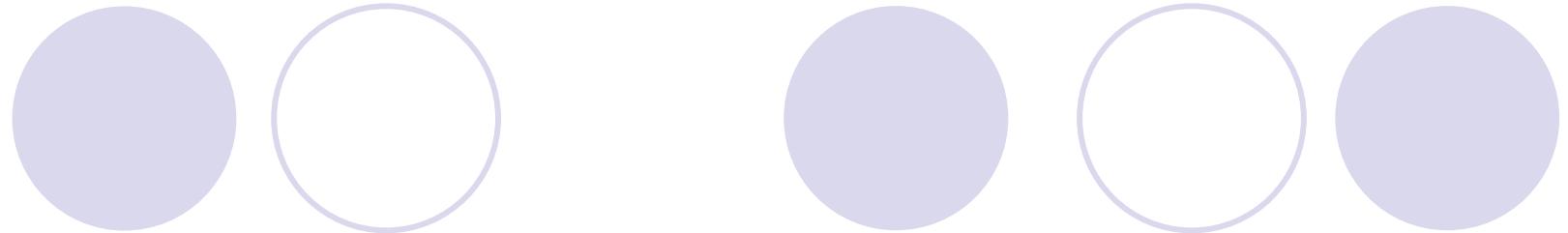
**«Koliki uzorak treba kontrolirati da bi nalaz kontrole bio pouzdan glede procjene razine kvalitete cijele isporuke?»**

Taj problem se može efikasno rješavati upotrebom planova uzorkovanja.

Ovisno o primjenjenom planu uzorkovanja odluka o prihvaćanju (odbijanju) isporuke može se donijeti nakon:

1. kontrole jednog slučajno odabranog uzorka (jednostruko uzorkovanje);
2. kontrole najviše dva slučajna uzorka (dvostruko uzorkovanje);
3. kontrole više od dva slučajna uzorka (višestruko uzorkovanje).

Ti planovi (tablice) su nadomjestile u mnogo primjera sve druge pristupe u kontroli prijema ulaznih materijala i dijelova.



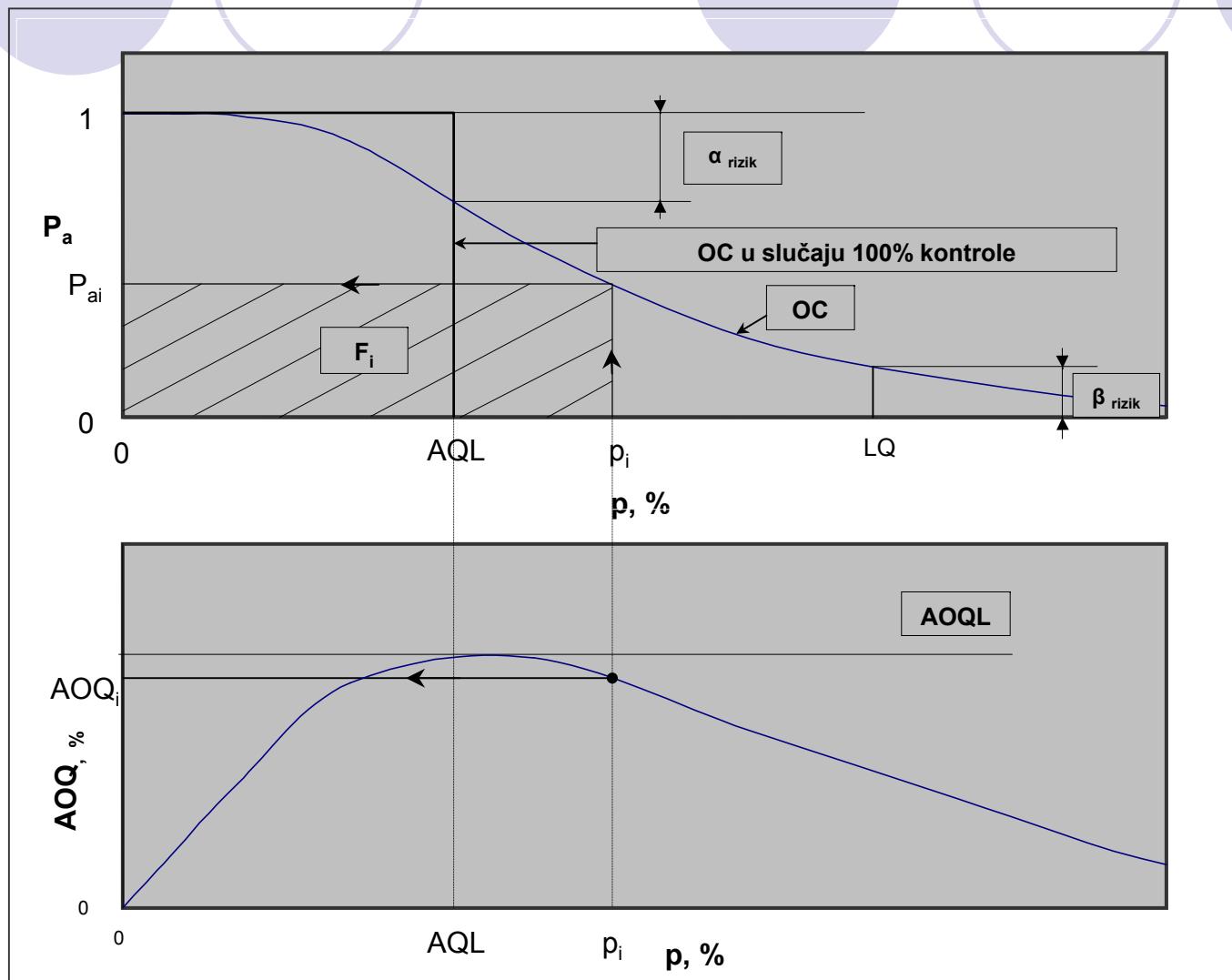
Planovi se također široko upotrebljavaju u završnoj kontroli radi provjere kvalitete isporuke prije isporučivanja kupcu.

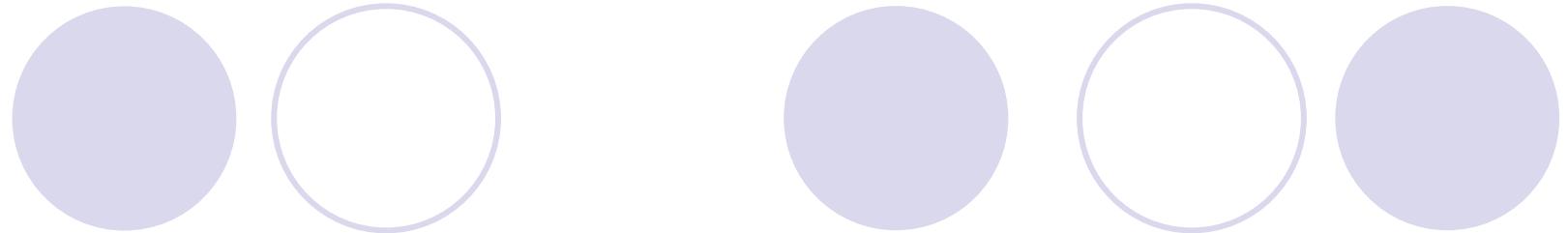
Ponešto različita i jednako važna potreba za primjenom planova uzorkovanja odnosi se i na kontrolu dijelova i sklopova tijekom procesa proizvodnje.

Planovi uzorkovanja se dijele u dvije temeljne skupine:

1. Planovi prijema za attribute (rezultat kontrole je atribut: dobro – loše, broj grešaka i sl.). Temelje se na binomnoj i Poissonovoj raspodjeli.
2. Planovi uzorkovanja za varijable (rezultat kontrole je mjerni podatak). Temelje se na normalnoj i Studentovoj raspodjeli.

## TERMINOLOGIJA PLANOVА UZORKOVANJA





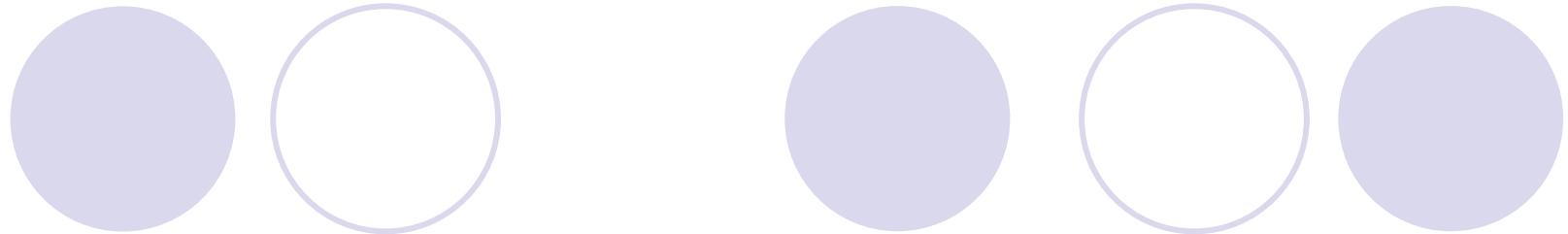
## **OPERATIVNA (RADNA) KRIVULJA PLANA UZORKOVANJA - OC**

p % - postotak nesukladnih (loših) jedinica u isporuci

p – omjer nesukladnih (loših) jedinica u isporuci

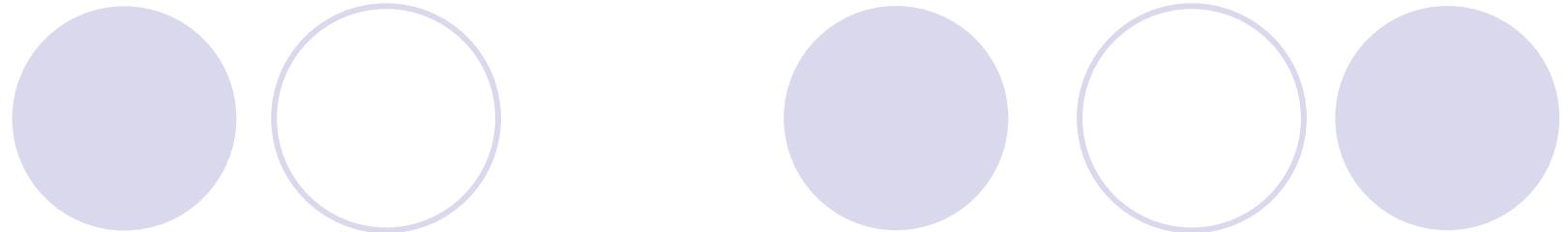
Pa % - vjerojatnost prihvatanja isporuke (0 – 100 %)

Pa – vjerojatnost prihvatanja isporuke (0 – 1)



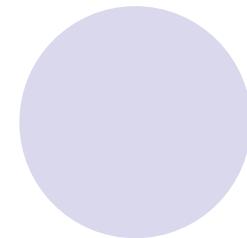
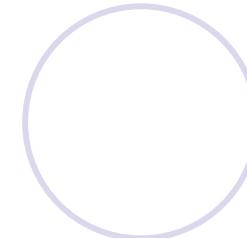
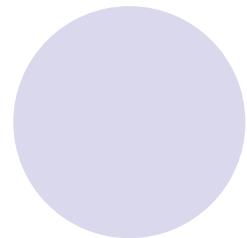
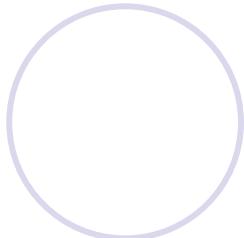
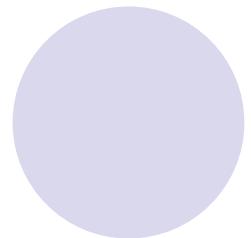
## AQL – prihvatljiva razina kvalitete (Acceptable Quality Level)

- AQL je najznačajniji i najčešće navođen ugovorni zahtjev na kvalitetu.
- AQL je, s gledišta dobavljača, najveći postotak nesukladnosti škarta) koji se može prihvatiti kao zadovoljavajući prosjek procesa.
- Ukoliko dobavljačev proces proizvodnje daje škart koji je veći od AQL-a tada nije moguće udovoljiti kupčevom zahtjevu na kvalitetu.
- Nedostatak AQL-a je u tome što je njegova vrijednost uvijek veća od nule.



## **LQ – granična kvaliteta (Limiting Quality)**

- LQ je razina kvalitete značajno lošija od prihvatljive (AQL).
- LQ se definira na razini vjerojatnosti prihvaćanja isporuke od 5 % ili 10 %.
- LQ ima određen značaj samo u slučaju kontrole radi prihvaćanja pojedinačnih isporuka.



### **$\alpha$ - rizik**

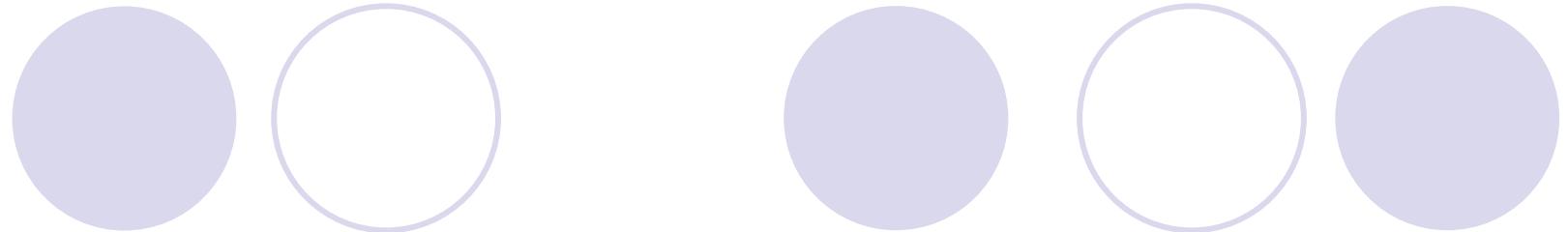
$\alpha$  - rizik je rizik dobavljača da će mu dobra isporuka (isporuka koja sadržava postotak škarta koji je jednak AQL) biti odbijena.

$\alpha$  - rizik se računa za postotak škarta koji je jednak AQL-u.

### **$\beta$ - rizik**

$\beta$  - rizik je rizik kupca da prihvati isporuku značajno lošije kvalitete od zahtijevane.

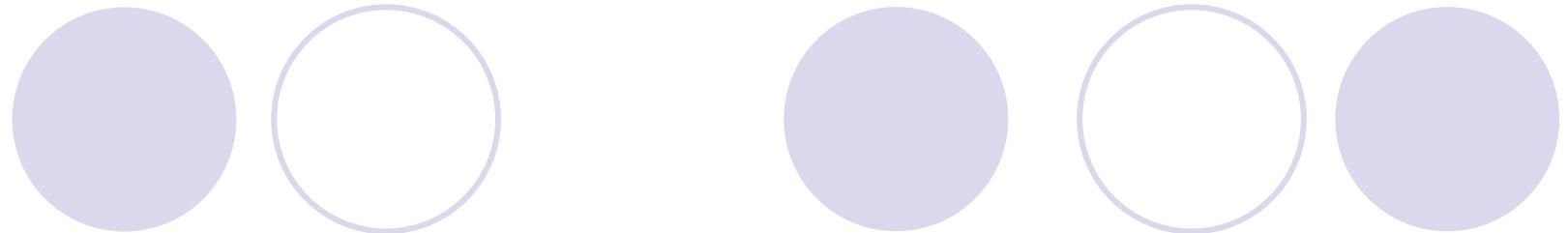
$\beta$  - rizik se računa za postotak škarta koji je jednak QL-u. (U pravilu, QL se određuje temeljem  $\beta$  - rizika koji je na razini od 5 % ili 10 %).



## KRIVULJA PROSJEČNE IZLAZNE KVALITETE

### AOQ – prosječna izlazna kvaliteta (Average Outgoing Quality)

- AOQ je prosječan postotak škarta na ulaznom skladištu. (Na ulazno skladište odlaze isporuke nakon provedenog uzorkovanja).
- AQL ima smisla razmatrati u slučaju dovoljno velikog broja isporuka.

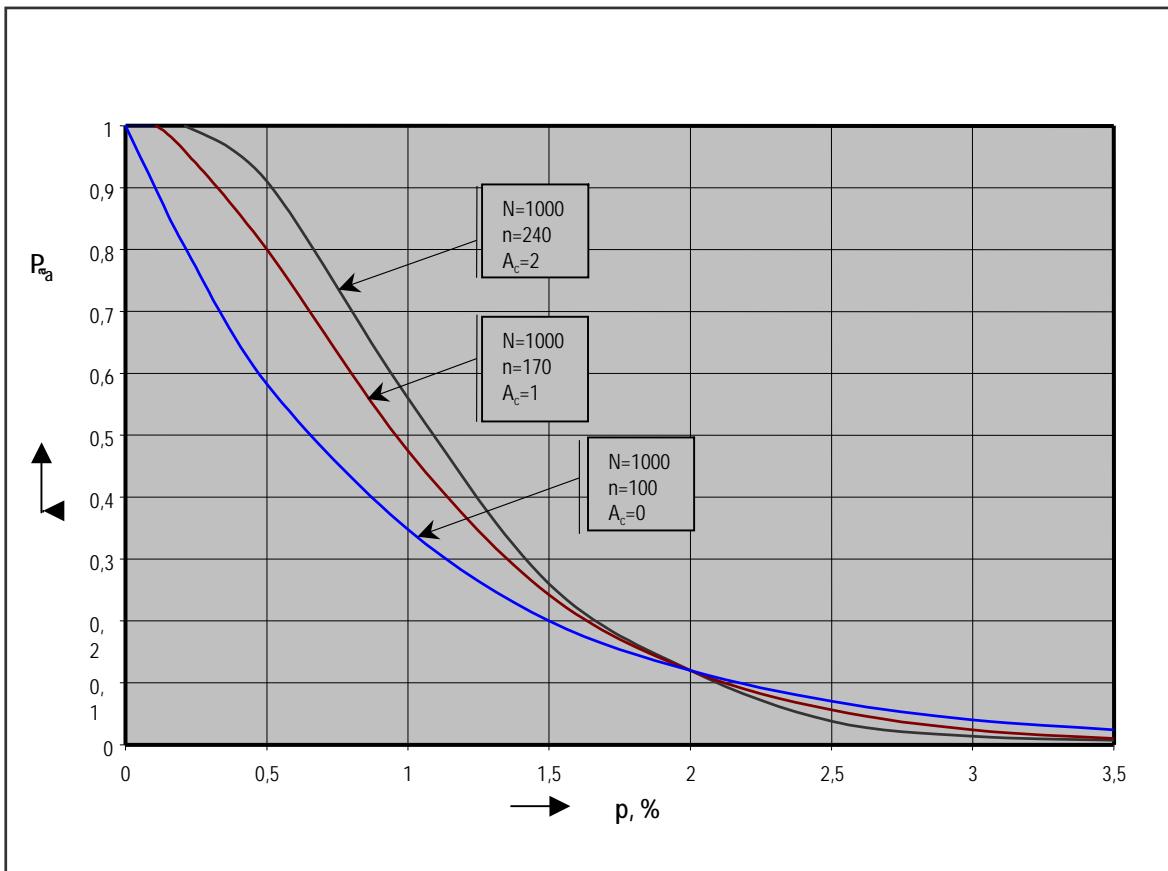


## **AOQL – granična vrijednost prosječne izlazne kvalitete (Average Outgoing Quality Limit)**

- AOQL je najveći postotak škarta koji može biti na ulaznom skladištu nakon dovoljno velikog broja pristiglih isporuka.
- AOQL je uvijek veći od AQL-a.
- Često se u ugovorima zahtjev za kvalitetom iskazuje preko AOQL-a. Planovi uzorkovanja koji se temelje na AOQL vrijednostima su orijentirani u davanju povjerenja da prosječna prihvaćena kvaliteta "na duge staze" neće biti gora od zahtijevane AOQL vrijednosti.

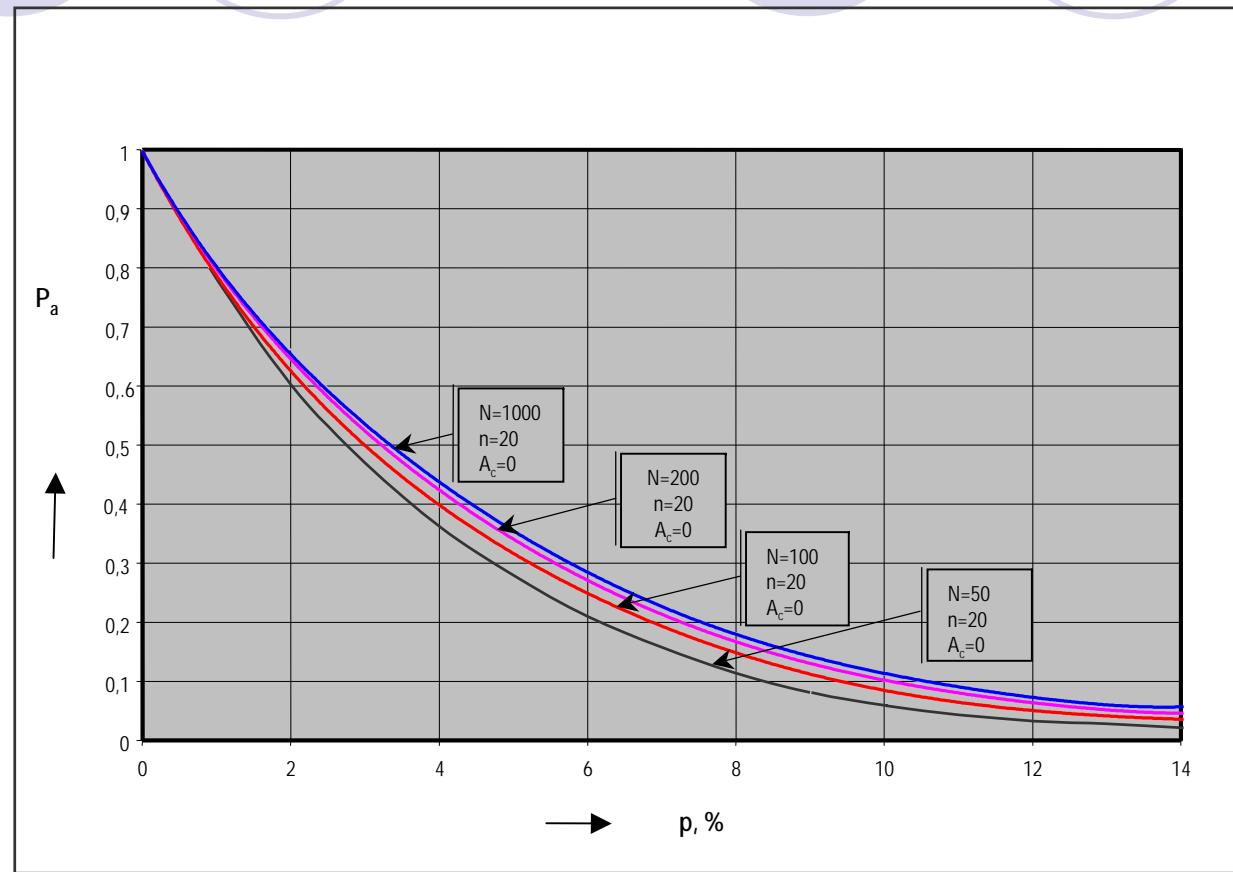
## PRIMJERI OPERATIVNIH KRIVULJA

AQL = 0,5 %  
LQ = 2,0 %



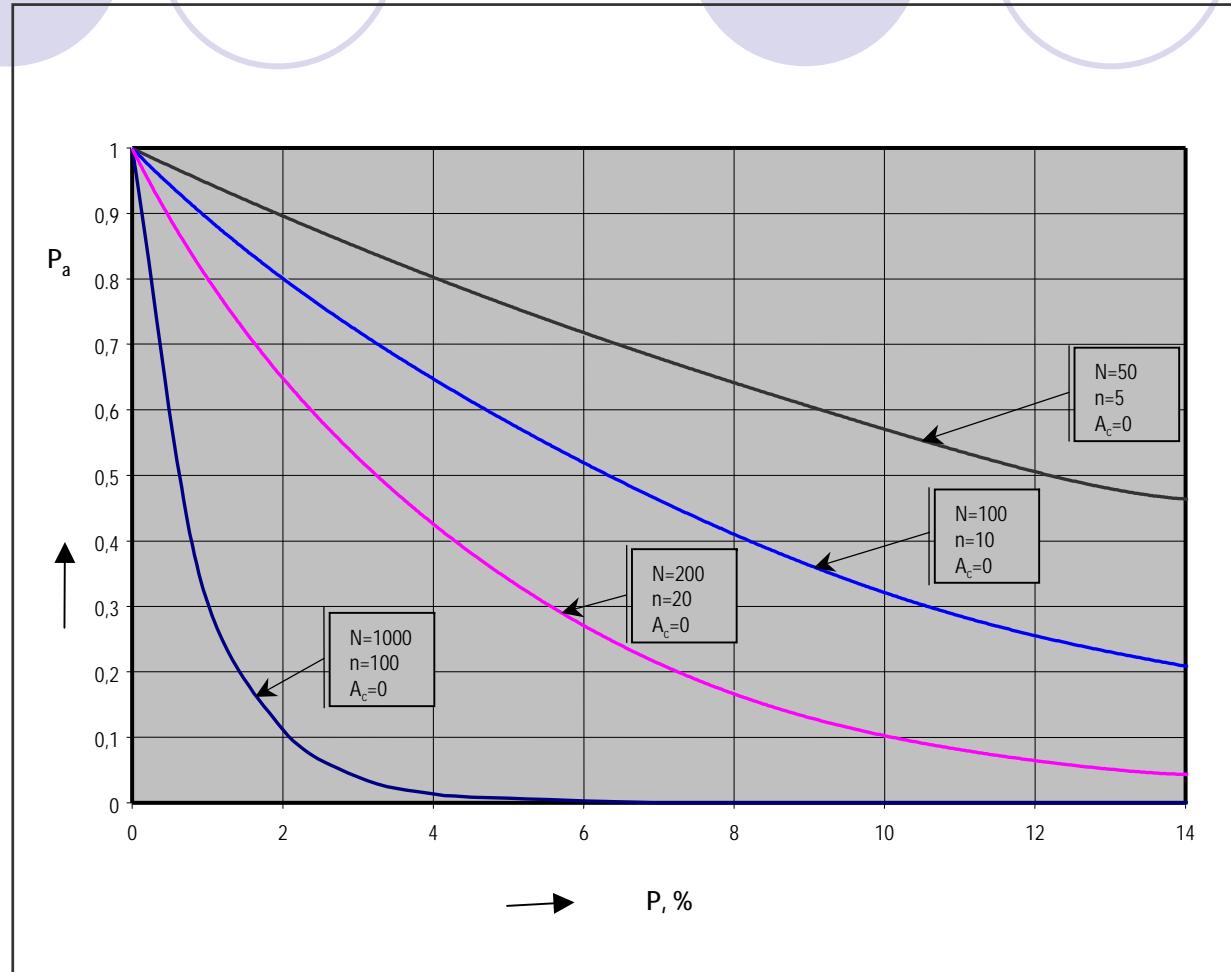
- Veći uzorak je povoljniji za dobavljača (manji  $\alpha$  - rizik).
- Kada je  $A_c = 0$  operativna krivulja nema točku infleksije.

**n = 20**  
**Ac = 0**



- Zadržavanjem konstantne veličine uzorka n i broja za prihvatanje Ac, a promjenom veličine isporuke N, praktički nema promjena uvjeta za kupca i dobavljača.

$A_c = 0$   
 $N/n = 10$



- Promjenom veličine isporuke  $N$ , uz zadržavanje odnosa  $N/n$  konstantnim, drastično se mijenjaju i kupčeve i dobavljačeve pogodnosti (odgovarajući rizici).

## OCJENJIVANJE KVALITETE DOBAVLJAČA (INDEKSI KVALITETE)

Rezultate dobivene kontrolom uzoraka uzastopnih isporuka treba bilježiti i analizirati tijekom vremena.

Ti podaci, između ostalog, mogu dobro poslužiti u postupcima ocjenjivanja kvalitete dobavljača.

Planovi za atribute:

- Praćenje postotaka nesukladnih dijelova (ili broja grešaka) od isporuke do isporuke. Korisno je primijeniti  $p$  (loše jedinice) ili  $u$  u kontrolnu kartu (greške).
- Periodičkom analizom karata mogu se procijeniti indeksi sposobnosti procesa dobavljača ( $\bar{p}$  ili  $\bar{u}$ ), ili izračunati tzv. Bendix indeks kvalitete dobavljača.

Planovi za varijable:

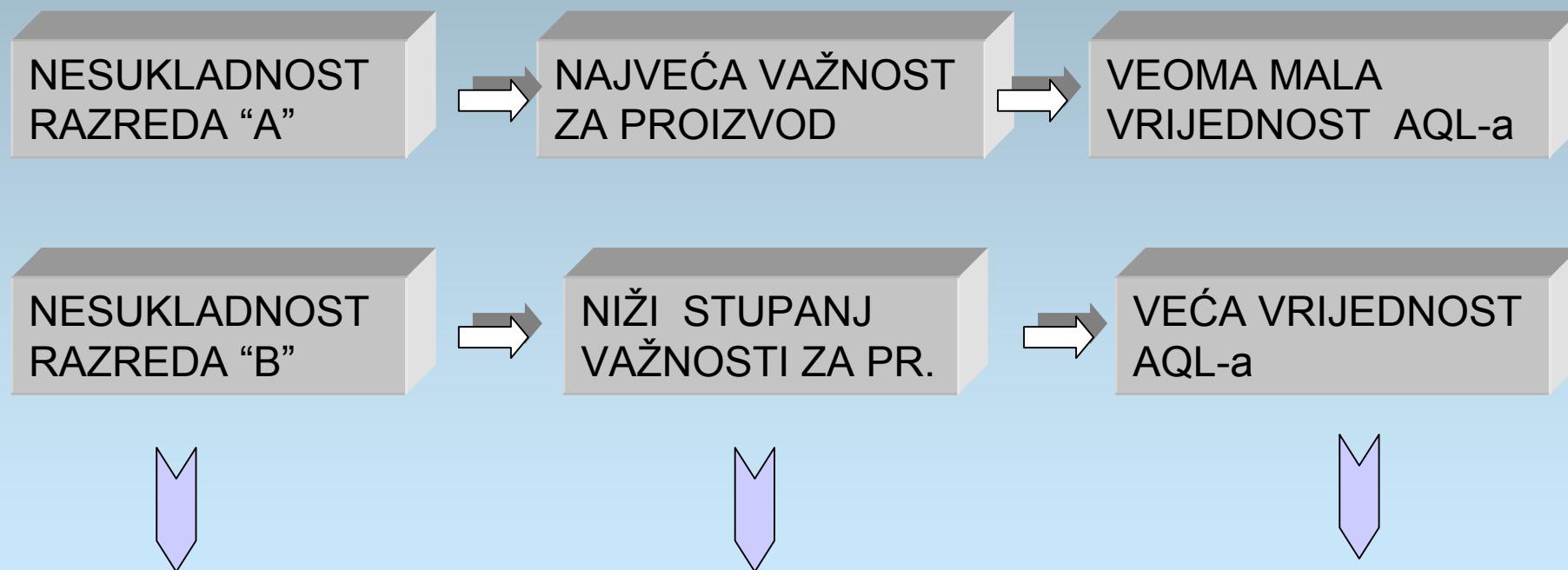
- Praćenje kretanja aritmetičkih sredina i standardnih odstupanja izmjera uzoraka. ( $\bar{x}$  – s kontrolna karta).
- Periodičkom analizom kontrolne karte može se vrlo pouzdano procijeniti sposobnost procesa dobavljača.

# PLANOVI PRIJEMA ZA ATTRIBUTIVNE KARAKTERISTIKE

## HRN ISO 2859-1

# NESUKLADNOSTI

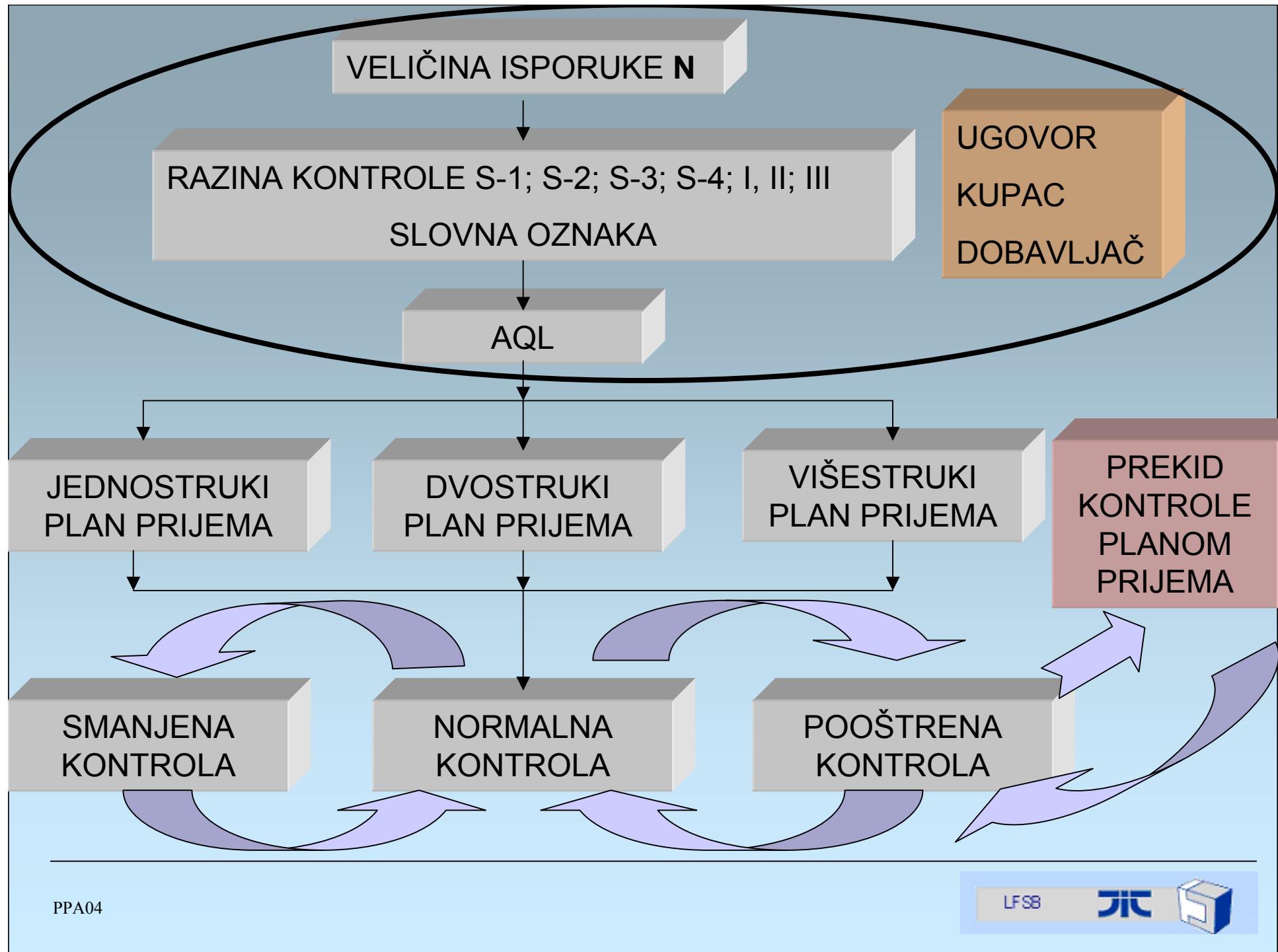
**NESUKLADNOST:** Odstupanje od značajke kvalitete čija je posljedica da proizvod, proces ili usluga ne odgovara određenim zahtjevima. Nesukladnosti se općenito razvrstavaju u razrede prema stupnju njihove ozbiljnosti.



**NESUKLADNA JEDINICA:** jedinica proizvoda ili usluge koja sadrži barem jednu nesukladnost. Nesukladne jedinice općenito se prema stupnju njihove ozbiljnosti razvrstavaju u razrede.

$$\text{POSTOTAK} \\ \text{NESUKLADNIH JEDINICA} = \frac{\text{BROJ NESUKLADNIH JEDINICA}}{\text{UKUPAN BROJ JEDINICA}} \times 100$$

$$\text{BROJ NESUKLADNOSTI} \\ \text{NA STO JEDINICA} = \frac{\text{BROJ NESUKLADNOSTI}}{\text{UKUPAN BROJ JEDINICA}} \times 100$$



## POČETAK

- Prethodnih 10 isporuka prihvaćeno uobičajenim pregledom,
- Prethodnih 10 isporuka prihvaćeno s ukupnim brojem nesukladnih jedinica jednakim ili manjim od graničnog broja
- Proizvodnja je pod kontrolom,
- Odobreno od strane ocjenjivača

- 2 od 5 ili manje uzastopnih isporuka nije prihvaćeno

- 5 isporuka nije prihvaćeno pri strožem pregledu

## SMANJENA KONTROLA

- Isporuka nije prihvaćena,
- Isporuka je prihvaćena, ali broj nesukladnih jedinica leži između broja prihvatanja i odbijanja
- Proizvodnja nije pod kontrolom,
- Drugi uvjeti upozoravaju na potrebu prijelaza.

## NORMALNA KONTROLA

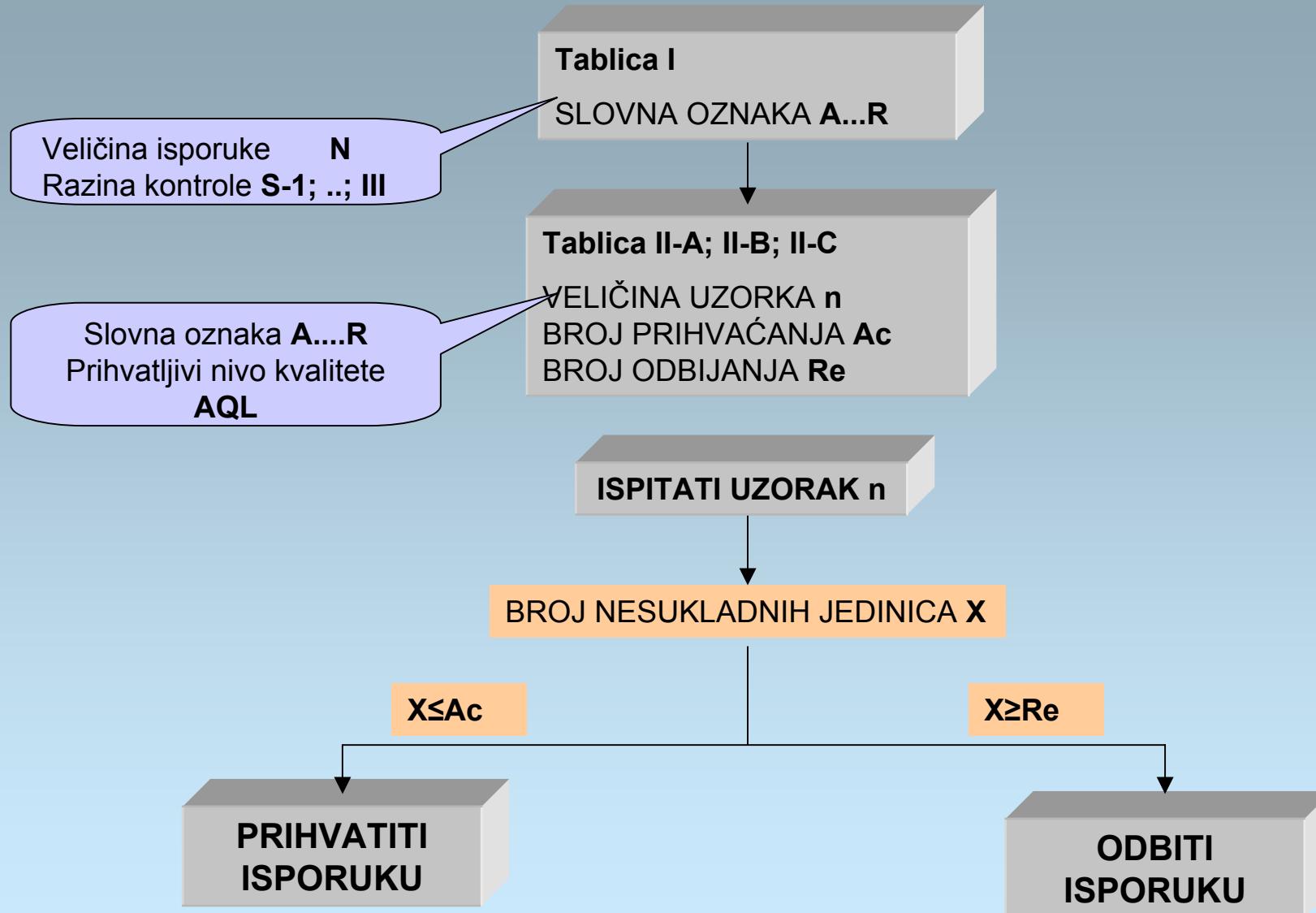
- 5 uzastopnih isporuka je prihvaćeno

## POOŠTRENA KONTROLA

## PREKID KONTROLE PLANOM PRIJEMA

- Dobavljač poboljšao kvalitetu

# JEDNOSTRUKI PLAN PRIJEMA



# DVOSTRUKI PLAN PRIJEMA

Veličina isporuke **N**  
Razina kontrole **S-1; ..; III**

Slovna oznaka **A....R**  
Prihvatljivi nivo kvalitete  
**AQL**

**Tablica I**  
SLOVNA OZNAKA A...R

**Tablica III-A; III-B; III-C**  
VELIČINA PRVOG UZORKA  $n_1$ ,  
VELIČINA DRUGOG UZORKA  $n_2$ ,  
BROJ PRIHVAĆANJA  $Ac_1$ ,  
BROJ ODBIJANJA  $Re_1$ ,  
BROJ PRIHVAĆANJA  $Ac_2$ ,  
BROJ ODBIJANJA  $Re_2$

**ISPITATI UZORAK  $n_1$**

$X \leq Ac_1$

BROJ NESUKLADNIH JEDINICA  $X$

$X \geq Re_1$

$Ac_1 < X < Re_1$

**ISPITATI UZORAK  $n_2$**

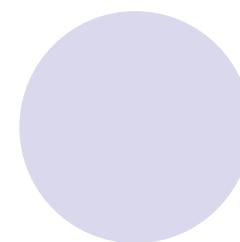
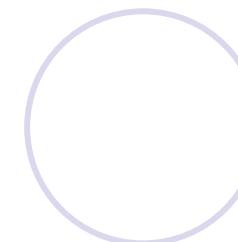
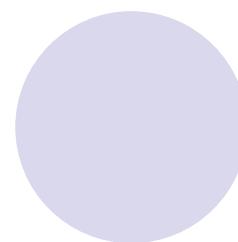
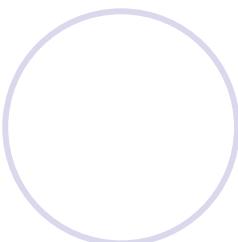
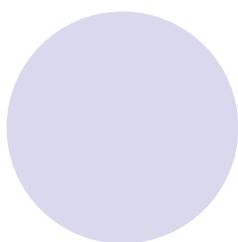
$Y \leq Ac_2$

$Y \geq Re_2$

BROJ NESUKLADNIH JEDINICA U OBA UZORKA  $Y$

**PRIHVATITI  
ISPORUKU**

**ODBITI  
ISPORUKU**

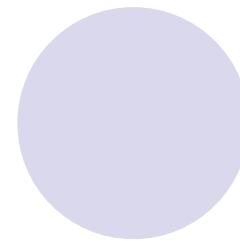
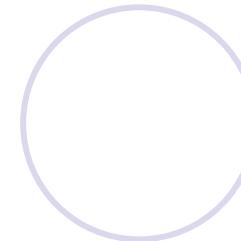
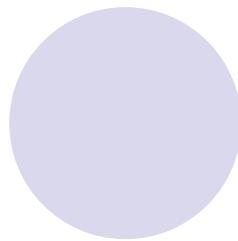
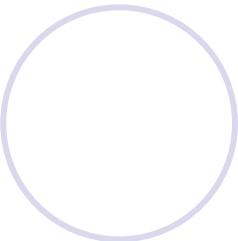
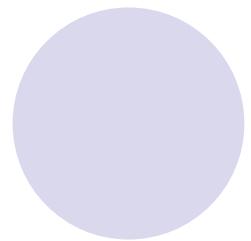


**SLOVNE  
OZNAKE**

Tabela I – Slovne oznake veličine uzorka ( $\times 10.1 + 10.2$ )

| Veličina partije   | Posebne raznine pregleda |     |     |     | Opće raznine pregleda |    |     |
|--------------------|--------------------------|-----|-----|-----|-----------------------|----|-----|
|                    | S-1                      | S-2 | S-3 | S-4 | I                     | II | III |
| 2 do 8             | A                        | A   | A   | A   | A                     | A  | B   |
| 9 do 15            | A                        | A   | A   | A   | A                     | B  | C   |
| 16 do 25           | A                        | A   | B   | B   | B                     | C  | D   |
| 26 do 50           | A                        | B   | B   | C   | C                     | D  | E   |
| 51 do 90           | B                        | B   | C   | C   | C                     | E  | F   |
| 91 do 150          | B                        | B   | C   | D   | D                     | F  | G   |
| 151 do 200         | B                        | C   | D   | E   | E                     | G  | H   |
| 201 do 500         | B                        | C   | D   | E   | F                     | H  | J   |
| 501 do 1 200       | C                        | C   | E   | F   | G                     | J  | K   |
| 1 201 do 3 200     | C                        | D   | E   | G   | H                     | K  | L   |
| 3 201 do 10 000    | C                        | D   | F   | G   | J                     | L  | M   |
| 10 001 do 35 000   | C                        | D   | F   | H   | K                     | M  | N   |
| 35 001 do 150 000  | D                        | E   | G   | J   | L                     | N  | P   |
| 150 001 do 500 000 | D                        | E   | G   | J   | M                     | P  | Q   |
| 500 001 i više     | D                        | E   | H   | K   | N                     | O  | R   |

Slovenski standard  
999-1-6992-O-51 MMH

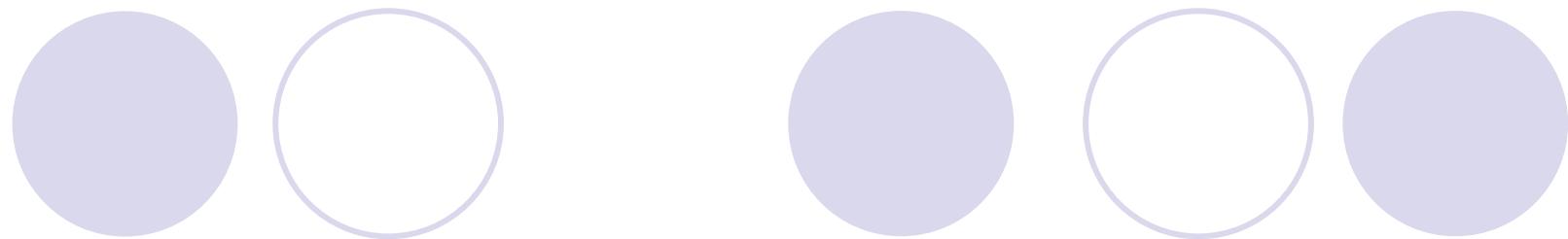


Tablica II-A – Planovi jednokratnog uzorkovanja za uobičajeni pregled (Glavna tablica) (v. 10.3 i 10.4)

| Slobona smanjiva<br>veličina<br>uzorkovanja<br>N | Veličina<br>uzorkovanja<br>n | Pishtavljive razine kakovode (uobičajeni pregled) |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |       |  |
|--|------------------------------|---|-------|-------|-------|-------|------|------|------|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-------|--|
|  |                              | 0,010   | 0,015 | 0,025 | 0,040 | 0,065 | 0,10 | 0,15 | 0,25 | 0,40 | 0,65 | 1,0 | 1,5 | 2,5 | 4,0 | 6,5 | 10 | 15 | 25 | 40 | 65 | 100 | 150 | 250 | 400 | 600 | 1.000 |  |
| Ac   | Re                           | Ac  | Re    | Ac    | Re    | Ac    | Re   | Ac   | Re   | Ac   | Re   | Ac  | Re  | Ac  | Re  | Ac  | Re | Ac | Re | Ac | Re | Ac  | Re  | Ac  | Re  | Ac  | Re    |  |
| A  | 2                            |   |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |       |  |
| B  | 3                            |   |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |       |  |
| C  | 5                            |   |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |       |  |
| D  | 8                            |   |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |       |  |
| E  | 13                           |   |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |       |  |
| F  | 20                           |   |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |       |  |
| G  | 32                           |   |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |       |  |
| H  | 60                           |   |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |       |  |
| J  | 90                           |   |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |       |  |
| K  | 125                          |   |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |       |  |
| L  | 200                          |   |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |       |  |
| M  | 315                          |   |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |       |  |
| N  | 500                          |   |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |       |  |
| P  | 800                          |   |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |       |  |
| Q  | 1.200                        | 0   | 1     |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |       |  |
| R  | 2.000                        |   |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |       |  |

= Uporijediti prvi plan uzorkovanja ispod strelice. Ako je veličina uzorka jednaka ili veća od veličine patlje provedi stopototni pregled.  
 = Uporijediti prvi plan uzorkovanja iznad strelice.  
 Ac = Broj prihvaćanja  
 Re = Broj odbijanja

**JEDNOKRAT UBIČAJEN**



Tablica II-C – Planovi jednokratnog uzorkovanja za blaži pregled (Glavna tablica) (v. 10.3 i 10.4)

| Sistem uzorkovanja<br>četvrtina<br>četvrtina | Broj uzorka | Primenjive razine kakovice (blaži pregled) † |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |       |  |
|--|-------------|--|-------|-------|-------|-------|------|------|------|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-------|--|
|  |             | 0,010  | 0,015 | 0,025 | 0,040 | 0,065 | 0,10 | 0,15 | 0,25 | 0,40 | 0,65 | 1,0 | 1,5 | 2,5 | 4,0 | 6,5 | 10 | 15 | 25 | 40 | 65 | 100 | 150 | 250 | 400 | 650 | 1.000 |  |
| Ac   | Re          | Ac   | Re    | Ac    | Re    | Ac    | Re   | Ac   | Re   | Ac   | Re   | Ac  | Re  | Ac  | Re  | Ac  | Re | Ac | Re | Ac | Re | Ac  | Re  | Ac  | Re  | Ac  | Re    |  |
| A  | 2           |  |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |       |  |
| B  | 2           |  |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |       |  |
| C  | 2           |  |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |       |  |
| D  | 3           |  |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |       |  |
| E  | 5           |  |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |       |  |
| F  | 8           |  |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |       |  |
| G  | 13          |  |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |       |  |
| H  | 20          |  |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |       |  |
| J  | 32          |  |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |       |  |
| K  | 50          |  |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |       |  |
| L  | 80          |  |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |       |  |
| M  | 125         |  |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |       |  |
| N  | 200         |  |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |       |  |
| P  | 315         |  |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |       |  |
| Q  | 500         | 0  | 1     |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |       |  |
| R  | 800         |  |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    |    |    |    |     |     |     |     |     |       |  |

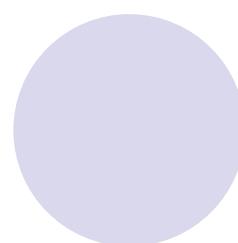
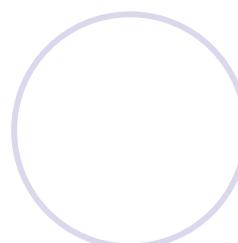
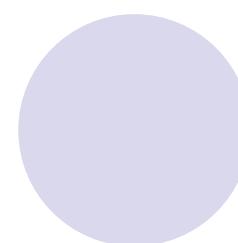
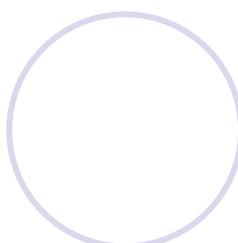
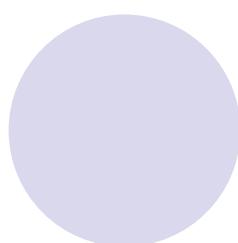
↓ = Upotrebiti prvi plan uzorkovanja ispod strelice. Ako je veličina uzorka jednaka ili veća od veličine partije provesti slopošteni pregled.

↑ = Upotrebiti prvi plan uzorkovanja iznad strelice.

Ac = Broj primicanja.

Re = Broj odbijanja.

† = Ako je nekorešten broj primicanja, a broj odbijanja nije dosegnut, povezati partiju i prijeti na uobičajeni pregled (v. 11.1.4).



## JEDNOKRATNO UZORKOVANJE STROŽI PREGLED

Tablica II-B – Planovi jednokratnog uzorkovanja za stroži pregled (Glavna tablica) (v. 10.3 i 10.4)

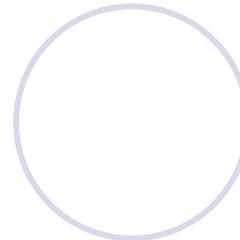
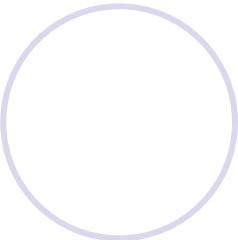
| Nomer uzorkovanja | Uzorkovanje | Prilazne razlike kalkvoće (stroži pregled) |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    |     |     |     |     |     |       |       |       |       |       |
|-------------------|-------------|--|-------|-------|-------|-------|------|------|------|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-------|-------|-------|-------|-------|
|                   |             | 0,010                                      | 0,015 | 0,025 | 0,040 | 0,065 | 0,10 | 0,15 | 0,25 | 0,40 | 0,65 | 1,0 | 1,5 | 2,5 | 4,0 | 6,5 | 10 | 15 | 25  | 40  | 65  | 100 | 150 | 250   | 400   | 650   | 1.000 |       |
| Ac                | Re          | Ac   | Re    | Ac    | Re    | Ac    | Re   | Ac   | Re   | Ac   | Re   | Ac  | Re  | Ac  | Re  | Ac  | Re | Ac | Re  | Ac  | Re  | Ac  | Re  | Ac    | Re    | Ac    | Re    |       |
| A                 | 2           |  |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    |     | 1,2 | 2,3 | 3,4 | 5,6 | 8,9   | 12,13 | 18,19 | 27,28 |       |
| B                 | 3           |  |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    | 1,2 | 2,3 | 3,4 | 5,6 | 8,9 | 12,13 | 18,19 | 27,28 | 41,42 |       |
| C                 | 5           |  |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    | 1,2 | 2,3 | 3,4 | 5,6 | 8,9 | 12,13 | 18,19 | 27,28 | 41,42 |       |
| D                 | 8           |  |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    | 0,1 | 1,2 | 2,3 | 3,4 | 5,6 | 8,9   | 12,13 | 18,19 | 27,28 | 41,42 |
| E                 | 13          |  |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    | 0,1 | 1,2 | 2,3 | 3,4 | 5,6 | 8,9   | 12,13 | 18,19 | 27,28 | 41,42 |
| F                 | 20          |  |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    | 0,1 | 1,2 | 2,3 | 3,4 | 5,6 | 8,9   | 12,13 | 18,19 | 27,28 | 41,42 |
| G                 | 32          |  |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    | 0,1 | 1,2 | 2,3 | 3,4 | 5,6 | 8,9   | 12,13 | 18,19 | 27,28 | 41,42 |
| H                 | 50          |  |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    | 0,1 | 1,2 | 2,3 | 3,4 | 5,6 | 8,9   | 12,13 | 18,19 | 27,28 | 41,42 |
| I                 | 80          |  |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    | 0,1 | 1,2 | 2,3 | 3,4 | 5,6 | 8,9   | 12,13 | 18,19 | 27,28 | 41,42 |
| K                 | 125         |  |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    | 0,1 | 1,2 | 2,3 | 3,4 | 5,6 | 8,9   | 12,13 | 18,19 | 27,28 | 41,42 |
| L                 | 200         |  |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    | 0,1 | 1,2 | 2,3 | 3,4 | 5,6 | 8,9   | 12,13 | 18,19 | 27,28 | 41,42 |
| M                 | 315         |  |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    | 0,1 | 1,2 | 2,3 | 3,4 | 5,6 | 8,9   | 12,13 | 18,19 | 27,28 | 41,42 |
| N                 | 500         |  |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    | 0,1 | 1,2 | 2,3 | 3,4 | 5,6 | 8,9   | 12,13 | 18,19 | 27,28 | 41,42 |
| P                 | 800         |  |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    | 0,1 | 1,2 | 2,3 | 3,4 | 5,6 | 8,9   | 12,13 | 18,19 | 27,28 | 41,42 |
| Q                 | 1.250       |  |       |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    | 0,1 | 1,2 | 2,3 | 3,4 | 5,6 | 8,9   | 12,13 | 18,19 | 27,28 | 41,42 |
| R                 | 2.000       | 0,1  | 0,1   |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    | 1,2 | 2,3 | 3,4 | 5,6 | 8,9 | 12,13 | 18,19 | 27,28 | 41,42 |       |
| S                 | 3.150       |  | 1,2   |       |       |       |      |      |      |      |      |     |     |     |     |     |    |    | 1,2 | 2,3 | 3,4 | 5,6 | 8,9 | 12,13 | 18,19 | 27,28 | 41,42 |       |

↓ = Upotrijebiti pri planu uzorkovanja ispod strelice. Ako je duljina uzorka jednaka ili veća od veličine partije provesti stopostotni pregled.

↑ = Upotrijebiti pri planu uzorkovanja iznad strelice.

Ac = Broj prihvatanja

Re = Broj odbijanja



Tablica V-A - Približne granične vrijednosti prosječne izlazne kakvoće za uobičajeni pregled (jednokratno uzorkovanje) (v. 12.4)

Santos JZ  
HNN ISO 2559-1:1996

# PRIBLIŽNE GRANIČNE VRIJEDNOSTI PROSJEČNE IZLAZNE KVALITETE AOQL

$$AOQL = k \cdot \left( 1 - \frac{\text{VELIČINA UZORKA}}{\text{VELIČINA ISPORUKE}} \right)$$

k – iz tablica za jednostruki plan prijema

**Tablica V-A** : normalnu kontrolu

**Tablica V-B** : pooštrenu kontrolu

# OPERATIVNA KRIVULJA PLANA PRIJEMA ZA ATRIBUTIVNE KARAKTERISTIKE

Binomna razdioba:  $B\{n ; p\}$

Funkcija vjerojatnosti:

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x}$$

Rekurzivna formula:

$$P(x) = \frac{n - x + 1}{x} \cdot \frac{p}{x} \cdot P(x - 1) ; P(0) = q^n$$

Poissonova razdioba:  $P\{m\}$

Funkcija vjerojatnosti:

$$P(x) = \frac{m^x}{x!} \cdot e^{-m} ; \quad m = n \cdot p \approx \text{konst}$$

Rekurzivna formula:

$$P(x) = \frac{m}{x} \cdot P(x-1) ; \quad P(0) = e^{-m}$$

Sa binomne na Poissonovu razdiobu prelazi se ako je:  $n \geq 20$ ,  $p \leq 0,05$  ili  $n \geq 100$ ,  $np \leq 10$ .

# **PLANOVI PRIJEMA ZA MJERLJIVE KARAKTERISTIKE**

## **ISO 3951**

## USPOREDBA PLANNOVA PRIJEMA ZA MJERLJIVE I ATRIBUTIVNE KARAKTERISTIKE

Uzorci su manji nego kod atributivnog ocjenjivanja za isto kodno slovo.

Nema dvostrukog i višestrukog uzorkovanja.

Nema koncepcije AOQ.

Mjerenje je zahtjevnije, a time i troškovi uzorkovanja veći.

Dobivaju se pouzdanije informacije o ispitivanoj karakteristici.

Postupak je ponekad teško razumljiv (isporuka se može odbaciti iako su sve mjere unutar dopuštenih odstupanja).

Poželjno je paralelno koristiti kontrolne karte za mjerljive karakteristike.

Uzorkovanje je složeno ukoliko treba mjeriti više značajki proizvoda (za svaku mjernu značajku treba primijeniti poseban plan prijema).

# PRIMJENA PLANOVA PRIJEMA ZA MJERLJIVE KARAKTERISTIKE

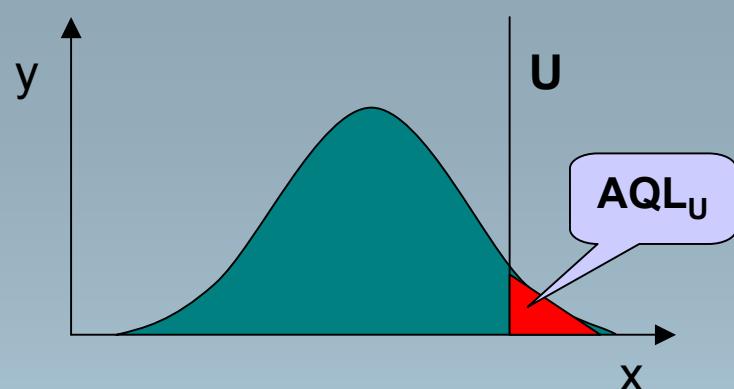
Kontinuirana proizvodnja u serijama u komadnoj proizvodnji.

Primjenjuju se na jednu mjerljivu karakteristiku x. Ako postoji više mjerljivih karakteristika svaka se tretira zasebno.

Koristi se kada je proizvodnja stabilna, a mjerljiva karakteristika x distribuirana je po normalnoj razdiobi.

Kada ugovor ili norma definira gornju granicu dopuštenih odstupanja U ili donju L ili obje granice dopuštenih odstupanja ( odvojeno ili povezano).

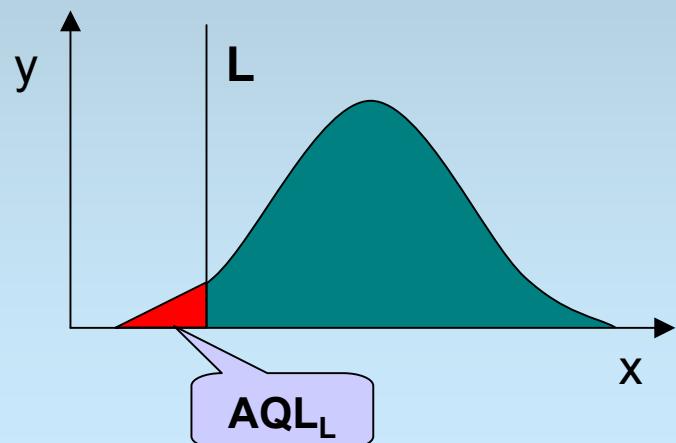
## ZADANA SAMO GORNJA GRANICA DOPUŠTENOG ODSTUPANJA



Poznato:  $AQL_U$

Škart:  $x > U$

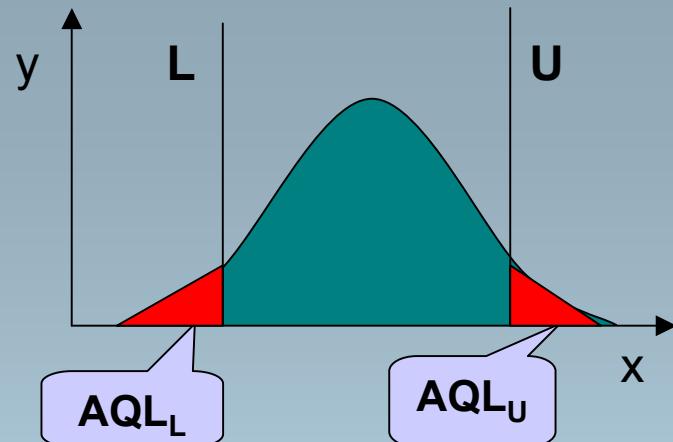
## ZADANA SAMO DONJA GRANICA DOPUŠTENOG ODSTUPANJA



Poznato:  $AQL_L$

Škart:  $x < L$

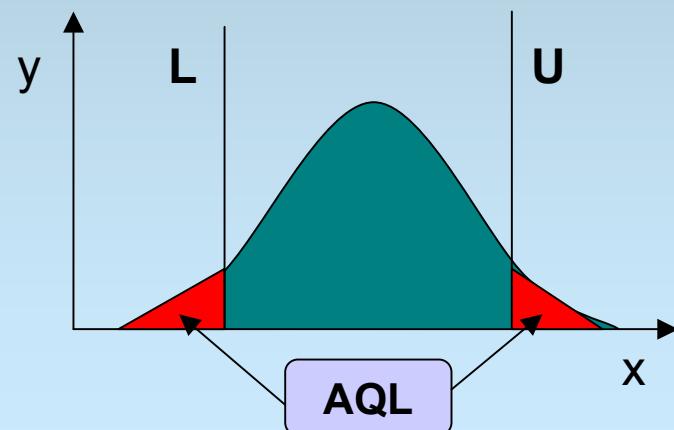
## ZADANE ODVOJENO GORNJA I DONJA GRANICA DOPUŠTENOG ODSTUPANJA



Poznato:  $AQL_U$  i  $AQL_L$

Škart:  $X > U$  ili  $X < L$

## ZADANE POVEZANO GORNJA I DONJA GRANICA DOPUŠTENOG ODSTUPANJA



Poznato:  $AQL$

Škart:  $X > U$  ili  $X < L$

# PRIMJENA PLANOVA PRIJEMA ZA MJERLJIVE KARAKTERISTIKE - METODE

**“s” metoda**



Prihvaćanje (odbijanje) donosi sa na temelju “s” i “ $\bar{x}$ ”

**“σ” metoda**



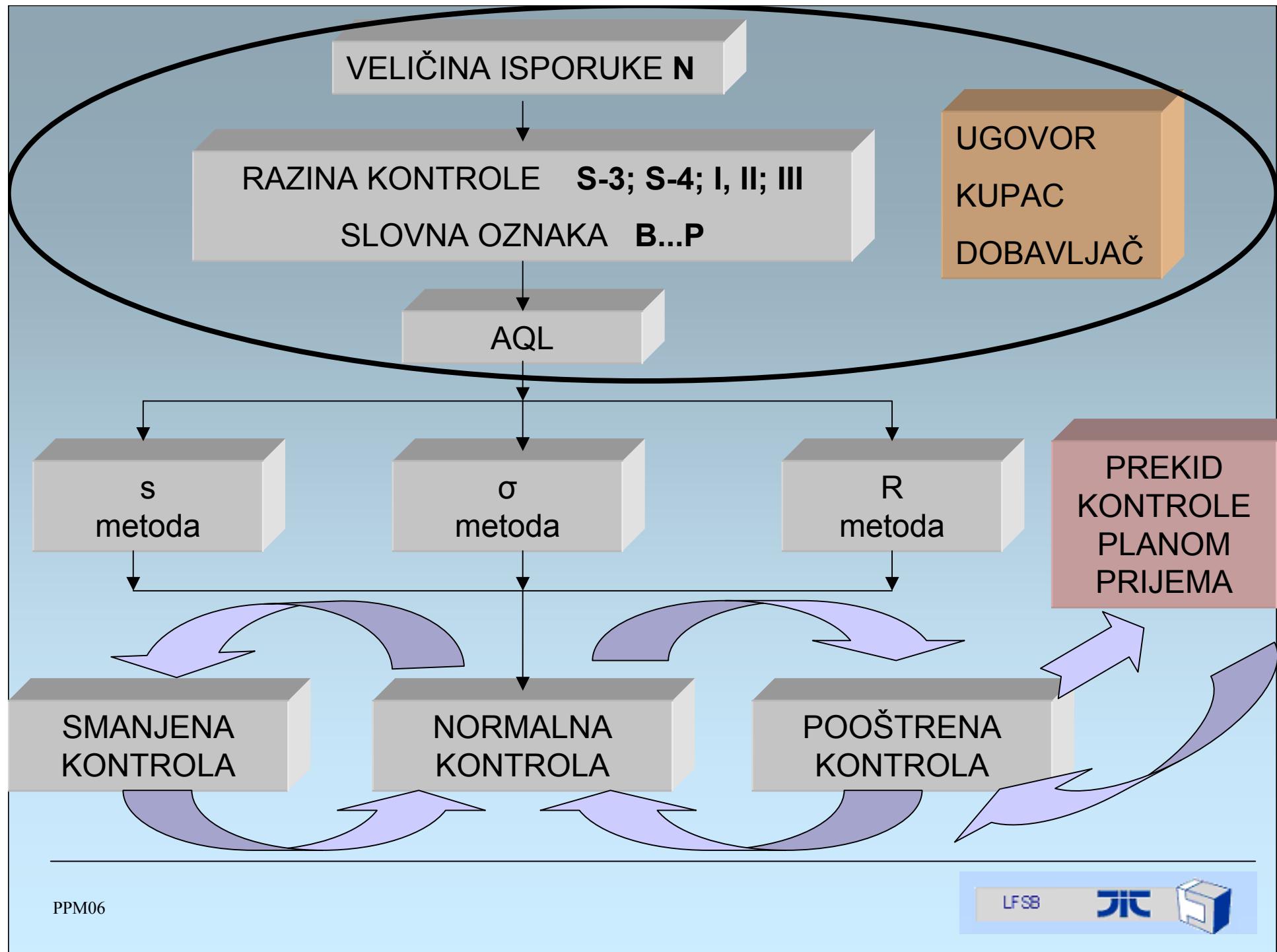
Prihvaćanje (odbijanje) donosi sa na temelju konstantnog “σ” i “ $\bar{x}$ ”

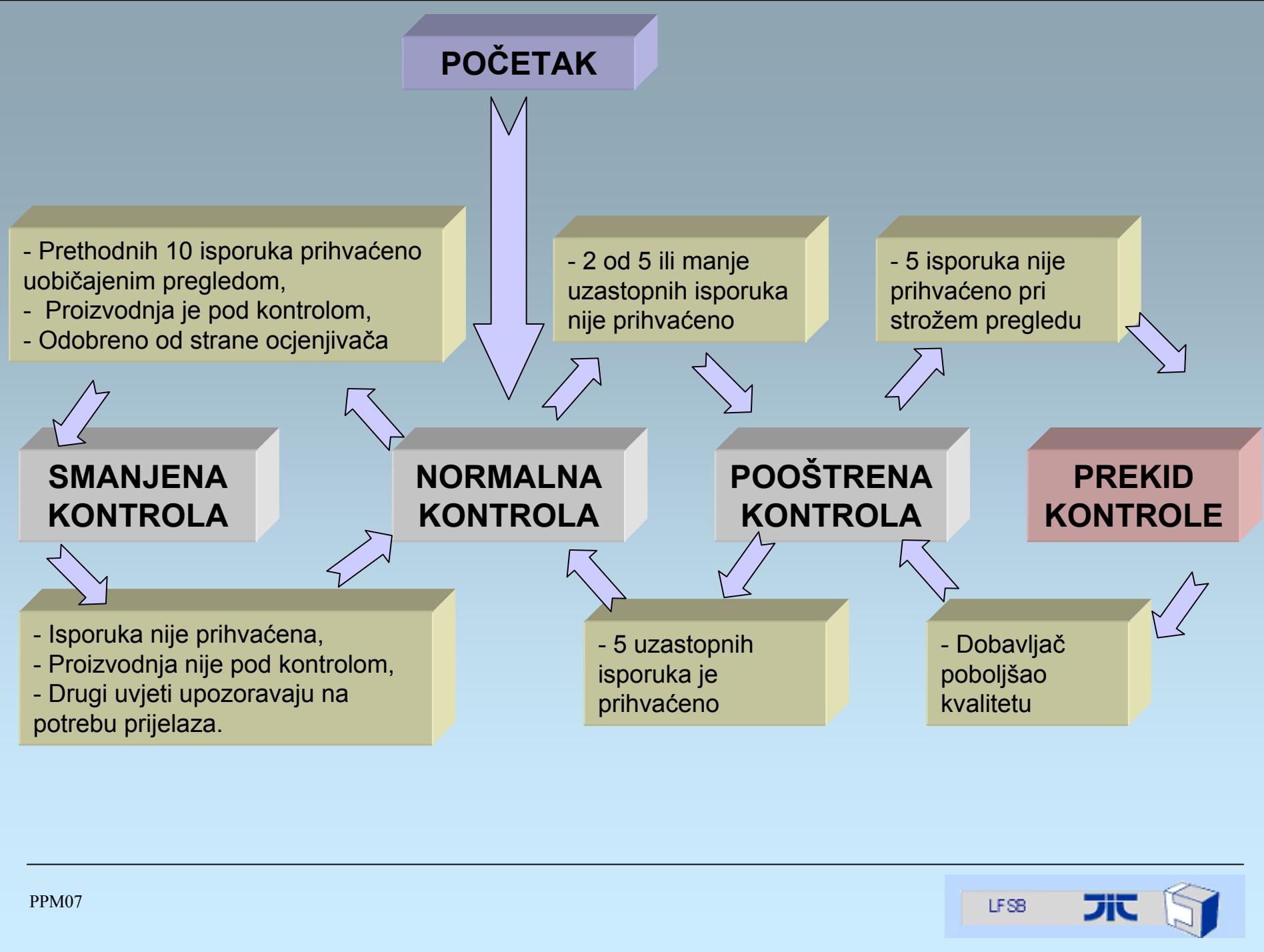
**“R” metoda**



Prihvaćanje (odbijanje) donosi sa na temelju prosječnog raspona “ R ” i “ $\bar{x}$  ”

Napomena: Prijem treba početi primjenom “s” ili “R” metode





## “s” METODA - POSTUPAK

UGOVOR  
KUPAC -  
DOBAVLJAČ

IZ TABLICA

NA TEMELJU  
REZULTATA  
MJERENJA  
UZORKA

- veličina isporuke **N**
- razina kontrole **S-3....III** (uobičajeno II)
- **AQL** (vrijednost iz tablice)

- slovna oznaka **B....P** (Tablica I-A)
- veličina uzorka **n** (Tablica I-B)
- konstanta prihvaćanja **k** (Tablica II-A; II-B II-C)

- $\bar{X}$ ;  $s$
- gornja statistička kvaliteta **Q<sub>U</sub>** (zadana gornja granica **U**)

$$Q_U = \frac{U - \bar{x}}{s}$$

- donja statistička kvaliteta **Q<sub>L</sub>** (zadana donja granica **L**)

$$Q_L = \frac{\bar{x} - L}{s}$$

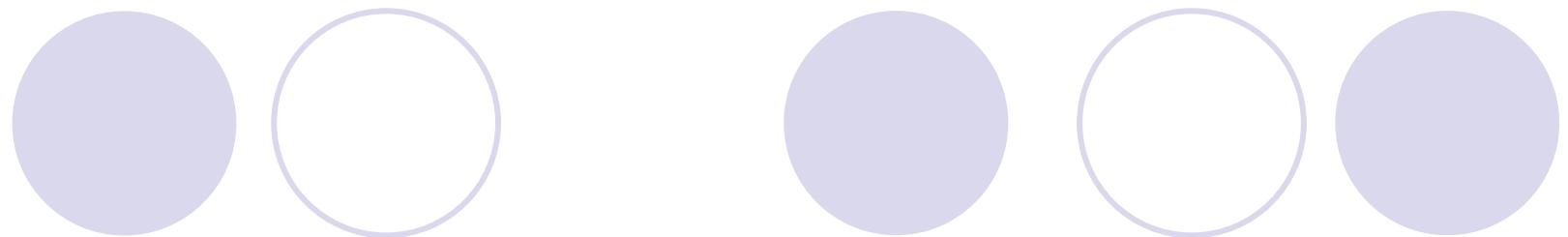
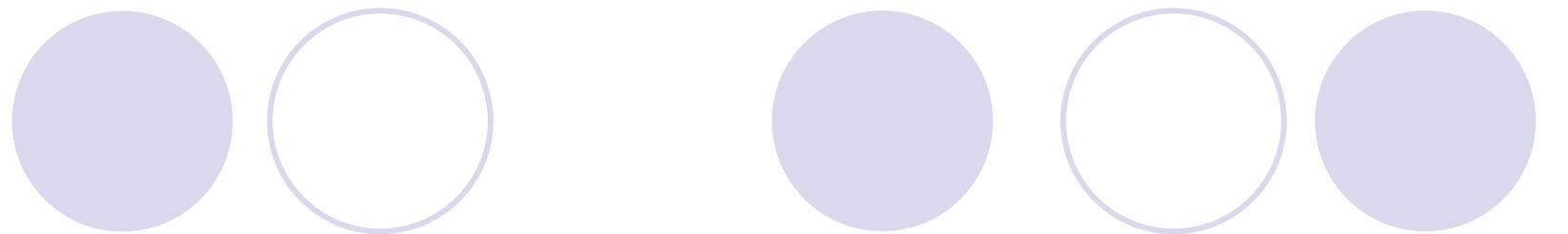


Table I-A – Code letters and inspection levels

| Lot or batch size  | Special inspection levels |     | General inspection levels |     |     |
|--------------------|---------------------------|-----|---------------------------|-----|-----|
|                    | S-3                       | S-4 | I                         | II  | III |
| 2 to 8             |                           |     |                           |     | C   |
| 9 to 15            |                           |     |                           | B   | D   |
| 16 to 25           |                           |     | B                         | C   | E   |
| 26 to 50           |                           |     | C                         | D   | F   |
| 51 to 90           |                           | B   | D                         | E   | G   |
| 91 to 150          |                           | C   | E                         | F   | H   |
| 151 to 280         | B                         | D   | F                         | G   | I   |
| 281 to 500         | C                         | E   | G                         | H/I | J   |
| 501 to 1 200       | D                         | F   | H                         | J   | K   |
| 1 201 to 3 200     | E                         | G   | I                         | K   | L   |
| 3 201 to 10 000    | F                         | H   | J                         | L   | M   |
| 10 001 to 35 000   | G                         | I   | K                         | M   | N   |
| 35 001 to 150 000  | H                         | J   | L                         | N   | P   |
| 150 001 to 500 000 | I                         | K   | M                         | P   |     |
| 500 001 and over   | J                         | L   | N                         |     | ↑   |

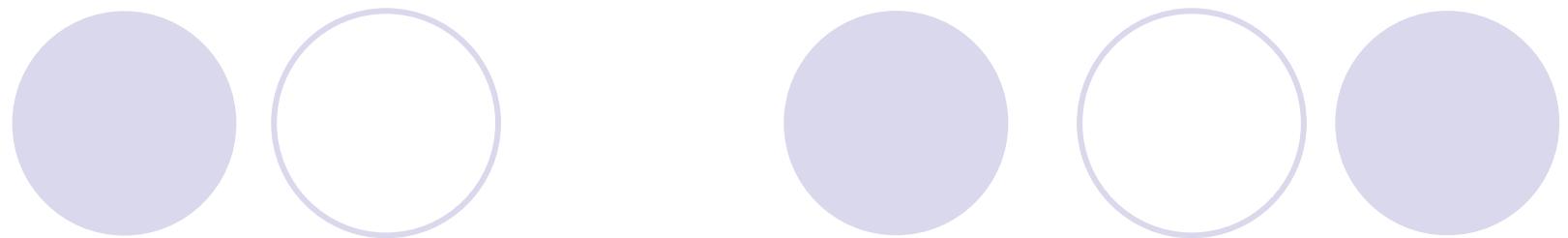
(\*) Use H for lot size 281 to 400 and I for lot size 401 to 500.



"s" method

Table II-A — Single sampling plans for normal inspection (master table) : "s" method

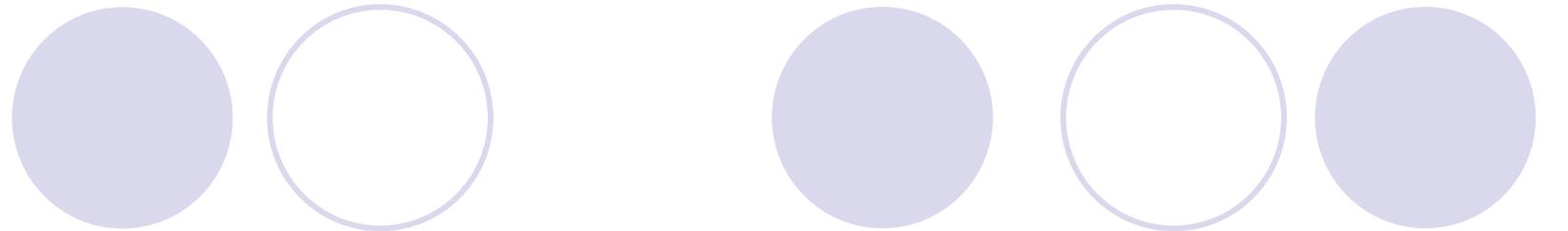
| Sample size code letter | Sample size | Acceptable quality level (normal inspection) |      |      |      |      |      |      |      |       |        |       |
|-------------------------|-------------|--|------|------|------|------|------|------|------|-------|--------|-------|
|                         |             | 0,10   | 0,15 | 0,25 | 0,40 | 0,65 | 1,00 | 1,50 | 2,50 | 4,00  | 6,50   | 10,00 |
|                         |             | k  | k    | k    | k    | k    | k    | k    | k    | k     | k      |       |
| B                       | 3           |  |      |      |      |      |      | 1,12 |      | 0,958 | 0,765  | 0,566 |
| C                       | 4           |  |      |      |      | 1,45 | 1,34 |      | 1,17 | 1,01  | 0,814  | 0,617 |
| D                       | 5           |  |      |      | 1,65 | 1,53 | 1,40 | 1,24 | 1,07 | 0,874 | 0,675  |       |
| E                       | 7           |  |      | 2,00 | 1,88 | 1,75 | 1,62 | 1,50 | 1,33 | 1,15  | 0,955  | 0,755 |
| F                       | 10          | 2,24   | 2,11 | 1,98 | 1,84 | 1,72 | 1,58 | 1,41 | 1,23 | 1,03  | 0,828  |       |
| G                       | 15          | 2,42   | 2,32 | 2,20 | 2,06 | 1,91 | 1,79 | 1,65 | 1,47 | 1,30  | + 1,09 | 0,886 |
| H                       | 20          | 2,47   | 2,36 | 2,24 | 2,11 | 1,96 | 1,82 | 1,69 | 1,51 | 1,33  | 1,12   | 0,917 |
| I                       | 25          | 2,50   | 2,40 | 2,26 | 2,14 | 1,98 | 1,85 | 1,72 | 1,53 | 1,35  | 1,14   | 0,936 |
| J                       | 35          | 2,54   | 2,45 | 2,31 | 2,18 | 2,03 | 1,89 | 1,76 | 1,57 | 1,39  | 1,18   | 0,969 |
| K                       | 50          | 2,60   | 2,50 | 2,35 | 2,22 | 2,08 | 1,93 | 1,80 | 1,61 | 1,42  | 1,21   | 1,00  |
| L                       | 75          | 2,66   | 2,55 | 2,41 | 2,27 | 2,12 | 1,98 | 1,84 | 1,65 | 1,46  | 1,24   | 1,03  |
| M                       | 100         | 2,69   | 2,58 | 2,43 | 2,29 | 2,14 | 2,00 | 1,86 | 1,67 | 1,48  | 1,26   | 1,05  |
| N                       | 150         | 2,73   | 2,61 | 2,47 | 2,33 | 2,18 | 2,03 | 1,89 | 1,70 | 1,51  | 1,29   | 1,07  |
| P                       | 200         | 2,73   | 2,62 | 2,47 | 2,33 | 2,18 | 2,04 | 1,89 | 1,70 | 1,51  | 1,29   | 1,07  |



"s" method

Table II-B — Single sampling plans for tightened inspection (master table) : "s" method

| Sample size<br>code letter | Sample size | Acceptable quality levels (tightened inspection) |      |      |      |      |      |      |      |      |       |       |   |
|----------------------------|-------------|--|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|-------|---|
|                            |             | 0,10   | 0,15 | 0,25 | 0,40 | 0,65 | 1,00 | 1,50 | 2,50 | 4,00 | 6,50  | 10,00 |   |
|                            |             | k  | k    | k    | k    | k    | k    | k    | k    | k    | k     | k     | k |
| B                          | 3           |  |      |      |      |      |      |      |      | 1,12 | 0,958 | 0,765 |   |
| C                          | 4           |  |      |      |      |      |      |      |      | 1,17 | 1,01  | 0,814 |   |
| D                          | 5           |  |      |      |      |      |      |      | 1,40 | 1,24 | 1,07  | 0,874 |   |
| E                          | 7           |  |      |      | 2,00 | 1,88 | 1,75 | 1,62 | 1,50 | 1,33 | 1,15  | 0,955 |   |
| F                          | 10          |  |      | 2,24 | 2,11 | 1,98 | 1,84 | 1,72 | 1,58 | 1,41 | 1,23  | 1,03  |   |
| G                          | 15          | 2,53   | 2,42 | 2,32 | 2,20 | 2,06 | 1,91 | 1,79 | 1,65 | 1,47 | 1,30  | 1,09  |   |
| H                          | 20          | 2,58   | 2,47 | 2,36 | 2,24 | 2,11 | 1,96 | 1,82 | 1,69 | 1,51 | 1,33  | 1,12  |   |
| I                          | 25          | 2,61   | 2,50 | 2,40 | 2,26 | 2,14 | 1,98 | 1,85 | 1,72 | 1,53 | 1,35  | 1,14  |   |
| J                          | 35          | 2,65   | 2,54 | 2,45 | 2,31 | 2,18 | 2,03 | 1,89 | 1,76 | 1,57 | 1,39  | 1,18  |   |
| K                          | 50          | 2,71   | 2,60 | 2,50 | 2,35 | 2,22 | 2,08 | 1,93 | 1,80 | 1,61 | 1,42  | 1,21  |   |
| L                          | 75          | 2,77   | 2,66 | 2,55 | 2,41 | 2,27 | 2,12 | 1,98 | 1,84 | 1,65 | 1,46  | 1,24  |   |
| M                          | 100         | 2,80   | 2,69 | 2,58 | 2,43 | 2,29 | 2,14 | 2,00 | 1,86 | 1,67 | 1,48  | 1,26  |   |
| N                          | 150         | 2,84   | 2,73 | 2,61 | 2,47 | 2,33 | 2,18 | 2,03 | 1,89 | 1,70 | 1,51  | 1,23  |   |
| P                          | 200         | 2,85   | 2,73 | 2,62 | 2,47 | 2,33 | 2,18 | 2,04 | 1,89 | 1,70 | 1,51  | 1,29  |   |



"s" method

Table II-C – Single sampling plans for reduced inspection (master table) : "s" method

| Sample size<br>code letter | Sample size | Acceptable quality levels (reduced inspection) |      |      |      |      |      |      |       |       |       |       |
|----------------------------|-------------|--|------|------|------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|
|                            |             | 0,10   | 0,15 | 0,25 | 0,40 | 0,65 | 1,00 | 1,50 | 2,50  | 4,00  | 6,50  | 10,00 |
|                            |             | k  | k    | k    | k    | k    | k    | k    | k     | k     | k     | k     |
| B                          | 3           |  |      |      |      |      | 1,12 |      | 0,958 | 0,765 | 0,566 | 0,341 |
| C                          | 3           |  |      |      |      |      | 1,12 |      | 0,958 | 0,765 | 0,566 | 0,341 |
| D                          | 3           |  |      |      |      |      | 1,12 |      | 0,958 | 0,765 | 0,566 | 0,341 |
| E                          | 3           |  |      |      |      |      | 1,12 |      | 0,958 | 0,765 | 0,566 | 0,341 |
| F                          | 4           |  |      |      |      | 1,45 | 1,34 | 1,17 | 1,01  | 0,814 | 0,617 | 0,393 |
| G                          | 5           |  |      |      | 1,65 | 1,53 | 1,40 | 1,24 | 1,07  | 0,874 | 0,675 | 0,455 |
| H                          | 7           |  | 2,00 | 1,88 | 1,75 | 1,62 | 1,50 | 1,33 | 1,15  | 0,955 | 0,755 | 0,536 |
| I                          | 10          | 2,24   | 2,11 | 1,98 | 1,84 | 1,72 | 1,58 | 1,41 | 1,23  | 1,03  | 0,828 | 0,611 |
| J                          | 15          | 2,32   | 2,20 | 2,06 | 1,91 | 1,79 | 1,65 | 1,47 | 1,30  | 1,09  | 0,886 | 0,664 |
| K                          | 20          | 2,36   | 2,24 | 2,11 | 1,96 | 1,82 | 1,69 | 1,51 | 1,33  | 1,12  | 0,917 | 0,695 |
| L                          | 25          | 2,40   | 2,26 | 2,14 | 1,98 | 1,85 | 1,72 | 1,53 | 1,35  | 1,14  | 0,936 | 0,712 |
| M                          | 35          | 2,45   | 2,31 | 2,18 | 2,03 | 1,89 | 1,76 | 1,57 | 1,39  | 1,18  | 0,969 | 0,745 |
| N                          | 50          | 2,50   | 2,35 | 2,22 | 2,08 | 1,93 | 1,80 | 1,61 | 1,42  | 1,21  | 1,00  | 0,774 |
| P                          | 75          | 2,55   | 2,41 | 2,27 | 2,12 | 1,98 | 1,84 | 1,65 | 1,46  | 1,24  | 1,03  | 0,804 |

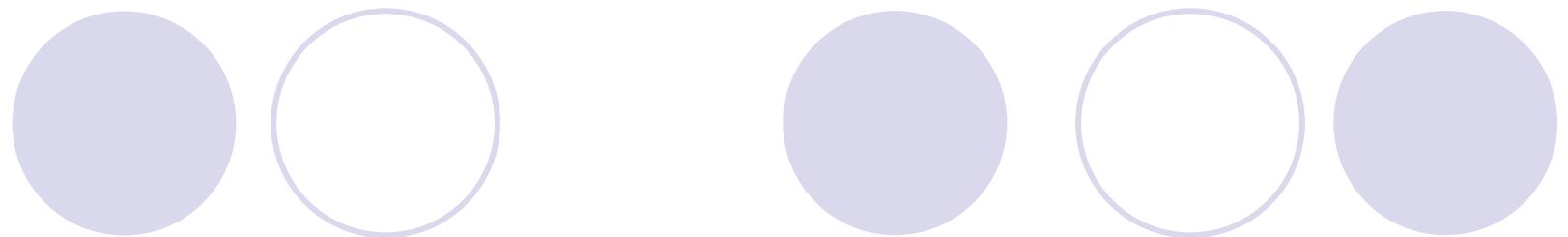


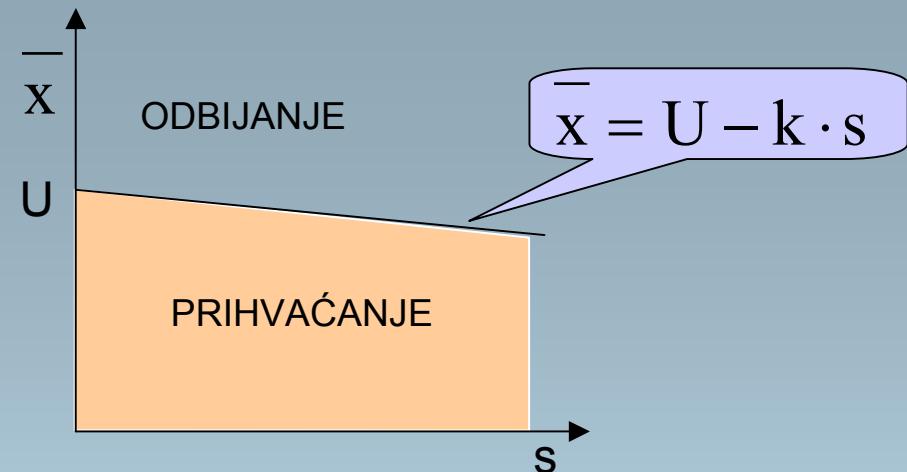
Table IV — Values of  $f$  for maximum standard deviation (MSD) : "s" method

| Sample size | Acceptable quality levels (normal inspection)    |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------------|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|             |  | 0,10  | 0,15  | 0,25  | 0,40  | 0,65  | 1,00  | 1,50  | 2,50  | 4,00  | 6,50  | 10,00 |
| 3           |  |       |       |       |       |       |       |       | 0,436 | 0,453 | 0,475 | 0,502 |
| 4           |  |       |       |       |       |       | 0,339 | 0,353 | 0,374 | 0,399 | 0,432 | 0,472 |
| 5           |  |       |       |       |       | 0,294 | 0,308 | 0,323 | 0,346 | 0,372 | 0,408 | 0,452 |
| 7           |  |       |       | 0,242 | 0,253 | 0,266 | 0,280 | 0,295 | 0,318 | 0,345 | 0,381 | 0,425 |
| 10          |  |       | 0,214 | 0,224 | 0,235 | 0,248 | 0,261 | 0,276 | 0,298 | 0,324 | 0,359 | 0,403 |
| 15          | 0,188  | 0,195 | 0,202 | 0,211 | 0,222 | 0,235 | 0,248 | 0,262 | 0,284 | 0,309 | 0,344 | 0,386 |
| 20          | 0,183  | 0,190 | 0,197 | 0,206 | 0,216 | 0,229 | 0,242 | 0,255 | 0,277 | 0,302 | 0,336 | 0,377 |
| 25          | 0,180  | 0,187 | 0,193 | 0,203 | 0,212 | 0,225 | 0,238 | 0,251 | 0,273 | 0,297 | 0,331 | 0,372 |
| 35          | 0,176  | 0,183 | 0,189 | 0,198 | 0,208 | 0,220 | 0,232 | 0,245 | 0,266 | 0,291 | 0,323 | 0,364 |
| 50          | 0,172  | 0,178 | 0,184 | 0,194 | 0,203 | 0,214 | 0,227 | 0,241 | 0,261 | 0,284 | 0,317 | 0,356 |
| 75          | 0,168  | 0,174 | 0,181 | 0,189 | 0,199 | 0,211 | 0,223 | 0,235 | 0,255 | 0,279 | 0,310 | 0,348 |
| 100         | 0,166  | 0,172 | 0,179 | 0,187 | 0,197 | 0,208 | 0,220 | 0,233 | 0,253 | 0,276 | 0,307 | 0,345 |
| 150         | 0,163  | 0,170 | 0,175 | 0,185 | 0,193 | 0,206 | 0,216 | 0,230 | 0,249 | 0,271 | 0,302 | 0,341 |
| 200         | 0,163  | 0,168 | 0,175 | 0,183 | 0,193 | 0,203 | 0,215 | 0,228 | 0,248 | 0,269 | 0,302 | 0,338 |
|             | 0,10   | 0,15  | 0,25  | 0,40  | 0,65  | 1,00  | 1,50  | 2,50  | 4,00  | 6,50  | 10,00 |       |
|             | Acceptable quality levels (tightened inspection) |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|             |  | 0,10  | 0,15  | 0,25  | 0,40  | 0,65  | 1,00  | 1,50  | 2,50  | 4,00  | 6,50  | 10,00 |
|             | Acceptable quality levels (reduced inspection)   |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |

## ZADANA GORNJA GRANICA DOPUŠTENOG ODSTUPANJA

PRIJEM       $Q_u \geq k$

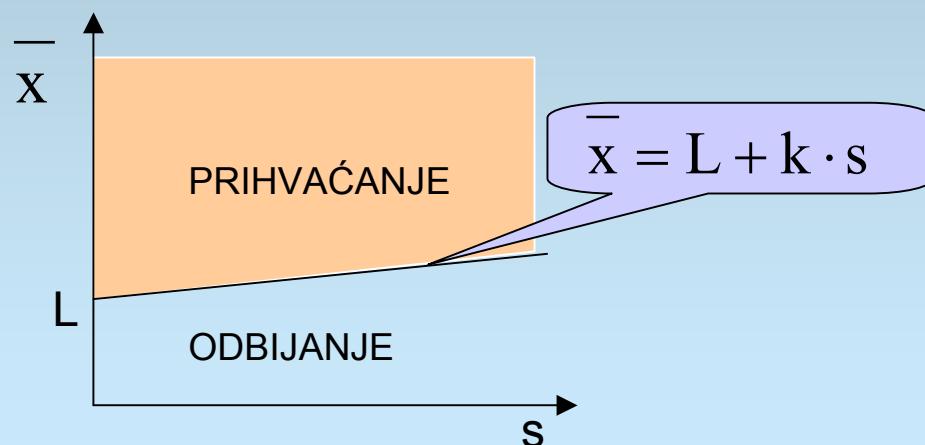
ODBIJANJE     $Q_u < k$



## ZADANA DONJA GRANICA DOPUŠTENOG ODSTUPANJA

PRIJEM       $Q_L \geq k$

ODBIJANJE     $Q_L < k$



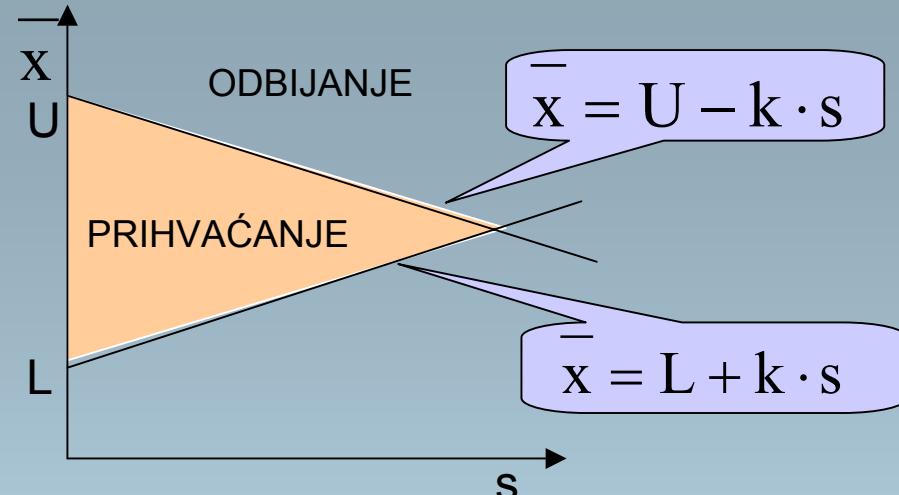
## ZADANA GORNJA I DONJA GRANICA DOPUŠTENOG ODSTUPANJA (nepovezane)

PRIJEM

$$Q_u \geq k \text{ i } Q_L \geq k$$

ODBIJANJE

$$Q_u < k \text{ ili } Q_L < k$$

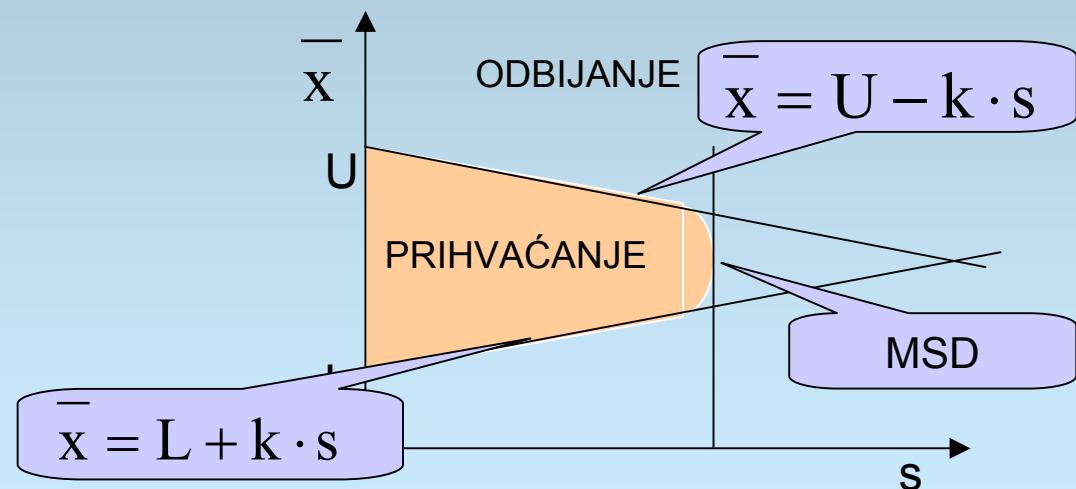


## ZADANA GORNJA I DONJA GRANICA DOPUŠTENOG ODSTUPANJA (povezane)

SAMO GRAFIČKO  
RJEŠENJE

Maksimalno standardno  
odstupanje uzorka **MSD**

$$MSD = f \cdot (U - L) \quad "f" \text{ iz tablice IV}$$

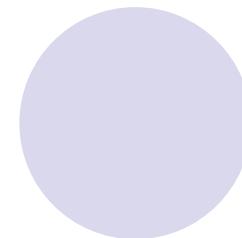
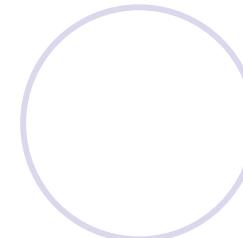
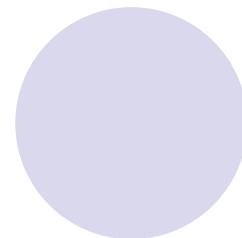
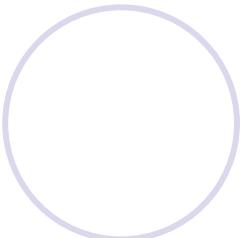
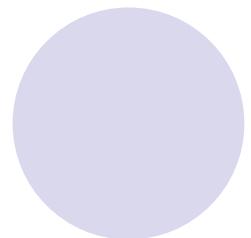


## KONTROLNE KARTE

Većina kontrolnih karata koje se danas primjenjuju u aktivnostima kontrole kvalitete nastala je u drugoj polovici dvadesetih godina prošlog stoljeća u laboratorijima *Bell Telephone Company*. Autor tih karata bio je **dr. Walter A. Shewhart**, koji je svoja istraživanja i saznanja vezana uz mogućnost primjene kontrolnih karata objavio 1931. god. u svojoj knjizi "*Economic Control of Quality of Manufactured Product*".



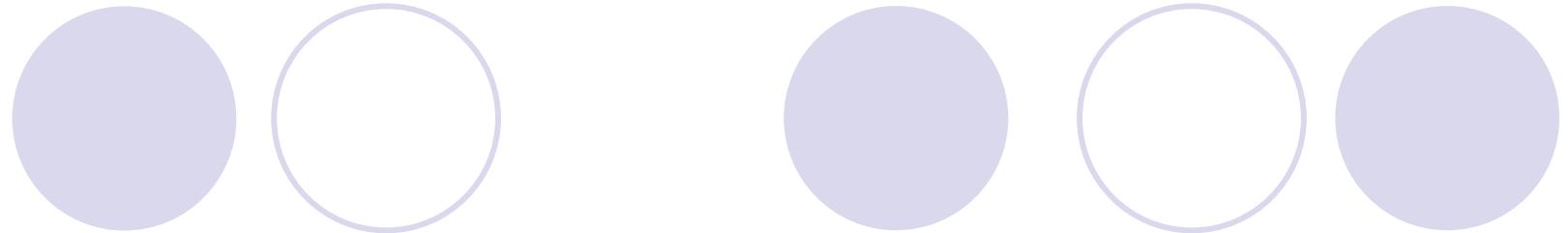
*Dr. Walter A. Shewhart*



## VRSTE KONTROLNIH KARATA

Kontrolne karte dijele se u dvije temeljne skupine:

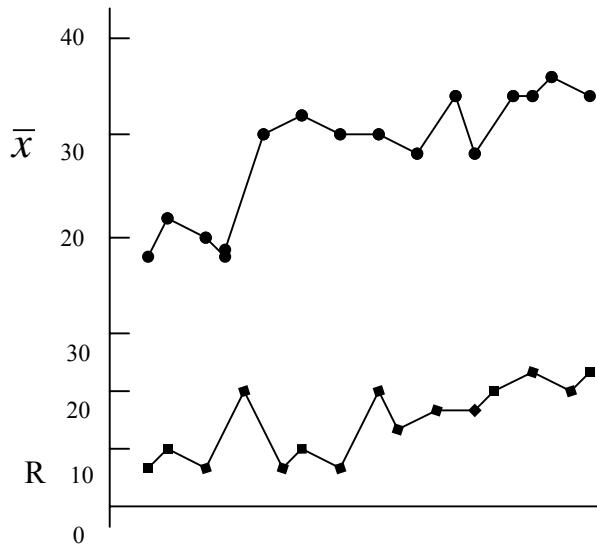
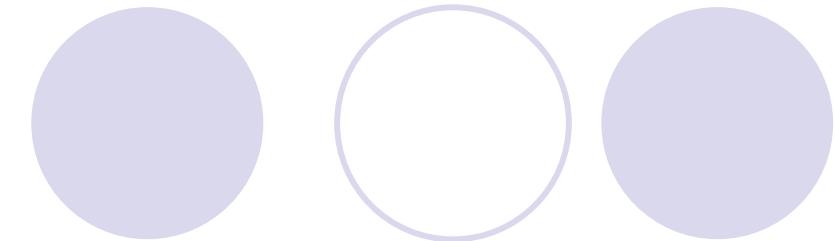
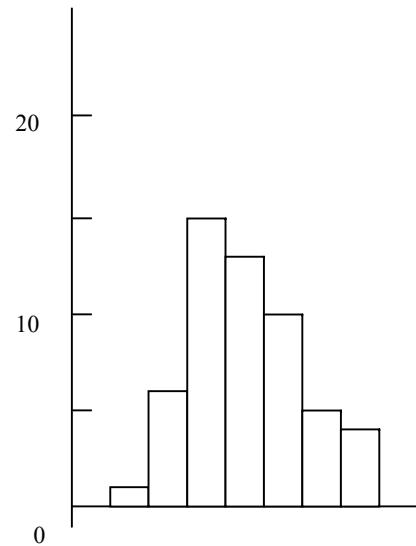
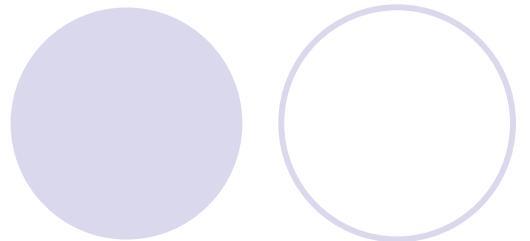
1. **kontrolne karte za mjerljive karakteristike:**  $\bar{X}$ -R karta,  $\tilde{X}$ -R karta,  $\bar{X}$ -s karta, x – MR karta, CuSum karta, EWMA karta. Matematska podloga ovih karata je normalna raspodjela.
2. **kontrolne karte za atributivne karakteristike:** p karta, np karta, c karta, u karta. Matematska podloga ovih karata je binomna i Poissonova raspodjela.



## TEHNIKA KONTROLNIH KARATA

Tehnika kontrolnih karata sastoji se od uzimanja većeg broja malih uzoraka iz procesa. Uzorci se uzimaju, ako je to primjenljivo, u **slučajnim** obilascima.

Važno je naznačiti da se kontrolom kartom prate **varijacije procesa u vremenu**. To znači da uzorci uvijek moraju biti zadnje proizvedene jedinice.



Temeljem provedenih mjerjenja (kontrole) uzorka računa se jedan ili više statističkih parametara iz dobivenih rezultata mjerjenja. Vrijednosti statističkih parametara uzoraka predmet su praćenja primjenom odgovarajuće kontrolne karte.

## STATISTIČKA POVEZANOST UZORAKA S OSNOVNIM SKUPOM (PROCESOM)

Povezanost uzoraka (pripadnih statističkih parametara) i osnovnog skupa (procesa) iz kojeg se uzorci uzimaju statistički je određena na slijedeći način:

$$x_0 \approx \bar{x} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \dots + \bar{x}_n}{k}$$

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_k}{k}$$

$X_0$ -sredina osnovnog skupa  
(procesa)

$\bar{x}_i$  - aritmetička sredina i-tog uzorka

k – broj uzorka

n – veličina uzorka

Veza  $\sigma_0$  i  $\sigma_{\bar{x}}$  :

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

Veza raspona  $\bar{R}$  i  $\sigma_0$  :

$$\bar{R} = d_2 \sigma_0$$

$$d_2 = f(n)$$

Veza  $\bar{\sigma}$  i  $\sigma_0$  :

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_k}{k}$$

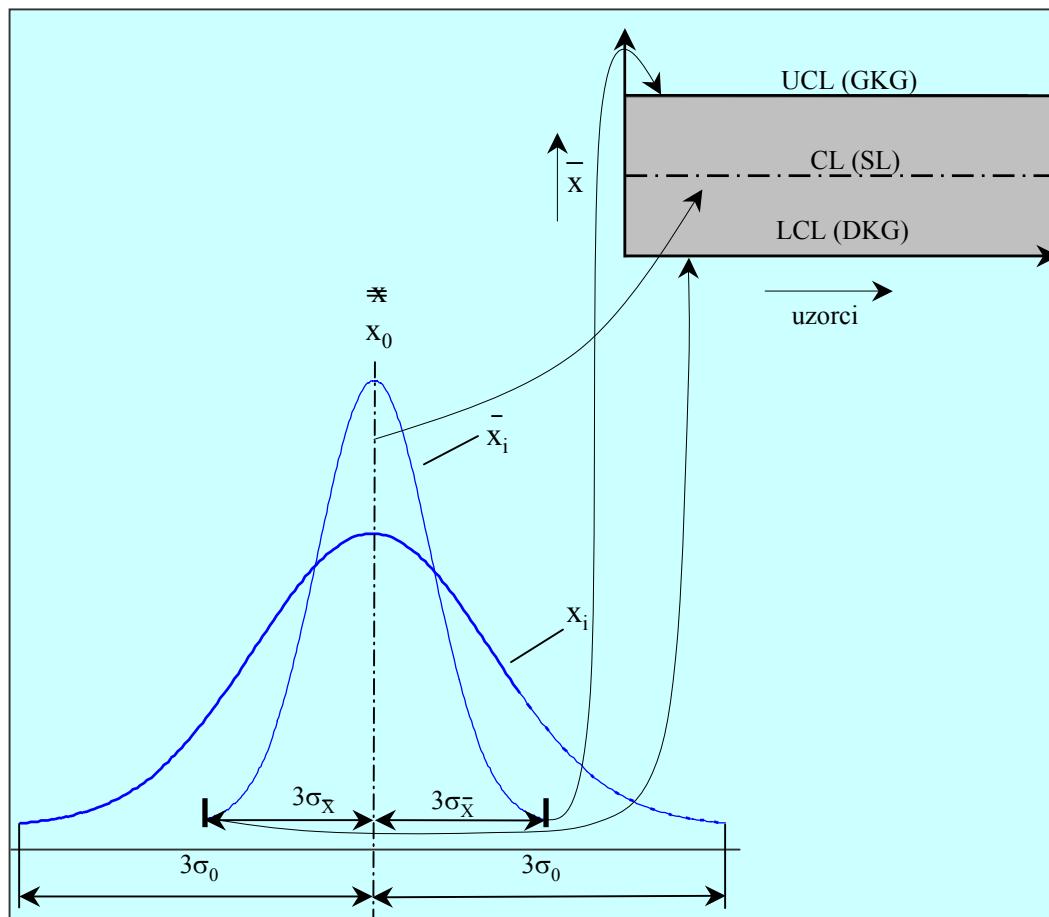
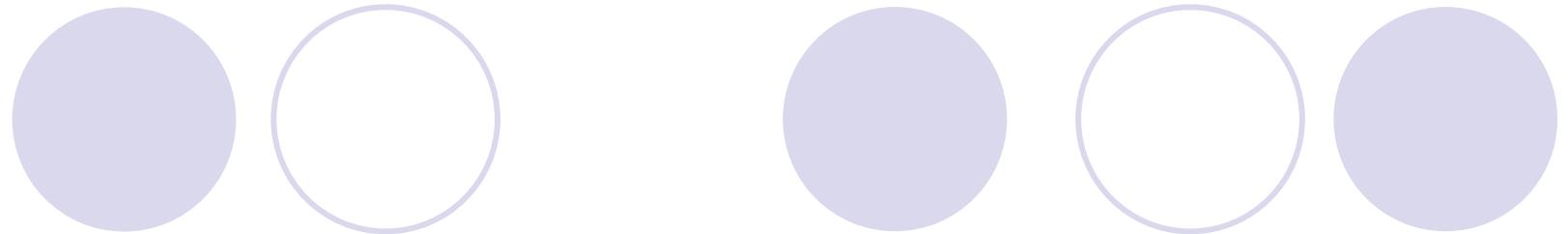
$$\bar{\sigma} = c_2 \sigma_0$$

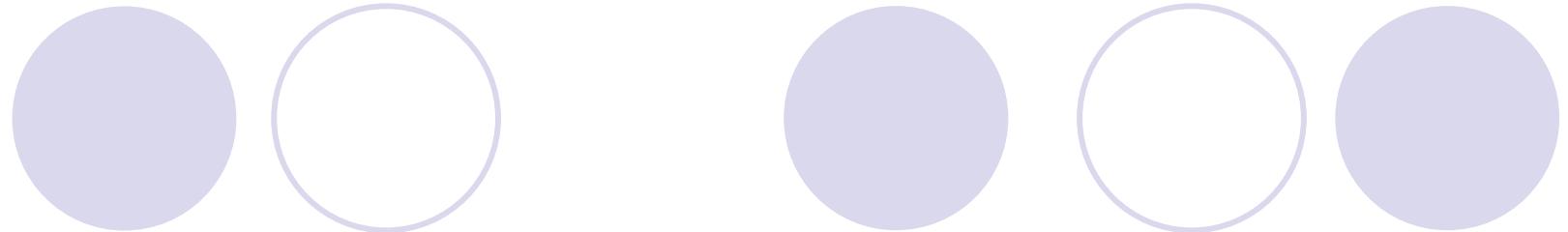
$$c_2 = f(n)$$

Veza  $\sigma_{\sigma}$  i  $\sigma_0$  :

$$\sigma_{\sigma} = a_2 \sigma_0$$

$$a_2 = f(n)$$





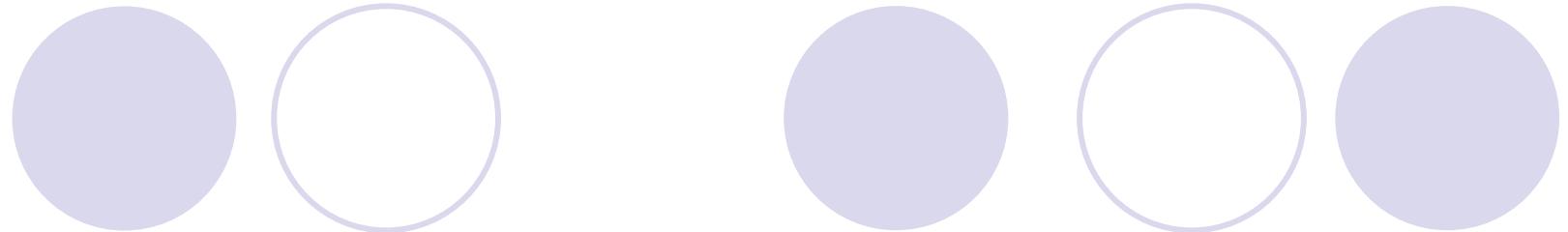
## ZNAČAJKE KONTROLNIH KARATA

Na svakoj kontrolnoj karti treba odrediti kontrolne granice i središnju liniju.

**Kontrolne granice su:**

- donja kontrolna granica DKG (lower control limit LCL)
- gornja kontrolna granica GKG (upper control limit UCL)

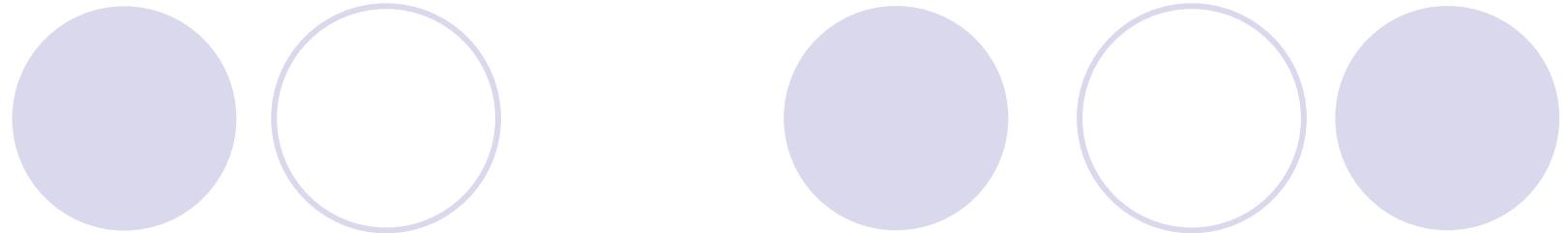
Kontrolne granice su statističke granice i **nisu povezane s** granicama specifikacije (zahtjeva).



Kontrolne granice se postavljaju (računaju) na granice rasipanja ( $\pm 3\sigma$ ) statističkog parametra (, R, s, p i drugo) koji se prati kontrolnom kartom (računa iz uzoraka). Pored kontrolnih granica mogu se koristiti i tzv. granice upozorenja (postavljaju se na  $\pm 2\sigma$  ili  $\pm 1\sigma$ ).

Podatak izvan kontrolne granice (iznad GKG ili ispod DKG) pokazuje da se u procesu, statistički promatrano, dogodio ne slučajan već **značajan uzrok varijacije** (odstupanja).

Najefikasniji postupak poboljšavanja kvalitete praćenog procesa je promptno otkrivanje uzroka značajnih varijacija i provođenje odgovarajućih popravnih radnji.



Kada nema podataka izvan kontrolnih granica onda se koristi termin «**PROCES JE POD KONTROLOM**».

Termin «**POD KONTROLOM**» je statistički termin kojim se pokazuje da proces varira samo pod utjecajem slučajnih, procesu svojstvenih, utjecaja.

Za proces koji je «pod kontrolom» često se koristi i termin «**STABILAN PROCES**».

Kada su podaci izvan kontrolnih granica to nipošto ne znači da proces daje nesukladne jedinice (proizvode).

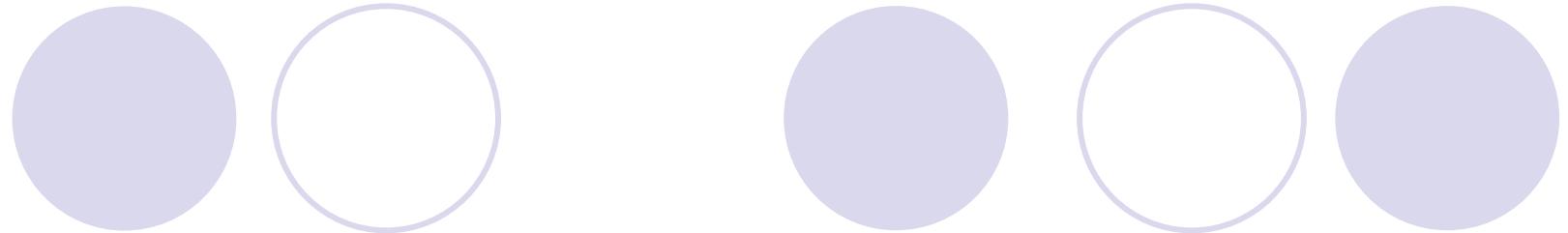


Kontrolne karte se mogu i trebaju primjenjivati kako za procese koji nužno daju nesukladne proizvode ( $C_p < 1$ ), tako i za sposobne procese ( $C_p > 1$ ).

U slučaju određivanja (računanja) kontrolnih granica za proces za koji nemamo prethodnih saznanja (nepoznate varijacije procesa) potrebno je provesti korekciju granica u slučaju pojave podataka izvan kontrolnih granica.

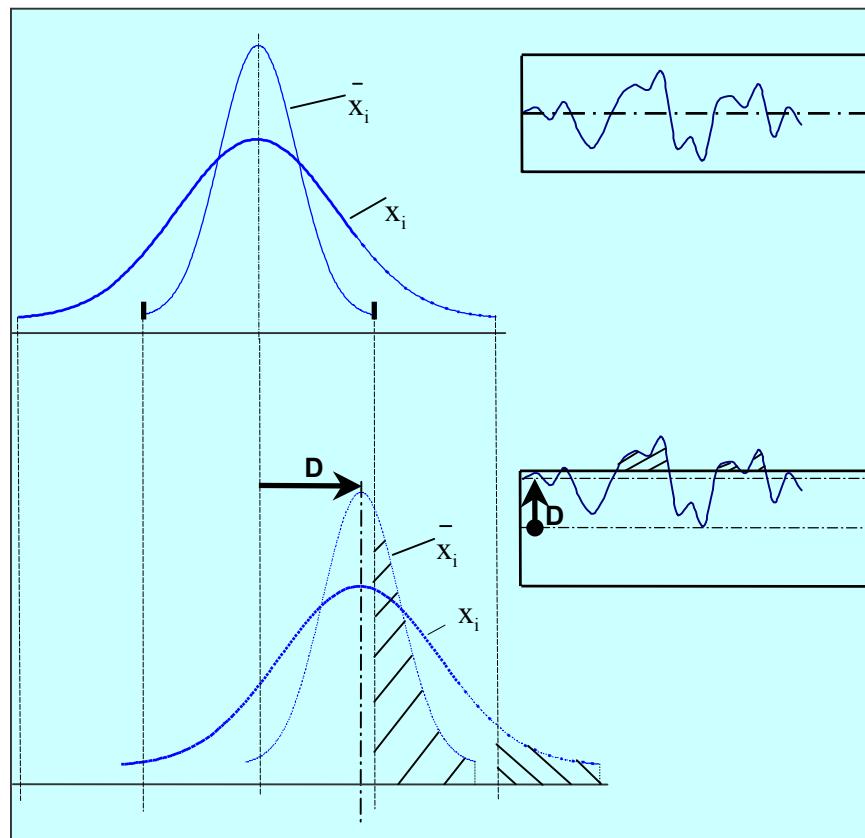
Korekcija (ponovno računanje granica) provodi se nakon eliminacije uzorka (odgovarajućih statističkih parametara koji se prate) koji su izvan kontrolnih granica.

Za poznate procese (poznato rasipanje) kontrolne granice se postavljaju **prije** uzimanja uzorka. To je i najprirodniji način korištenja kontrolnih karata jer se eventualna pojava značajnih odstupanja promptno može istražiti. Kontrolne karte treba «odmaknuti» od računala i približiti radnom mjestu (stroju).



**Središnja linija procesa SL** (Central line CL) predstavlja liniju aritmetičke sredine statističkog parametra koji se prati kontrolnom kartom.

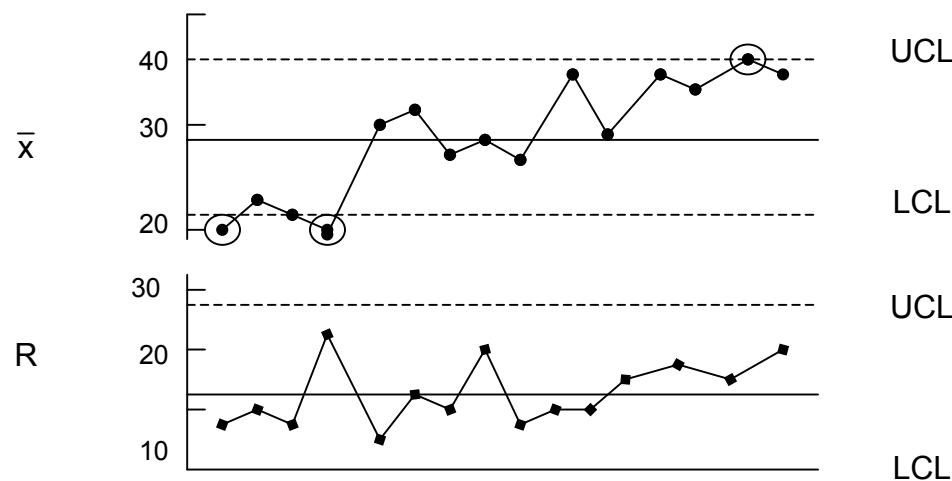
## OSJETLJIVOST KONTROLNE KARTE

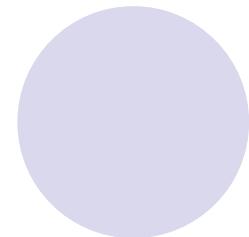
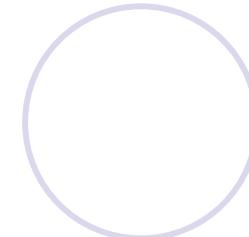
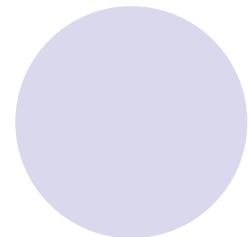
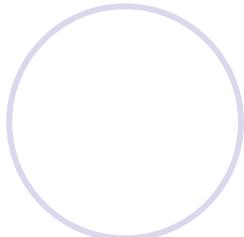
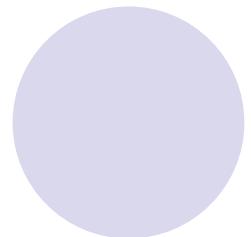


## CILJEVI

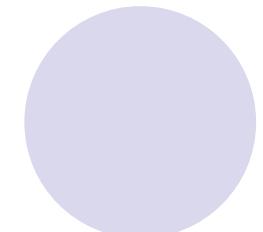
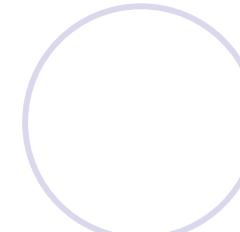
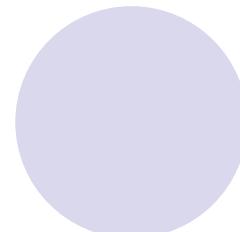
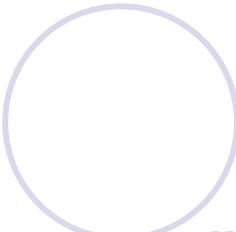
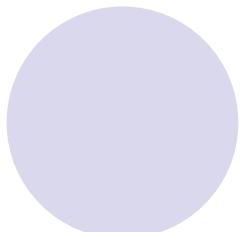
Ciljevi primjene kontrolnih karata su slijedeći:

- Dovođenje procesa u stanje statističke kontrole, odnosno u stanje «POD KONTROLOM»;
- Utvrđivanje trendova i pomaka procesa u cilju zaštite od neželjenih rezultata (pojave dijelova lošije kvalitete, nesukladnih dijelova i sl.).





- Utvrđivanje potreba za remontom ili nabavom nove opreme elemenata procesa i sl.
- Dobivanje svih saznanja o mogućnostima poboljšavanja procesa i mogućnostima postizanja zahtijevane kvalitete proizvoda (procjenjivanje sposobnosti procesa). Temeljno pravilo mora biti: kontrolne karakteristike biraju se radi pružanja maksimalne količine informacija u procesu uz minimalne troškove. U navedenom kontekstu treba se riješiti i slijedeće zablude: *proizvodnja se odvija u vrlo malim serijama, pa se ne može primijeniti kontrolna karta.*



## TRAJNO POBOLJŠAVANJE PROCESA

Niti jedno poboljšanje procesa ne odvija se preko noći. Poboljšanja se sastoje od «sitnih koračića» u dugom vremenskom razdoblju. Važno je znati kojim redom koračati (izbor prioriteta).

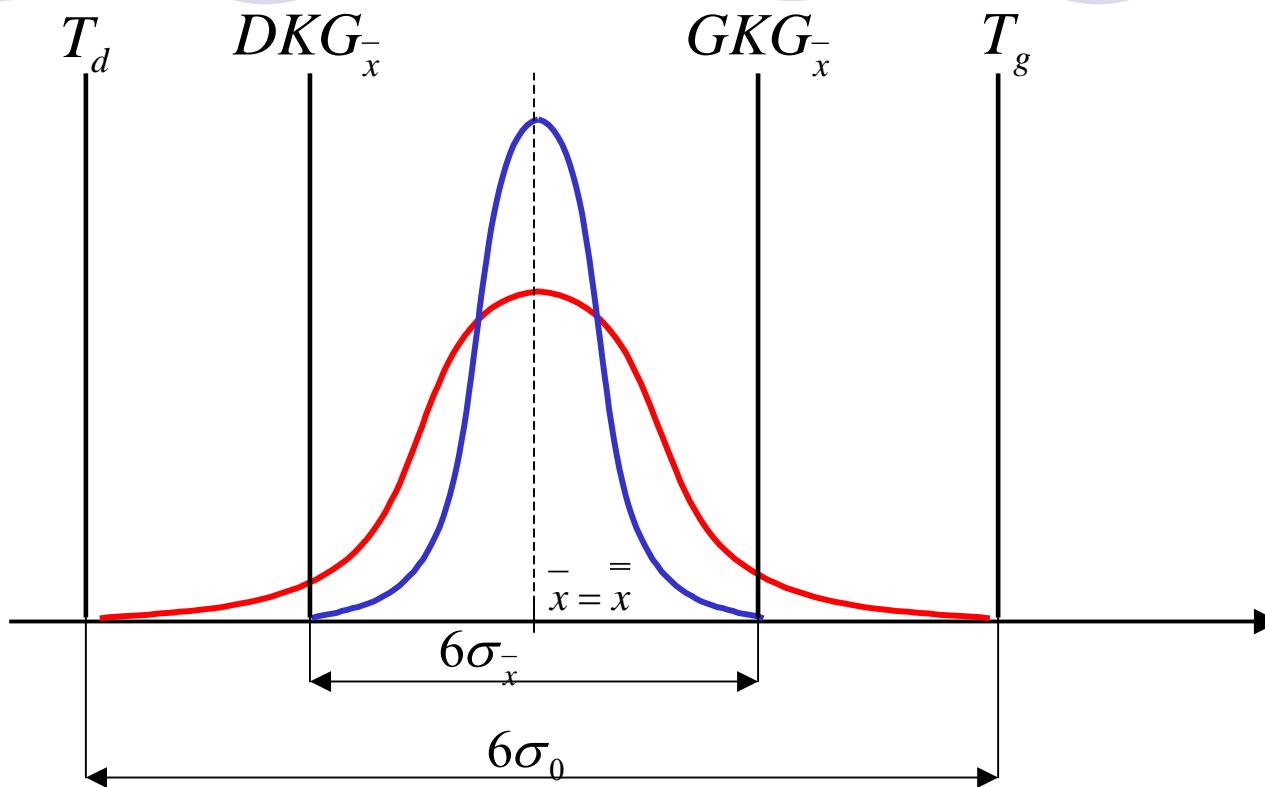
Dinamiku korištenja kontrolnih karata treba prilagoditi učincima, mogućnostima poboljšavanja, preventivi i sl. Važno je znati što se hoće a ne samo stvarati lijepa kolor izvješća radi formalnog opravdanja svoje aktivnosti.

S vremenom će i to sigurno prijeći u dosadu.

## Kontrolne karte za mjerljive karakteristike

$\bar{x} - R$  karta

- Daje uvid u kretanje procesa na osnovu statističke teorije i vjerojatnosti, a njom se registriraju dva važna pokazatelja procesa:
  - kretanje aritmetičkih sredina uzoraka  $\bar{x}_i$  i
  - kretanje raspona uzoraka  $R_i$
- Prvi podatak  $\bar{x}_i$  daje uvid u centriranost procesa, dok drugi,  $R_i$  govori o njegovom rasipanju
- Primjena joj dolazi kod izražaja kod serijske i velikoserijske komadne proizvodnje gdje se kontrola svodi na mjerenje malih uzoraka ( $n=2$  do 10 komada), te su troškovi kontrole znatno smanjeni.
- Na osnovu krivulje normalne razdiobe moguće je sagledati kako se dolazi do kontrolnih granica i na čemu se temelji osjetljivost ove karte.



- Kontrolne granice za ovu kartu moguće je postaviti na tri načina:
  1. Praćenjem nepoznatog procesa u cilju ustanavljanja njegovih prirodnih mogućnosti u pogledu centriranosti i rasipanja
  2. Na temelju poznatih prošlih podataka o procesu
  3. Na temelju unaprijed zadanih tolerancija (zbog prepostavki danas praktički nije upotrebljiv)

## Kontrolne granice na temelju praćenja nepoznatog procesa

### a) Kontrolne granice za kretanje aritmetičkih sredina uzoraka

$${}^G_D KG_{\bar{x}} = \bar{x} \pm 3\sigma_{\bar{x}} = \bar{x} \pm 3 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

Budući da je:

$$\sigma_0 = \frac{\bar{R}}{d_2}, \quad \bar{R} = \frac{\sum R_i}{k},$$

---

gdje je  $k$  broj obilazaka kontrolora, odnosno broj uzetih uzoraka, dobiva se:

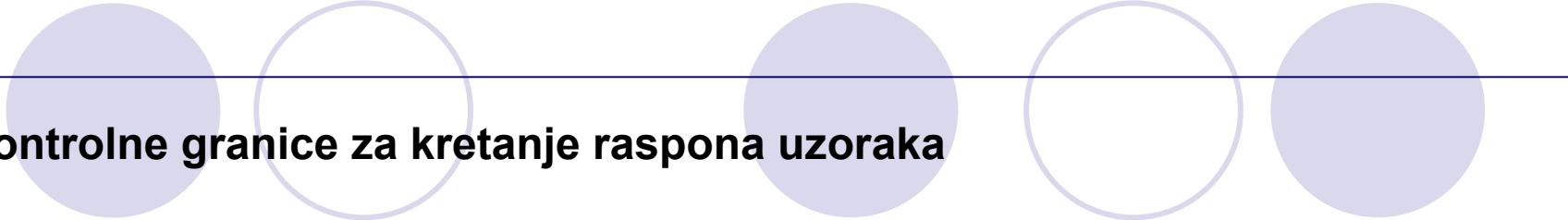
$${}^G_D KG_{\bar{x}} = \bar{x} \pm 3 \frac{\bar{R}}{d_2 \sqrt{n}}$$

Označi li se  $3 \frac{\bar{R}}{d_2 \sqrt{n}}$  s koeficijentom  $A_2$ , koji je isključivo funkcija

veličine uzorka  $n$ , dobiva se konačno:

$${}^G_D KG_{\bar{x}} = \bar{x} \pm A_2 \bar{R}$$

---



## b) Kontrolne granice za kretanje raspona uzorka

Iz pojedinačnih raspona  $R_i$  dobiva se prosječni raspon:

$$\bar{R} = \frac{\sum R_i}{k},$$

Kontrolne granice se u ovim slučajevima postavljaju na udaljenost od tri standardne devijacije pa slijedi:

$${}^G_D KG_R = \bar{R} \pm 3\sigma_R = \bar{R} \pm 3b_2\sigma_0 = \bar{R} \pm 3b_2 \frac{\bar{R}}{d_2} = \left(1 \pm \frac{3b_2}{d_2}\right) \bar{R}$$

Označi li se  $1 + \frac{3b_2}{d_2}$  s  $D_4$ , a  $1 - \frac{3b_2}{d_2}$  s  $D_3$  dobivaju se kontrolne granice:

$$GKG_R = D_4 \bar{R}, \quad DKG_R = D_3 \bar{R}$$

➤ **Zaključno se može navesti slijedeće:**

- **kontrolne se granice postavljaju na  $\pm 3\sigma$  određene mjerljive karakteristike**
- **svi se podaci ( $x_i, \bar{x}_i, \bar{x}, \bar{R}, k, n$ ) dobivaju neposredno mjeranjem na uzorcima uzimanim iz procesa**
- **svi su koeficijenti ( $A_2, D_3, D_4, d_2$ ) funkcije veličine uzorka (uzorci moraju biti iste veličine)**
- **Pomoću  $\bar{R}$  i  $d_2$  moguće je odrediti prirodno rasipanje procesa.**

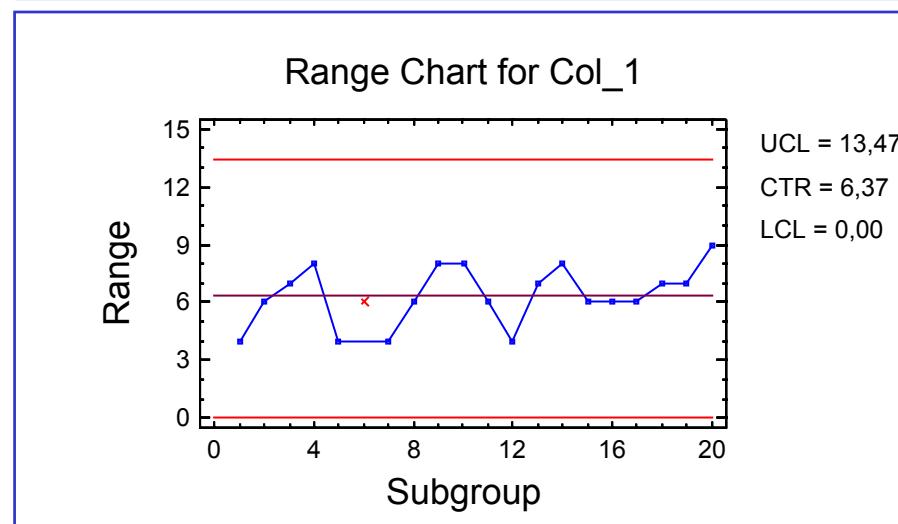
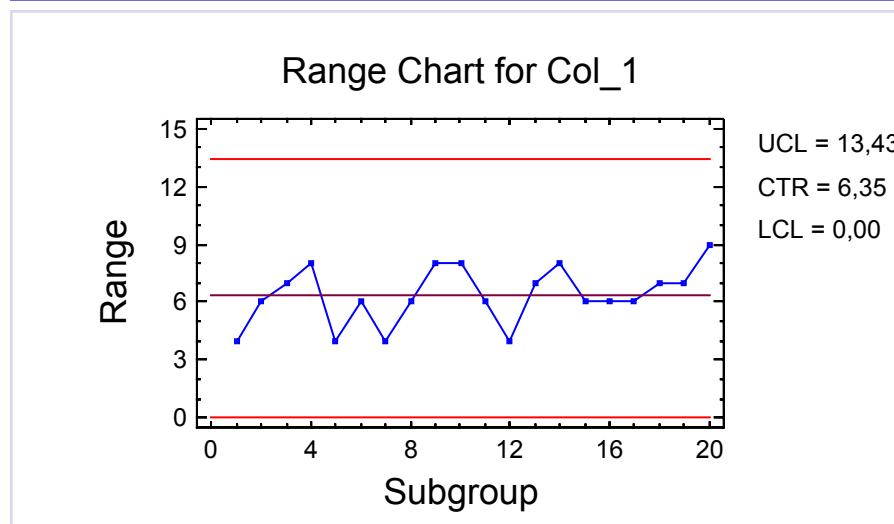
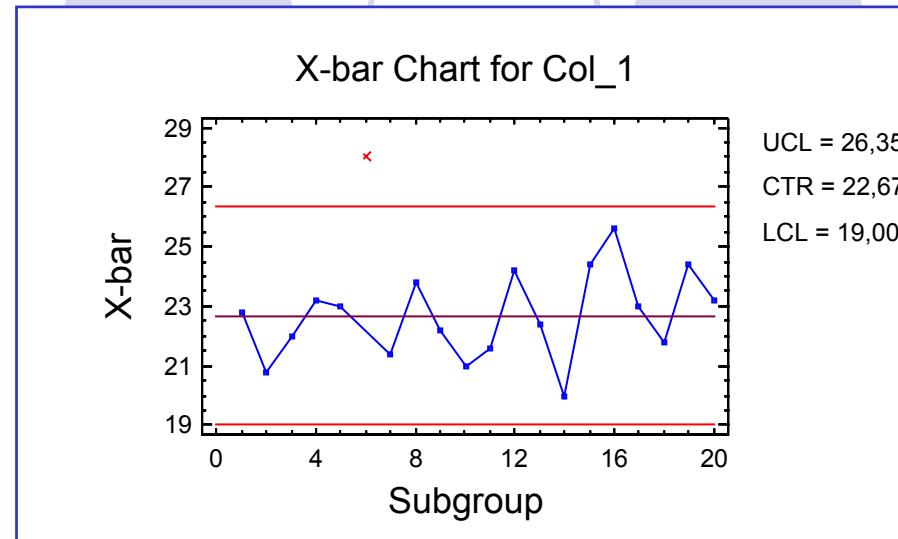
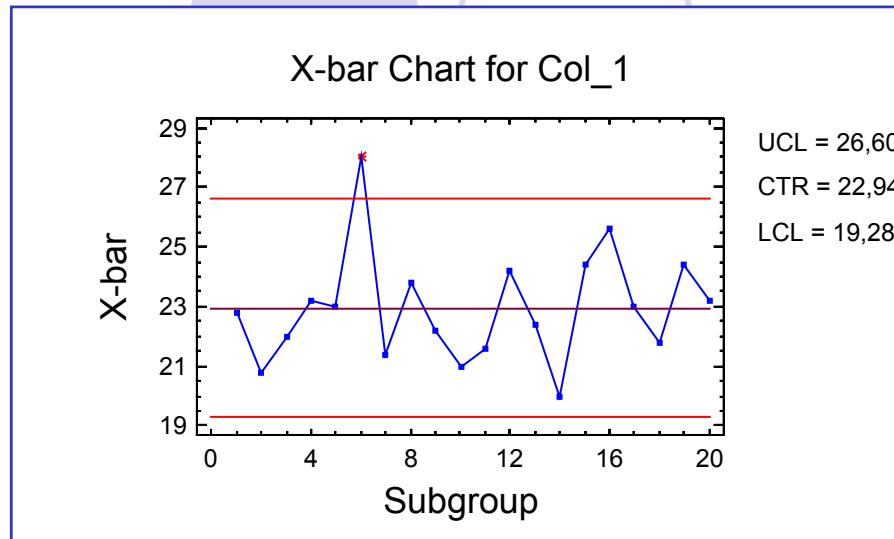
Tablica 1. Koeficijenti kontrolnih granica za  $\bar{x} - R$  kartu

| $n$ | $A_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $d_2$ |
|-----|-------|-------|-------|-------|
| 2   | 1,880 | 0     | 3,267 | 1,128 |
| 3   | 1,023 | 0     | 2,575 | 1,693 |
| 4   | 0,729 | 0     | 2,282 | 2,059 |
| 5   | 0,577 | 0     | 2,115 | 2,326 |
| 6   | 0,483 | 0     | 2,004 | 2,534 |
| 7   | 0,419 | 0,076 | 1,924 | 2,704 |
| 8   | 0,373 | 0,136 | 1,864 | 2,847 |
| 9   | 0,337 | 0,184 | 1,816 | 2,970 |
| 10  | 0,308 | 0,223 | 1,777 | 3,078 |

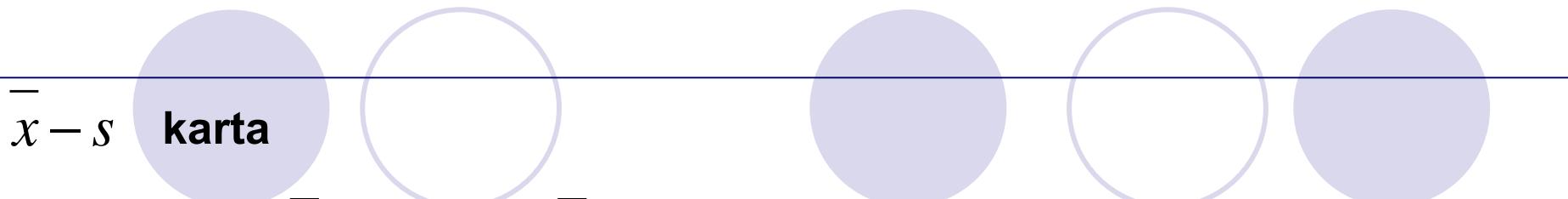
## Izvođenje korekcije

- Ukoliko je vrijednost  $\bar{x}$  ili  $R$  bilo kojeg uzorka izvan proračunatih kontrolnih granica, mora se izvesti korekcija.
- Korekcija se vrši tako da se taj kompletni uzorak čija je vrijednost  $\bar{x}$  ili  $R$  izašla izvan kontrolnih granica, zanemari, tj. vrši se proračun novih kontrolnih granica bez rezultata tog uzorka.
- Na taj način se odstranjuju značajni uzroci varijacija.
- Korekcija se vrši sve dok rezultati preostalih uzoraka ne budu unutar kontrolnih granica.





Slika 1. Primjer  $\bar{x} - R$  karte



- Isto kao i  $\bar{x} - R$  tako i  $\bar{x} - s$  karta prati dvije karakteristike procesa:
  - njegovu centriranost preko kretanja aritmetičkih sredina uzoraka
  - njegovo rasipanje preko kretanja standardnih odstupanja
- Budući da se računaju standardna odstupanja uzoraka, uzorci trebaju biti veći nego kod  $\bar{x} - R$  karte. Tako se preporuča da veličina uzorka bude veća od 25.
- Stoga se ove karte primjenjuju u procesima koji su zaokruženog tipa i odvijaju se u zatvorenim ciklusima određene dužine trajanja kada se proces ne može pratiti dok je ciklus u toku, nego se na kraju ciklusa mogu uzeti veći uzorci i koristeći  $\bar{x} - s$  karte donositi zaključke o procesu.

---



## **Kontrolne granice na temelju praćenja nepoznatog procesa**

### **a) Kontrolne granice za kretanje aritmetičkih sredina uzoraka**

$${}^G_D KG_{\bar{x}} = \bar{x} \pm 3\sigma_{\bar{x}} = \bar{x} \pm 3 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}$$

**Budući da je:**

$$\bar{s} = c_2 \sigma_0$$

**dobiva se:**

$${}^G_D KG_{\bar{x}} = \bar{x} \pm 3\sigma_{\bar{x}} = \bar{x} \pm 3 \frac{\bar{s}}{c_2 \sqrt{n}}$$

Pri čemu je  $\bar{s}$  aritmetička sredina standardnih odstupanja svih uzoraka, tj.:

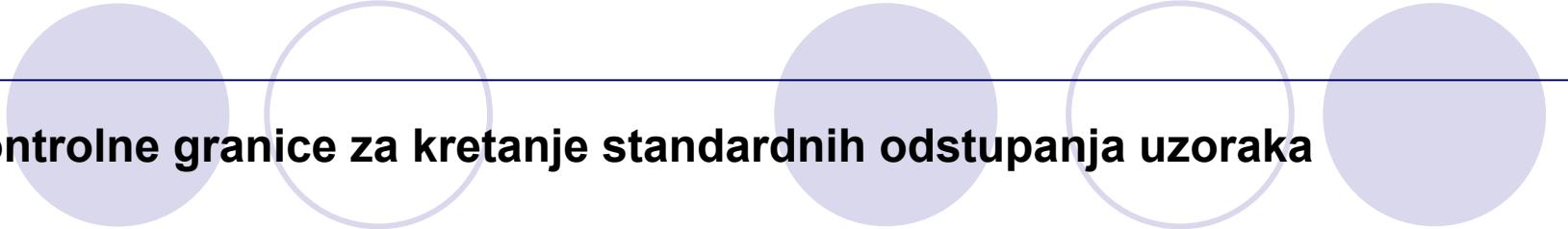
$$\bar{s} = \frac{\sum s_i}{k}$$

Označi li se  $\frac{3}{c_2 \sqrt{n}}$  s koeficijentom  $A_1$ , koji je isključivo funkcija

veličine uzorka  $n$ , dobiva se konačno:

$${}^G_D KG_{\bar{x}} = \bar{x} \pm A_1 \bar{s}$$

---



### b) Kontrolne granice za kretanje standardnih odstupanja uzorka

$${}^G_D KG_s = \bar{s} \pm 3\sigma_{\sigma} = \bar{s} \pm 3a_2\sigma_0$$

Budući da je:

$$\bar{s} = c_2\sigma_0$$

**dobiva se:**

$${}^G_D KG_s = \bar{s}\left(1 \pm \frac{3a_2}{c_2}\right)$$

Označi li se  $1 + \frac{3a_2}{c_2}$  s  $B_4$ , a  $1 - \frac{3a_2}{c_2}$  s  $B_3$  dobivaju se kontrolne granice:

$$GKG_s = B_4 \bar{s},$$

$$DKG_s = B_3 \bar{s}$$

Tablica 2. Koeficijenti kontrolnih granica za  $\bar{x} - s$  kartu

| $n$ | $A_1$ | $B_3$ | $B_4$ | $C_2$  |
|-----|-------|-------|-------|--------|
| 10  | 1,028 | 0,284 | 1,716 | 0,9227 |
| 15  | 0,816 | 0,428 | 1,572 | 0,9400 |
| 20  | 0,697 | 0,510 | 1,490 | 0,9619 |
| 25  | 0,619 | 0,565 | 1,435 | 0,9696 |
| 30  | 0,562 | 0,603 | 1,397 | 0,9748 |
| 35  | 0,518 | 0,633 | 1,367 | 0,9784 |
| 40  | 0,483 | 0,658 | 1,342 | 0,9811 |
| 45  | 0,455 | 0,678 | 1,322 | 0,9832 |
| 50  | 0,431 | 0,695 | 1,305 | 0,9849 |
| 60  | 0,392 | 0,723 | 1,277 | 0,9874 |
| 70  | 0,363 | 0,744 | 1,256 | 0,9892 |



## X-MR (x-mooving range) karta

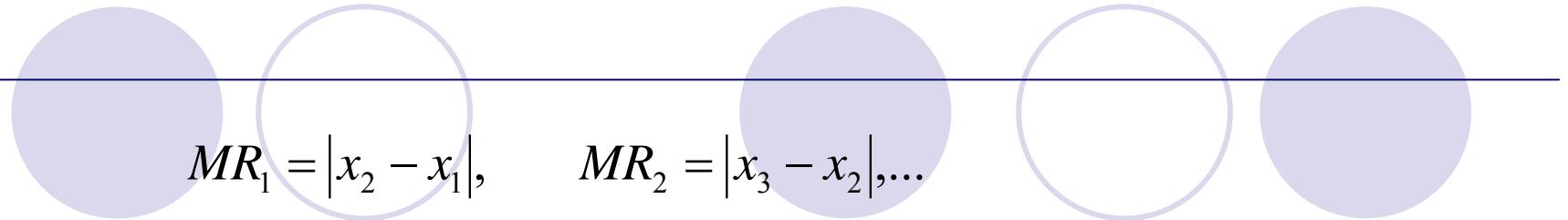
- Upotrebljava se u situacijama kada je ograničena mogućnost dobivanja podataka ili zbog tehnološke prirode procesa nije moguće uzeti više od jednog podatka u uzorku.
- U x kartu se unose rezultati individualnih mjerena.

### a) Kontrolne granice za kretanje individualni vrijednosti mjerena

$${}^G_D KG_x = \bar{x} \pm 2,66 \overline{MR}$$

gdje su:

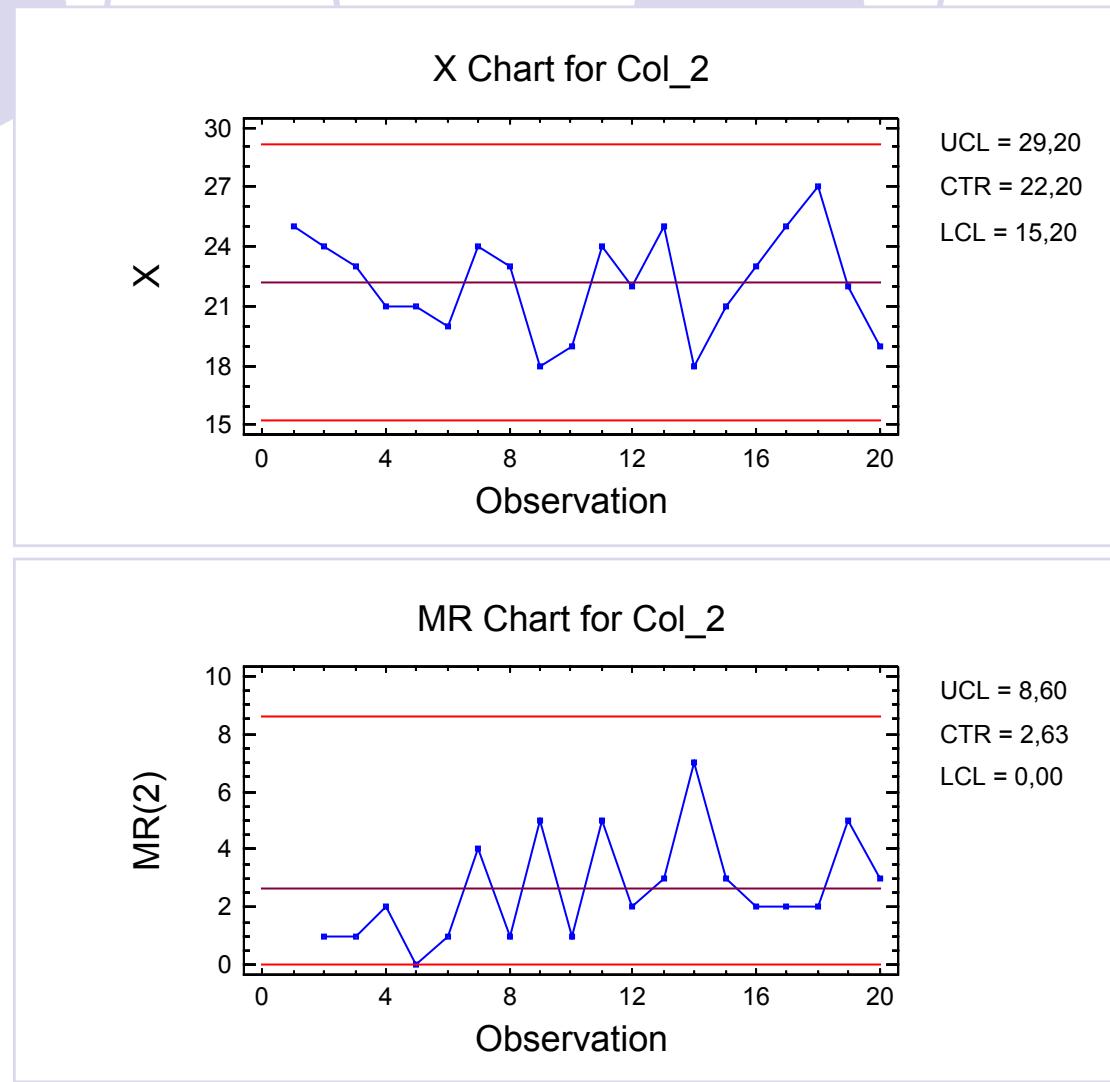
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i}{k}, \quad \overline{MR} = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} MR}{k-1}.$$



**b) Kontrolne granice za kretanje  $MR$  vrijednosti**

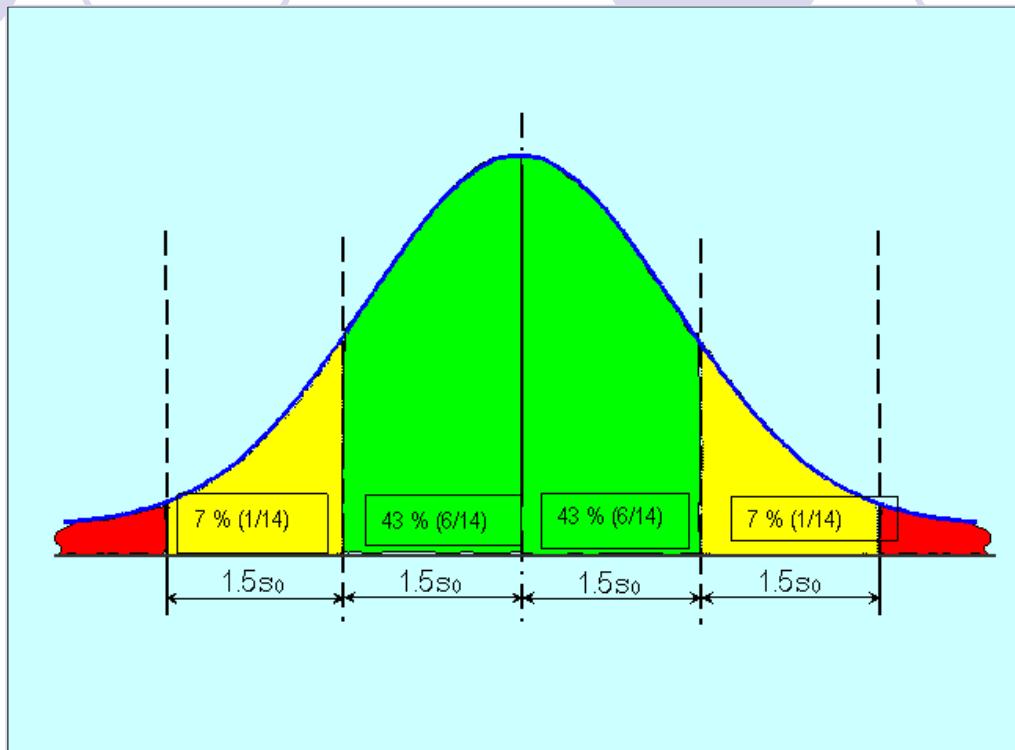
$$GKG_{MR} = 3,27 \overline{MR}$$

$$DKG_{MR} = 0$$



Slika 2. Primjer  $x$ - $MR$  karte

## Predkontrola (Pre-control)



|                 |  |      |      |      |  |
|-----------------|--|------|------|------|--|
| <b>POMOĆ</b>    |  | A    |      | B    |  |
| <b>POMOĆ</b>    |  | B    |      | A    |  |
| <b>PODESITI</b> |  | A, B |      | A, B |  |
| <b>IZRADA</b>   |  |      | A, B |      |  |
| <b>IZRADA</b>   |  | A    | B    |      |  |
| <b>IZRADA</b>   |  | B    | A    |      |  |
| <b>IZRADA</b>   |  |      | A    | B    |  |
| <b>IZRADA</b>   |  |      | B    | A    |  |

- 
- Prije uzimanja parova mora 5 uzastopnih dijelova "pasti" u zeleno područje.
  - Ako je A ili B u crvenom području treba izvršiti podešavanje.
  - Postupak se može primijeniti samo za stabilne (poznate) procese.

# KONTROLNE KARTE ZA ATRIBUTIVNE KARAKTERISTIKE

## p-karta

Prikazuje grafičko kretanje proporcije loših komada u uzorcima. Veličine uzoraka pri tome mogu biti različite.

Matematička osnova je binomna razdioba. Radi nesimetrije karta vrlo dobro odgovara tek ako je broj loših komada u uzorku barem 4 ( $n \cdot p \geq 4$  ).

Srednja vrijednost omjera loših komada  $\bar{p}$  :

$$\bar{p} = \frac{\text{ukupan broj loših komada u svim uzorcima}}{\text{ukupan broj komada u svim uzorcima}}$$

$$\bar{p} = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2 + \dots + n_k p_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i p_i}{\sum_{i=1}^k n_i}$$

k- broj  
uzimanja  
uzoraka

## p-karta

Omjer loših komada u uzorku:

$$p_i = \frac{\text{broj loših komada u "i" uzorku}}{\text{broj komada u "i" uzorku}} = \frac{x_i}{n_i} \quad (i = 1 \dots k)$$

k- broj  
uzimanja  
uzoraka

Srednja vrijednost omjera loših komada  $\bar{p}$  :

$$\bar{p} = \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_k}{k} = \frac{\sum_{i=1}^k p_i}{k}$$

## p-karta

Kontrolne granice:

$$_{\text{D}}^{\text{G}} \text{KG} = \bar{p} \pm 3 \sqrt{\frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{n}}$$

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{n}}$$

$$_{\text{D}}^{\text{G}} \text{KG} = \bar{p} \pm 3 \sqrt{\frac{\bar{p}}{n}}$$

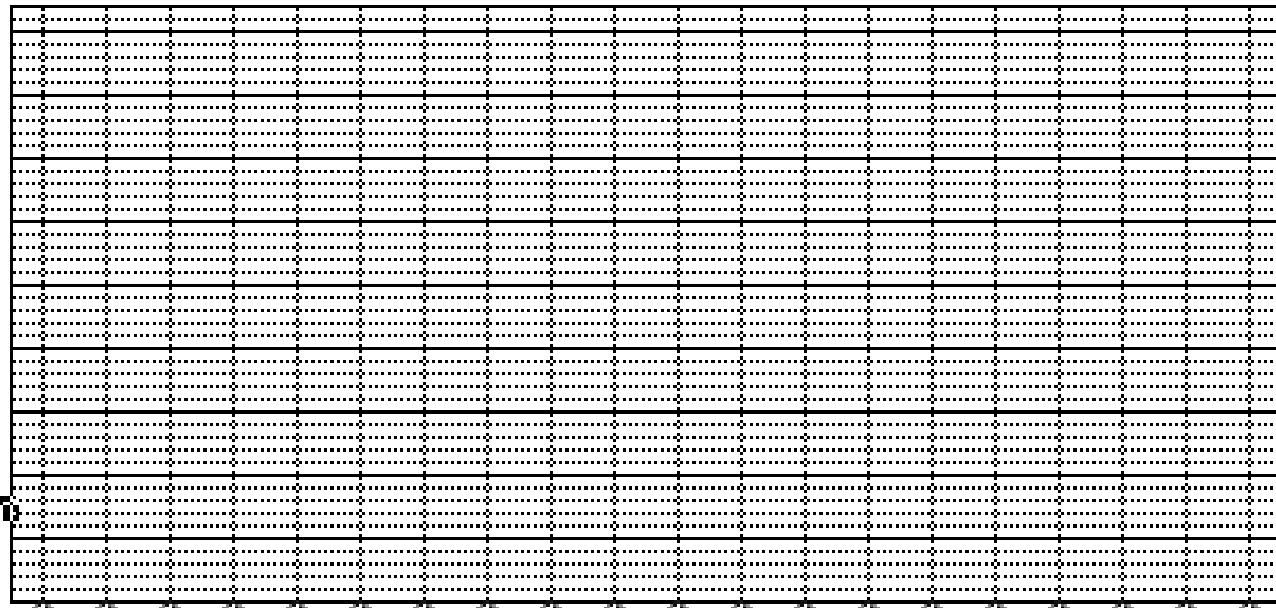
Ako je  $\bar{p} < 0,10$

U - karta

$$\bar{u} = \frac{\sum u_i n_i}{\sum n_i}$$

$$DKG = \bar{u} - 3\sqrt{\frac{u}{D}}$$

$$GKG = \bar{u} + 3, \quad \frac{u}{m}$$



CKC-gevra kontrolna grana

DWG- stampa fronte/retro grande

#### Cinética po jednorazowym podaniu

[Creado por userku \(user\)](#)

### **Ethy pregnanediol und prednisolon**

Red. brITABLICA GRE SAKA

U - karta

$$\bar{u} = \frac{\sum u_i n_i}{\sum n_i}$$

1

$$DKG = \bar{u} - 3\sqrt{\frac{u}{n}}$$

1

$$GKG = \bar{u} + 3\sqrt{\frac{u}{n}}$$

1

CRC-Genomics Refinement process

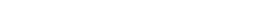
©2020 Pearson Education, Inc.

Simplifying rational expressions

Créditos no website (versão)

Breyer products™ website link

Rad-britABILICA GRESAKA

A decorative horizontal bar at the bottom of the page, consisting of a thin black line above a thick black line, with a series of small, colorful dots (red, blue, green, yellow) positioned between them.

卷之三

**Figure 1.** Schematic diagram of the experimental setup. The top part shows the optical bench with the laser source (L), beam splitter (BS), lenses (L1-L4), polarizers (P), mirrors (M), and beam expanders (BE). The bottom part shows the sample stage with the sample (S) and objective lenses (O).

卷之三

#### **Final Testimony**



## np-karta

Direktno prikazuje broj pronađenih škart jedinica.  
Ova je karta primjenjiva kada je veličina uzoraka konstantna.

Prosječan broj loših komada po uzorku  $\bar{np}$

$$\bar{np} = \frac{\text{ukupan broj loših komada u svim uzorcima}}{\text{broj uzimanih uzoraka}}$$

$$\bar{np} = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2 + \dots + n_k p_k}{k} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i p_i}{k}$$

k- broj  
uzimanja  
uzoraka

## np-karta

Kontrolne granice:

$${}^G_D KG = \bar{np} \pm 3\sqrt{\bar{np}(1-\bar{p})} \quad \sigma_{np} = \sqrt{\bar{np}(1-\bar{p})}$$

$${}^G_D KG = \bar{np} \pm 3\sqrt{\bar{np}} \quad \text{Ako je } \bar{p} < 0,10$$

## u-karta

Prikazuje prosječan broj grešaka (ne loših komada) pronađenih u jednoj isporuci i to na jedinicu proizvoda. Veličine uzoraka pri tome mogu biti različite.

Prosječan broj grešaka na jedinicu proizvoda  $\bar{u}$  :

$$\bar{u} = \frac{\text{ukupan broj grešaka na svim komadima}}{\text{ukupan broj komada u svim uzorcima}}$$

$$\bar{u} = \frac{n_1 u_1 + n_2 u_2 + \dots + n_k u_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i u_i}{\sum_{i=1}^k n_i}$$

## u-karta

Prosječan broj grešaka u "i" uzorku na jedinicu proizvoda  $u_i$ :

$$u_i = \frac{\text{broj grešaka u "i" uzorku}}{\text{broj komada u "i" uzorku}} = \frac{g_i}{n_i} \quad (i = 1 \dots k)$$

k- broj  
uzimanja  
uzoraka

Prosječan broj grešaka na jedinicu proizvoda za "k" uzoraka  $\bar{u}$  :

$$\bar{u} = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_k}{k} = \frac{\sum_{i=1}^k u_i}{k}$$

## u-karta

Kontrolne granice:

$$_{\bar{u}}^G KG = \bar{u} \pm 3 \sqrt{\frac{\bar{u}}{n}}$$

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{\bar{u}}{n}}$$

## c-karta

Prati broj grešaka na jednom proizvodu ili uzorku. Uzorci moraju biti iste veličine.

Prosječan broj grešaka po uzorku  $\bar{c}$  :

$$\bar{c} = \frac{\text{ukupan broj grešaka u svim uzorcima}}{\text{broj uzimanih uzoraka}}$$

$$\bar{c} = \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_k}{k} = \frac{\sum_{i=1}^k c_i}{k}$$

## c-karta

Kontrolne granice:

$$\frac{G}{D} KG = \bar{c} \pm 3\sqrt{c}$$

$$\sigma_c = \sqrt{c}$$

c - karta

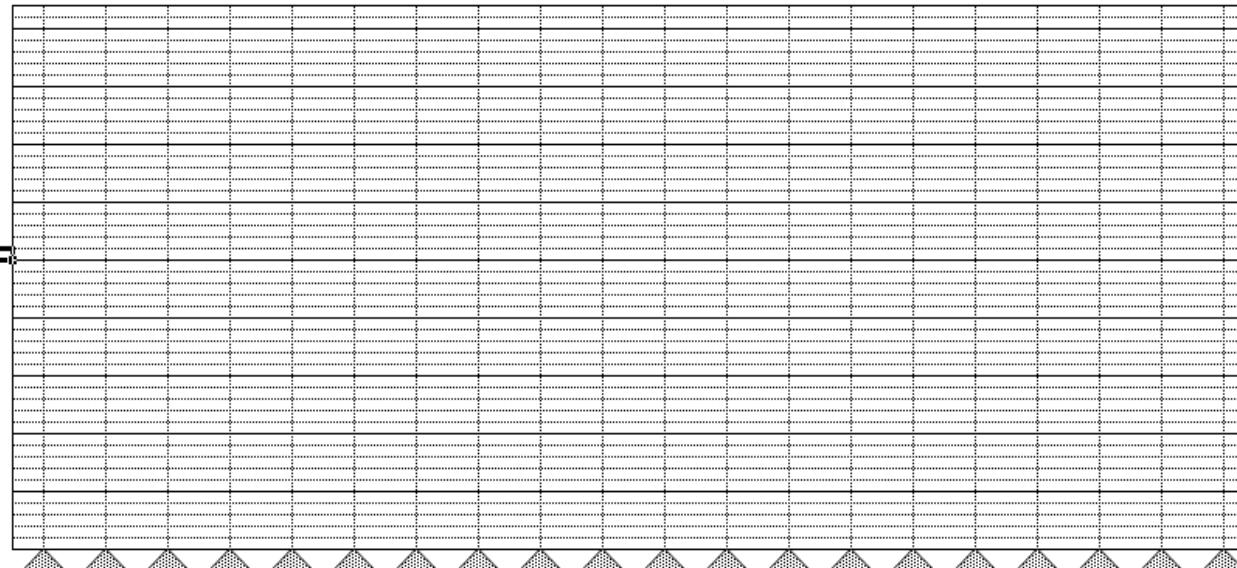
%

%

$$\bar{c} = \frac{\sum c}{k}$$

$$DKG_c = \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}}$$

$$GKG_c = \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}}$$



$\Sigma$

GKG- gornja kontrolna granica

DKG- donja kontrolna granica

Grešaka po jedinici proizvoda (u)

Grešaka po uzorku (nu=c)

Broj pregledanih jedinica (n)

Red.br/TABLICA GREŠAKA

|    | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 2  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 3  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 4  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 5  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 6  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 7  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 8  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 9  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 10 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 11 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
| 12 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |



c - karta

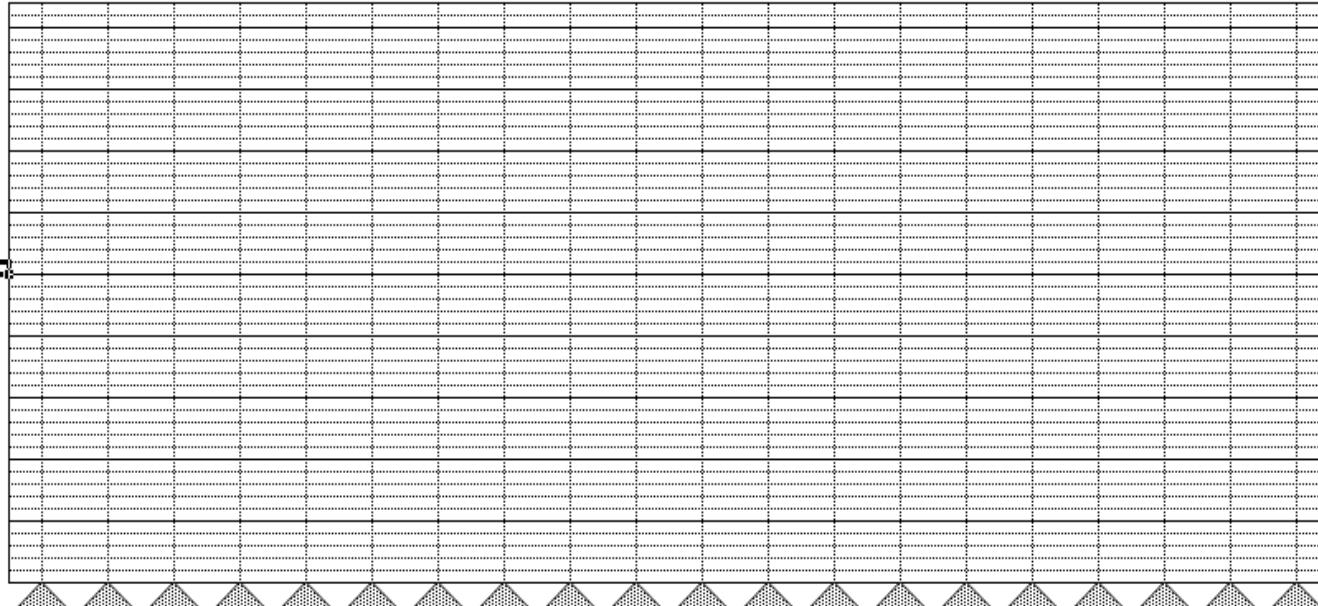
%

%

$$\bar{c} = \frac{\sum c}{k}$$

$$DKG_c = \bar{c} - 3\sqrt{c}$$

$$GKG_c = \bar{c} + 3\sqrt{c}$$



$\Sigma$

GKG- gornja kontrolna granica

DKG- donja kontrolna granica

Grešaka po jedinici proizvoda (u)

Grešaka po uzorku (nu=c)

Broj pregledanih jedinica (n)

Red.br/TABLICA GREŠAKA

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

|    |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|----|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| 1  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 2  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 4  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 5  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 6  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 7  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 8  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 9  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 10 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 11 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 12 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |



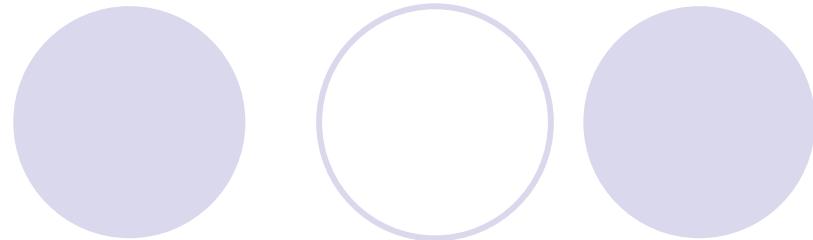
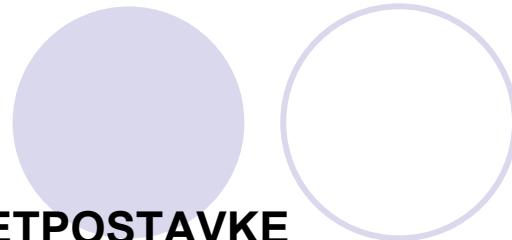
# **PROCJENJIVANJE SPOSOBNOSTI PROCESA**

## **DEFINICIJA**

**Sposoban proces je onaj proces koji može proizvoditi jedinice (dijelove) unutar zahtijevanih granica (granica specifikacije).**

Sposobnost procesa se procjenjuje računanjem tzv. indeksa sposobnosti procesa.





## PREPOSTAVKE

Računanje i pravilna interpretacija indeksa sposobnosti procesa temelji se na slijedećim prepostavkama:

- raspodjela podataka se može aproksimirati normalnom raspodjelom;
- proces koji se razmatra je stabilan i bez značajnih uzroka varijacija (proces je «pod kontrolom»);
- pouzdana procjena sposobnosti procesa može se donijeti samo temeljem praćenja procesa primjenom odgovarajuće kontrolne karte i nakon dovođenja procesa u stanje statističke kontrole (stanje «pod kontrolom»).

Ukoliko proces nije «pod kontrolom» računanje indeksa sposobnosti je puka formalnost i zavaravanje!

Otklanjanjem značajnih uzroka varijacija u procesu i dovođenjem sredine procesa u okoliš ciljane vrijednosti ima smisla procjenjivati njegovu sposobnost.

## TEMELJNI UVJET SPOSOBNOSTI PROCESA

Proces je sposoban ako je raspon zahtjeva veći ili jednak od raspona procesa.

**Raspon zahtjeva** (tolerancijsko područje) **T** je područje između gornje (USL) i donje granice zahtjeva (LSL), odnosno  $T = USL - LSL$ .

**Raspon procesa** podrazumijeva područje unutar  $\pm 3$  standardna odstupanja ( $6 \cdot \sigma$ ) u odnosu na sredinu procesa (99,73 % površine ispod krivulje normalne raspodjele kojom se aproksimira proces).

Temeljni uvjet sposobnosti procesa je:

$$T \geq 6 \cdot \sigma$$



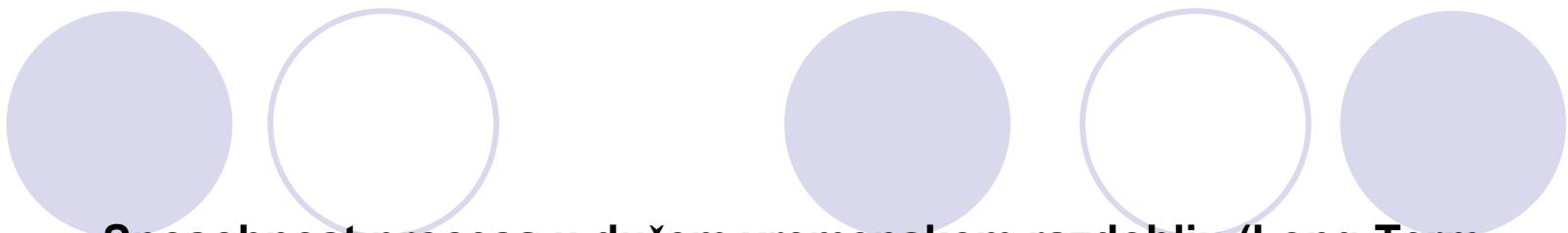
## INDEKSI SPOSOBNOSTI PROCESA

U literaturi se mogu naći različita tumačenja tzv. indeksa sposobnosti procesa. Ta su tumačenja često kontradiktorna i mogu unijeti zbrku u primjeni. Zbrka je uglavnom povezana s načinom procjenjivanja raspona procesa (standardnog odstupanja) i s tim u svezi primijenjene terminologije.

Pregled indeksa sposobnosti procesa koji je naveden u nastavku sukladan je tumačenju tvrtke FORD.

Uvažavajući vrijeme odvijanja procesa procjenjivanje sposobnosti (pripadajući indeksi) može pripadati jednoj od slijedeće tri kategorije:

1. Sposobnost procesa u **dužem vremenskom razdoblju** (Long-Term Process Capability);
2. **Preliminarna** sposobnost procesa (Preliminary Process Capability);
3. Sposobnost u **kratkom vremenskom razdoblju** (Short-Term Capability).

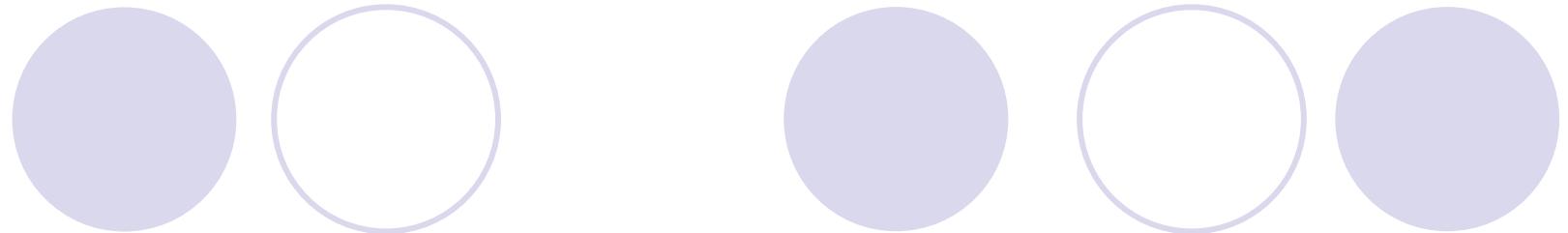
- 
1. **Sposobnost procesa u dužem vremenskom razdoblju (Long-Term Process Capability)**

Indeksi sposobnosti procesa računaju se nakon odvijanja procesa tijekom razložno dugog vremenskog razdoblja u kojem su se mogli pojaviti svi mogući utjecaji varijacija procesa. Preporuka je 20 proizvodnih dana. Indeksi su slijedeći:

### **Potencijalna sposobnost $C_p$ (Potential Capability)**

Dobiva se iz temeljnog uvjeta sposobnosti, odnosno:

$$C_p = \frac{T}{6\sigma}$$

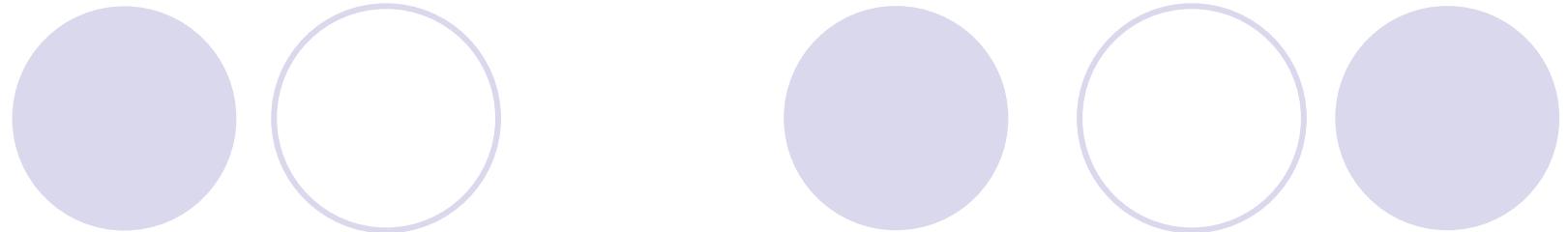


Standardno odstupanje se procjenjuje analizom odgovarajuće kontrolne karte, odnosno iz izraza:

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} \text{ (u slučaju primjene } \bar{x} - R \text{ kontrolne karte) ili}$$

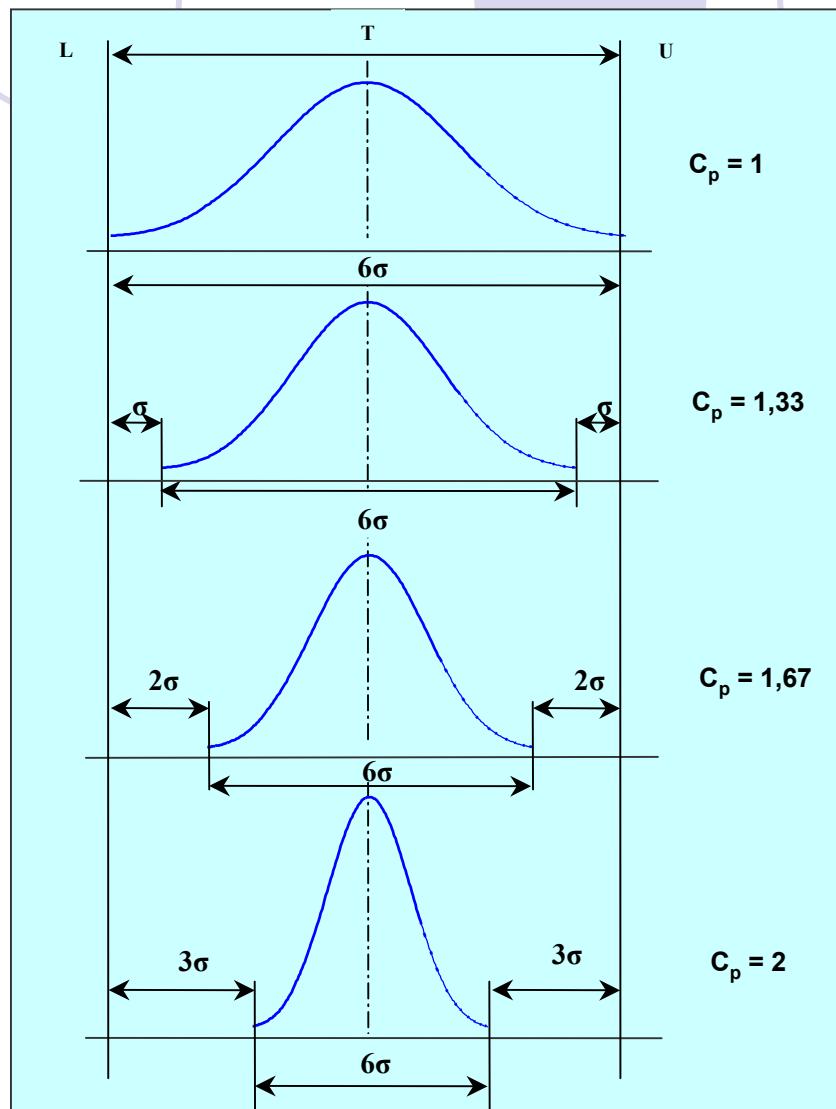
$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{s}}{c_2} \text{ (u slučaju primjene } \bar{x} - s \text{ kontrolne karte).}$$

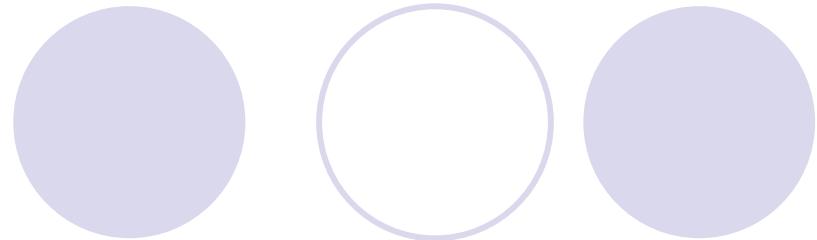
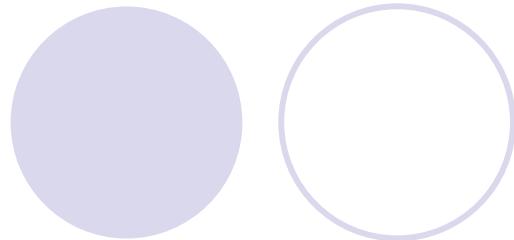
Ovako procijenjeno standardno odstupanje naziva se «**standardno odstupanje iz uzoraka**» ili «**unutrašnje standardno odstupanje**» (within subgroups or internal standard deviation).



Iznos indeksa  $C_p$  neposredno pokazuje je li proces može biti sposoban. Što je iznos indeksa veći to je rasipanje procesa manje.

U razvijenim zemljama danas se zahtjeva da najmanja vrijednost indeksa  $C_p$  iznosi 1,33. Taj zahtjev neke kompanije podižu na 1,67, odnosno na  $C_p \geq 2$ .





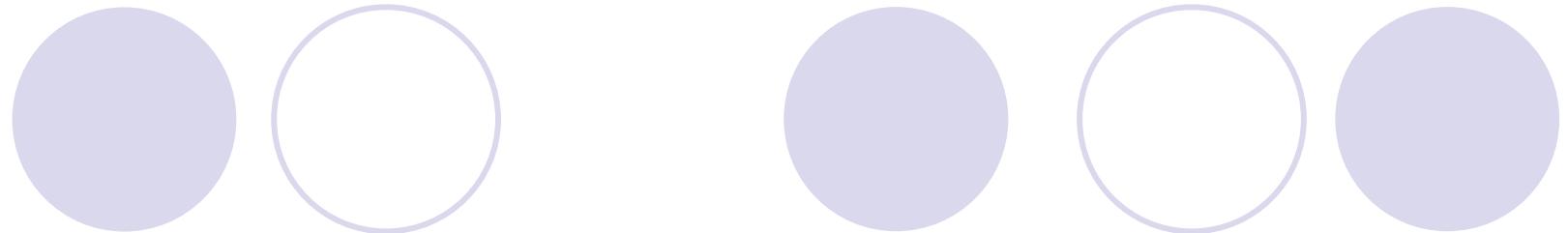
### **Omjer sposobnosti $C_r$ , (Capability Ratio)**

Iznos ovog indeksa je recipročna vrijednost indeksa  $C_p$ , odnosno:

$$C_r = 1 / C_p$$

Ako se iznos ovog indeksa prikaže u postocima ( $C_r \cdot 100, \%$ ) dobiva se postotak tolerancijskog područja koji je «iskorišten» rasponom procesa.

Za sposoban proces iznos indeksa  $C_r$  treba biti manji od 1.

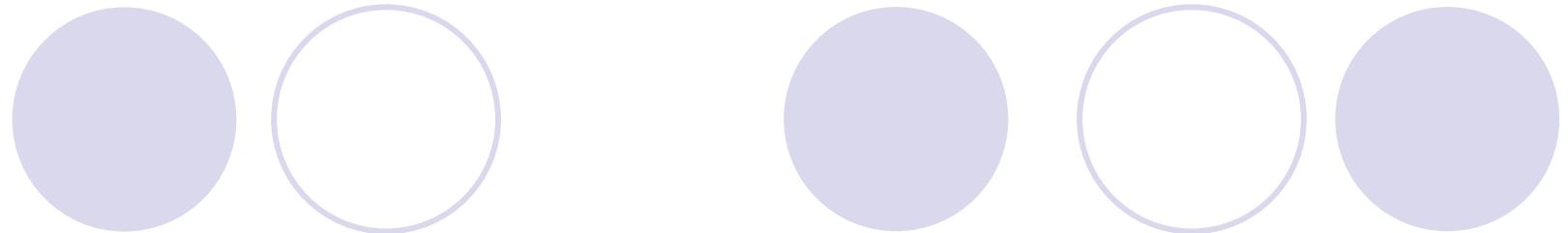


## **Donja i gornja potencijalna sposobnost $C_{pL}$ i $C_{pU}$ (Lower and Upper potential capability)**

Iznosi indeksa  $C_{pL}$  i  $C_{pU}$  računaju se korištenjem slijedećih izraza:

$$C_{pL} = (\text{sredina procesa} - L) / 3 \cdot \hat{\sigma}$$
$$C_{pU} = (U - \text{sredina procesa}) / 3 \cdot \hat{\sigma}$$

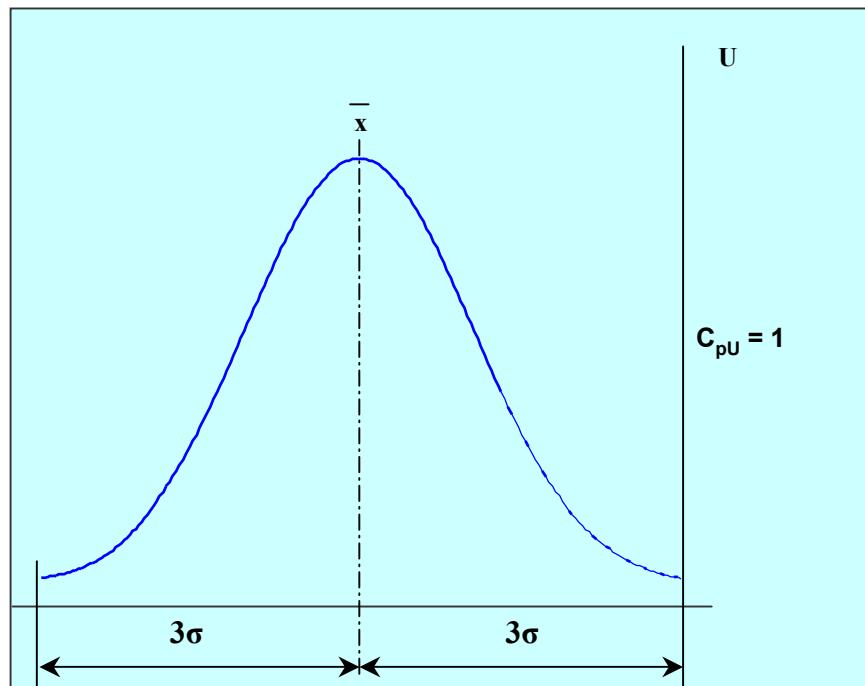
Sredina procesa je središnja linija primijenjene kontrolne karte.  
U slučaju računanja statističkih parametara iz svih podataka sredina  
procesa odgovara aritmetičkoj sredini tih podataka.

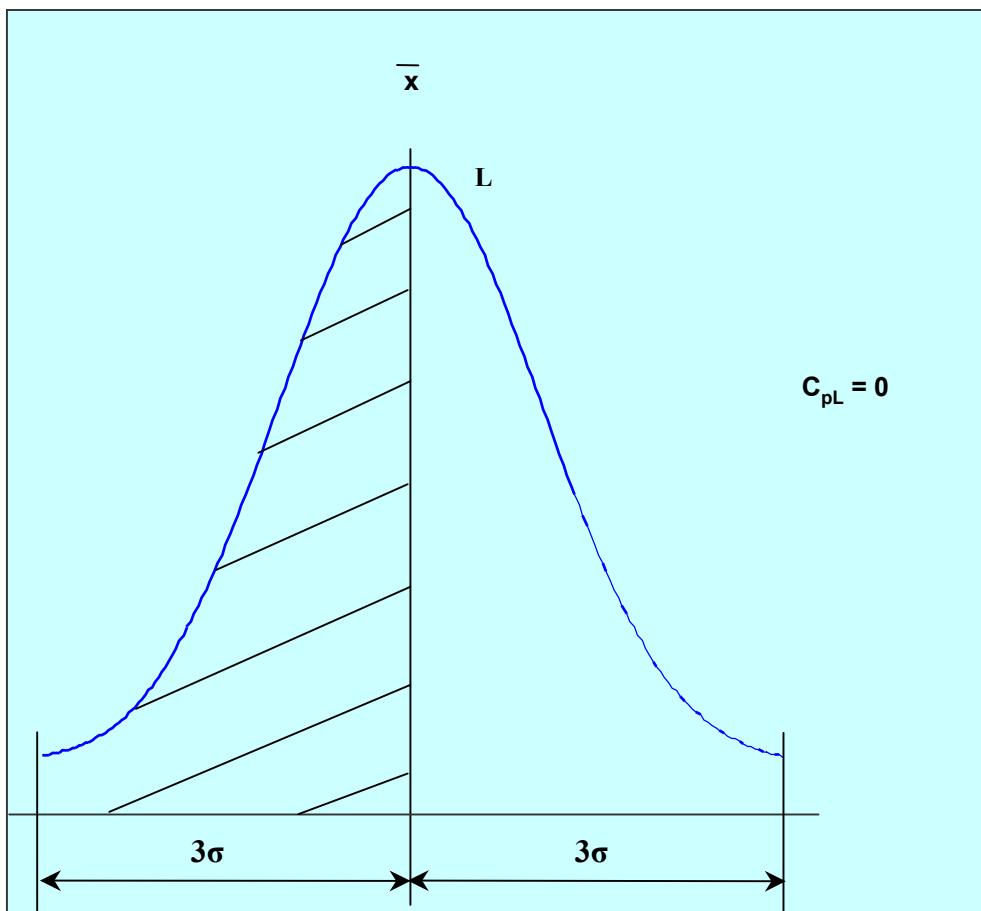
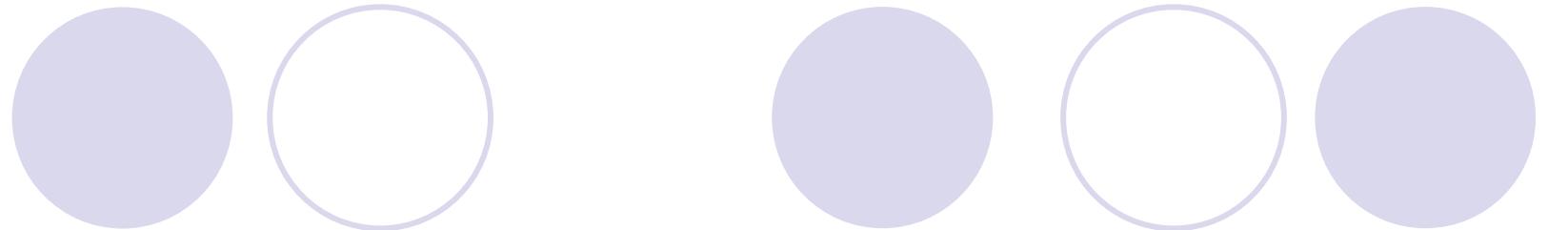


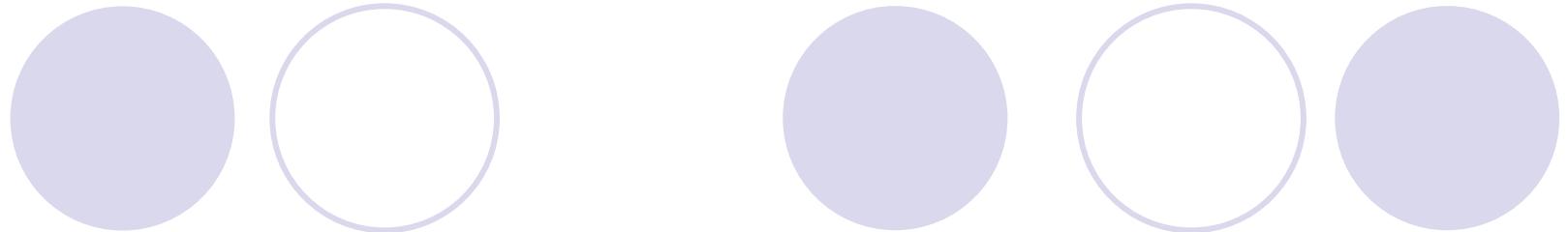
Indeksi  $C_p$  i  $C_r$  ne pokazuju kako je smješten proces u odnosu na granice specifikacija. To se može utvrditi usporedbom iznosa indeksa  $C_{pL}$  i  $C_{pU}$ :

- identični iznosi ukazuju na potpunu centriranost procesa (iznosi indeksa jednaki su iznosu indeksa  $C_p$ );
- iznos manji od 1 ukazuje na pojavu nesukladnosti;
- proces je pomaknut prema granici specifikacije manjeg iznosa indeksa.

Ovi indeksi se računaju u slučaju procjenjivanja sposobnosti procesa kada je dan jednostrani zahtjev na proces (samo jedna granica specifikacije).







## **Faktor korekcije necentriranosti k**

### **Non-centering correction**

Iznos indeksa  $C_p$  može se korigirati zbog necentriranosti računanjem faktora korekcije necentriranosti k:

$$k = \text{abs}(D - \text{sredina procesa}) / (1/2 \cdot (\text{USL} - \text{LSL}))$$

gdje je D ciljana vrijednost procesa, odnosno:

$$D = (\text{USL} + \text{LSL})/2$$

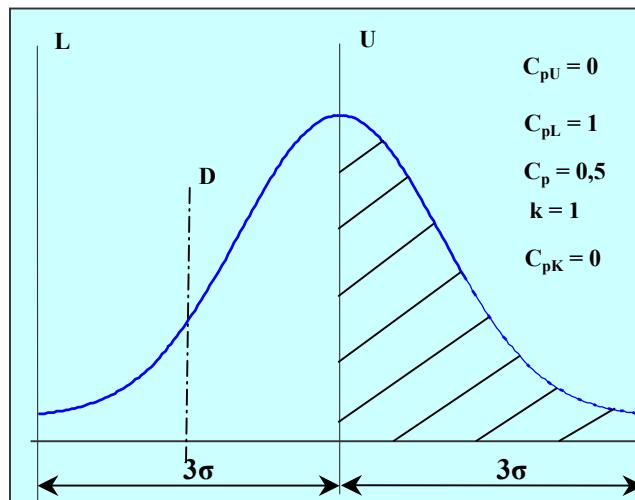
## Demonstrirana izvrsnost $C_{pk}$ Demonstrated excellence

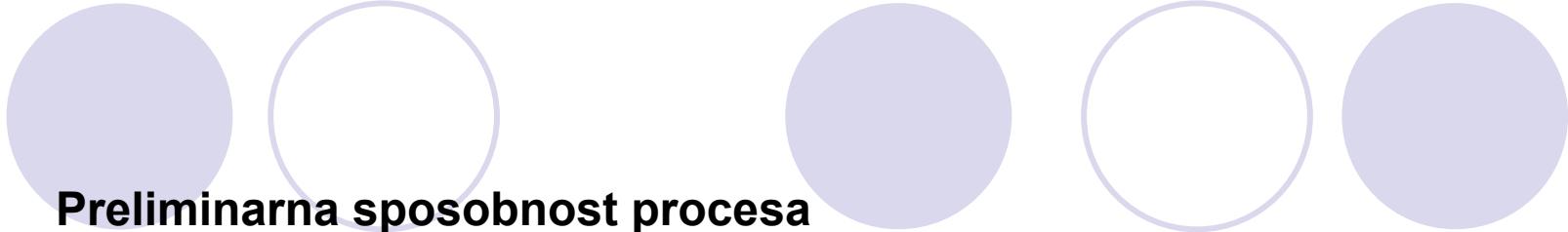
Korigirana vrijednost indeksa  $C_p$  zbog necentriranosti iznosi:

$$C_{pk} = (1 - k) \cdot C_p$$

Ako je proces idealno centriran tada je  $k$  jednak nuli i  $C_{pk} = C_p$ .

Pomicanjem procesa od ciljane vrijednosti (sredine područja tolerancija)  $k$  se povećava a  $C_{pk}$  postaje manji od  $C_p$ .





## **2. Preliminarna sposobnost procesa (Preliminary Process Capability)**

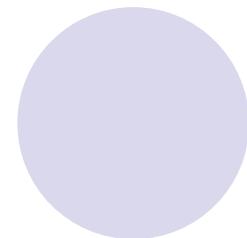
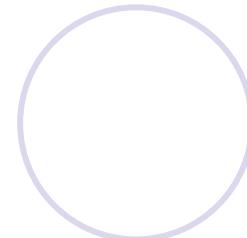
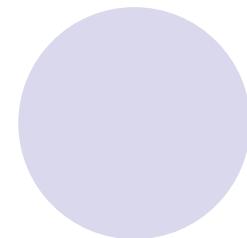
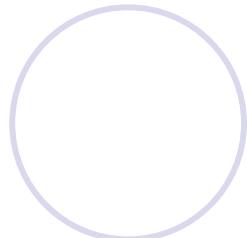
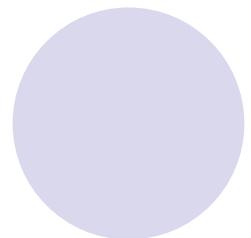
Preliminarno procjenjivanje sposobnosti procesa provodi se na početku odvijanja procesa ili nakon relativno kratkog vremena praćenja procesa.

Preporuka je da se razmatra uzorak od najmanje 100 jedinica ili kontrolna karta s najmanje 20 uzoraka.

U nazivlju indeksa se umjesto termina sposobnost (Capability) koristi termin značajka (Performance). U tom smislu se indeksi označavaju kao  $P_p$ ,  $P_{pL}$ ,  $P_{pU}$ ,  $P_{pk}$ , a računaju se na isti način kao  $C_p$ ,  $C_{pL}$ ,  $C_{pU}$ ,  $C_{pk}$ .

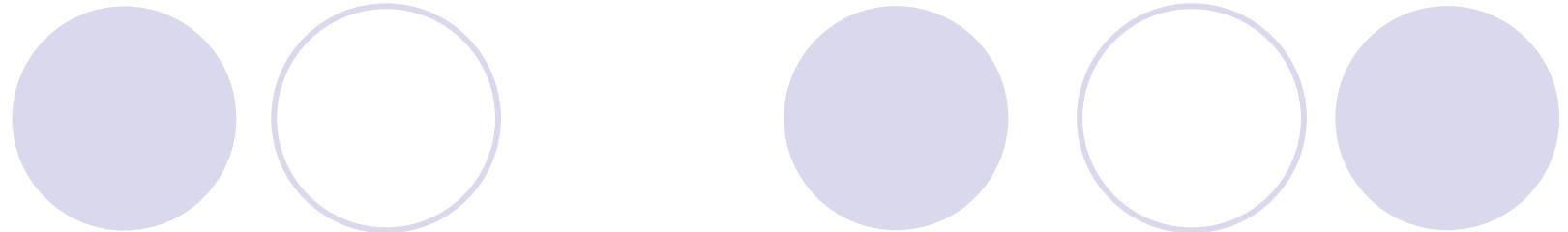
Zahtjevi na najmanje iznose indeksa  $P_p$  i  $P_{pk}$  su stroži nego za iznose indeksa  $C_p$  i  $C_{pk}$  (npr. ako je zahtjev za  $C_p \geq 1,33$  tada je ekvivalentni zahtjev za  $P_p \geq 1,67$ ).

U SPC softverima za računanje ovih indeksa koristi se ukupno standardno odstupanje.



Ukupno standardno odstupanje računa se iz izraza:

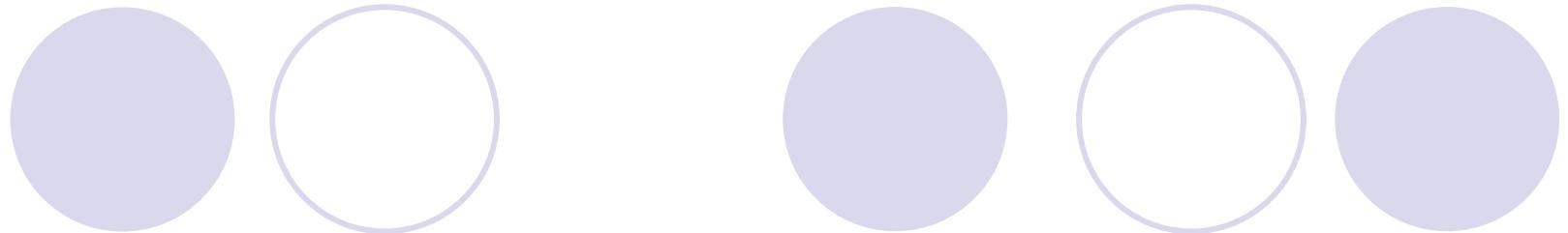
$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$



### 3. **Sposobnost u kratkom vremenskom razdoblju (Short-Term Capability)**

Za analizu sposobnosti procesa u kratkom vremenskom razdoblju često se koristi termin «analiza sposobnosti stroja» (Machine Capability Analysis).

Primjenjuje se, u pravilu, prilikom pred-preuzimanja ili preuzimanja stroja. Preporučuje se provođenje analize na uzorku od najmanje 50 jedinica. Temeljni interes je informacija o rasipanju podataka oko ciljane vrijednosti D.



## **Potencijalna sposbnost stroja $C_{pm}$ (Potential Machine Capability)**

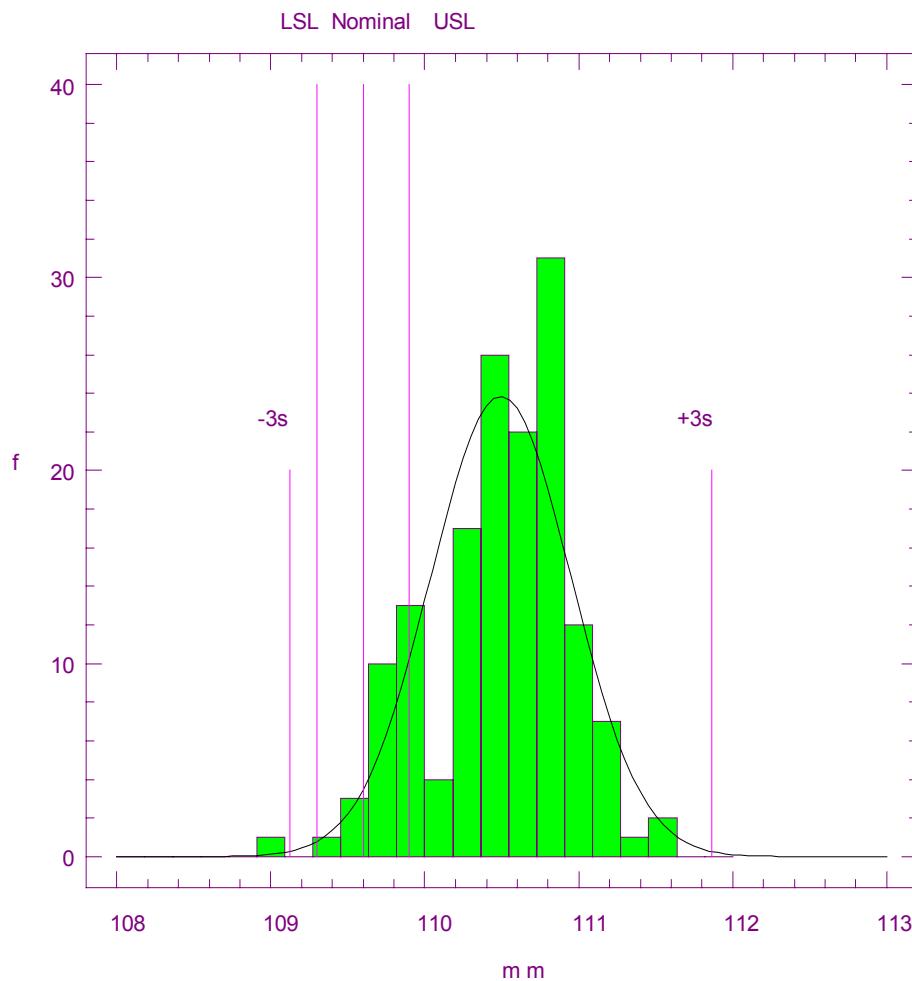
$C_{pm}$  se računa korištenjem alternativne procjene standardnog odstupanja koja sadrži efekt slučajne necentriranosti (rasipanja oko ciljane vrijednosti), odnosno:

$$= \{\sum(x_i - D)^2 / (n - 1)\}^{1/2}$$

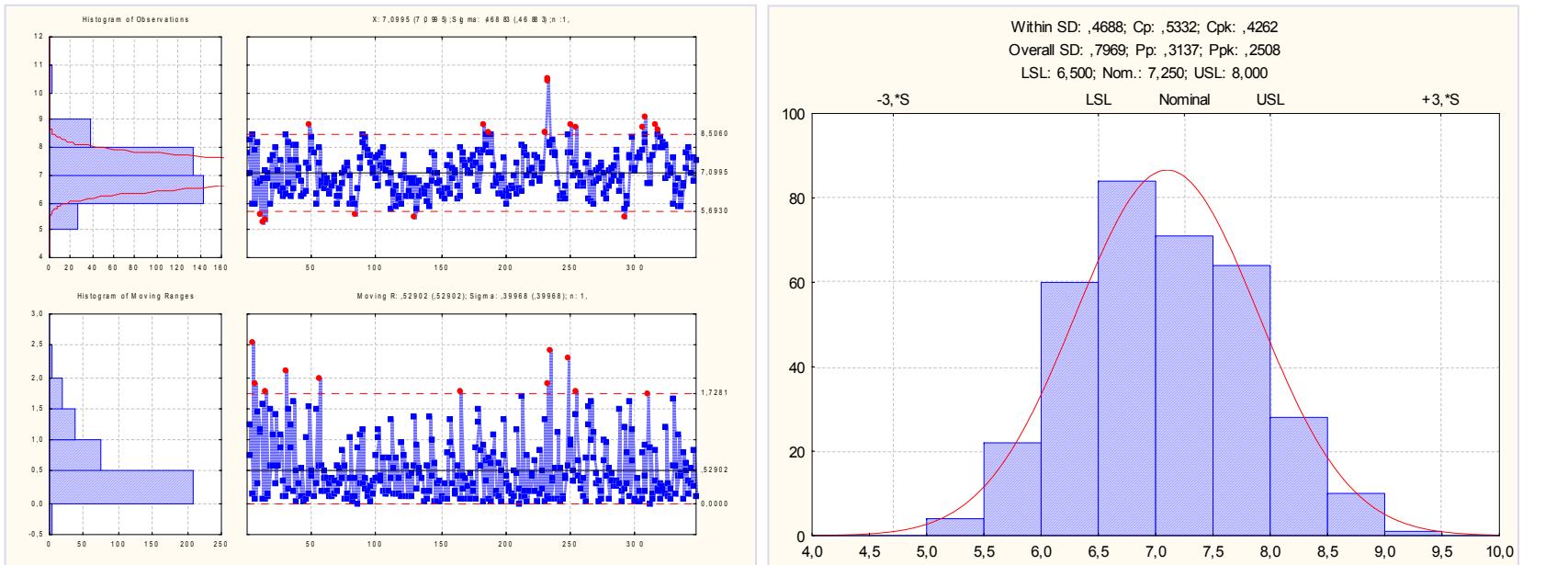
$$\hat{\sigma}_{C_{pm}} = (USL - LSL) / 6 \cdot$$

$\hat{\sigma}$

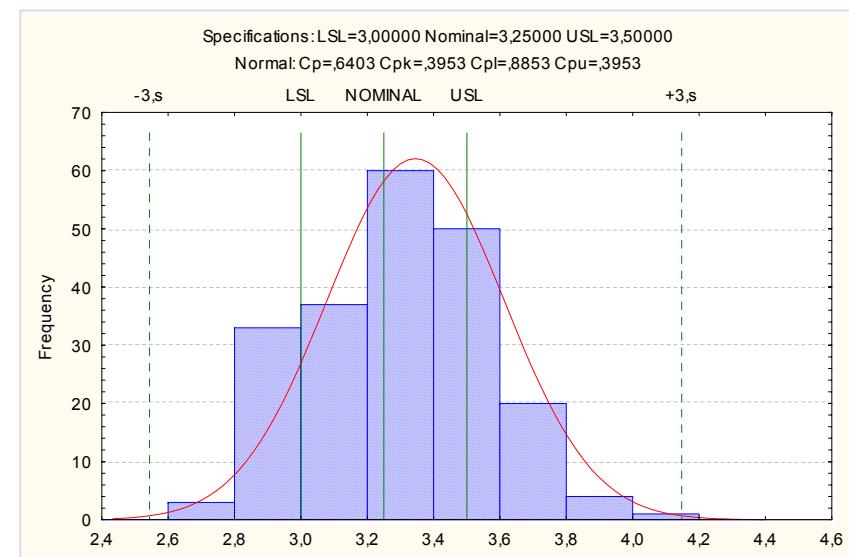
## STVARNI PRIMJERI

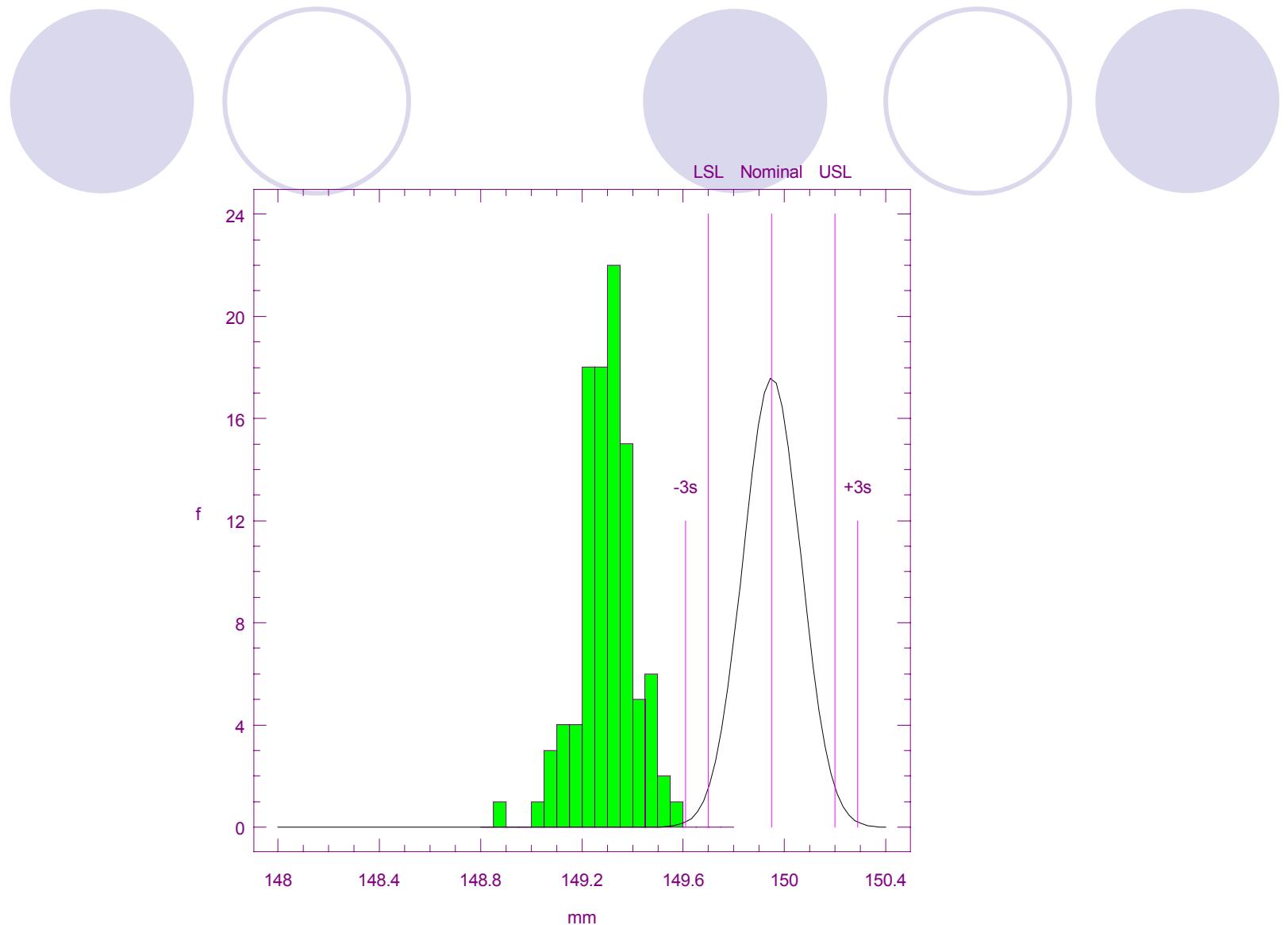


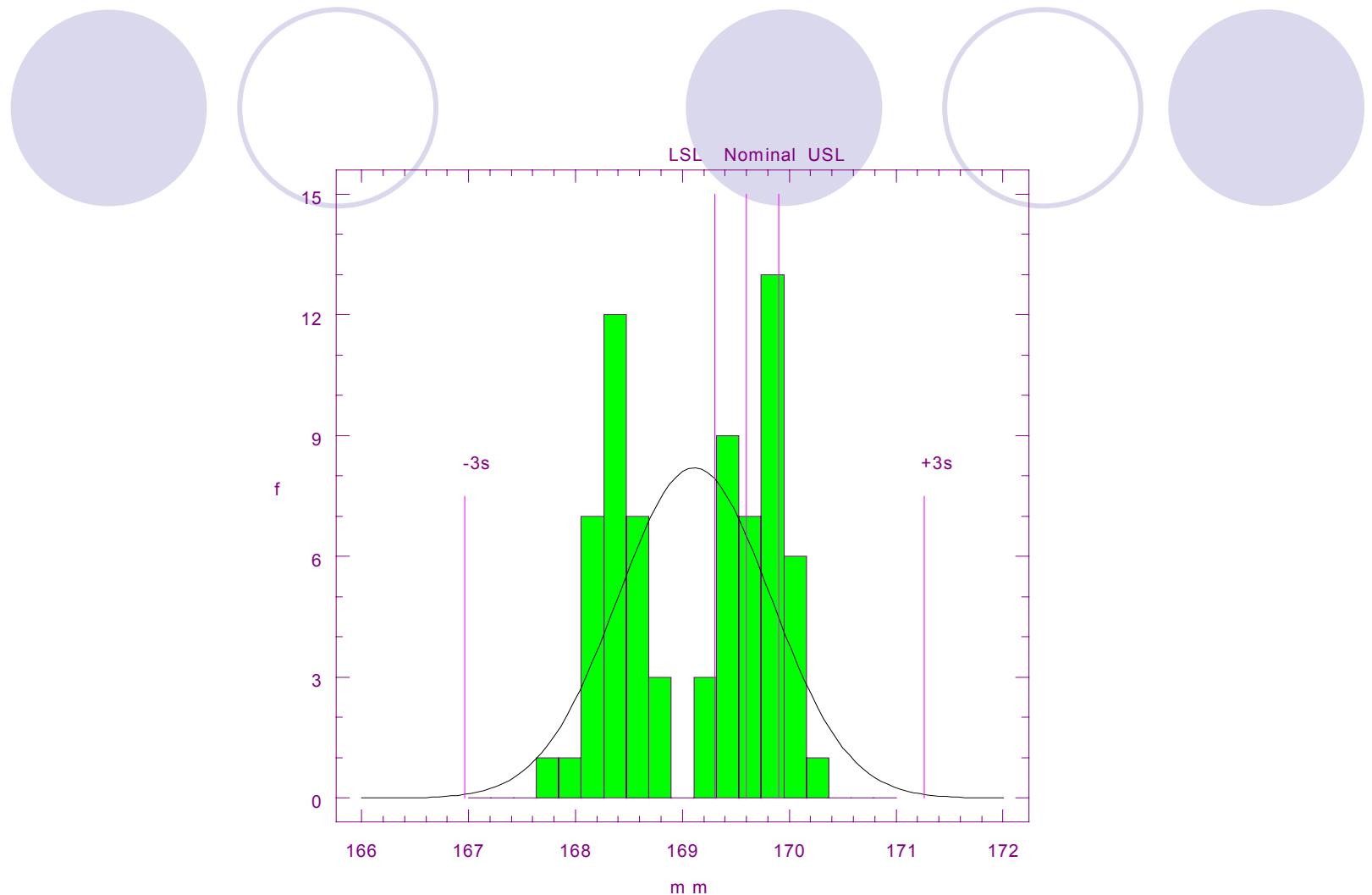
# Nesposoban proces



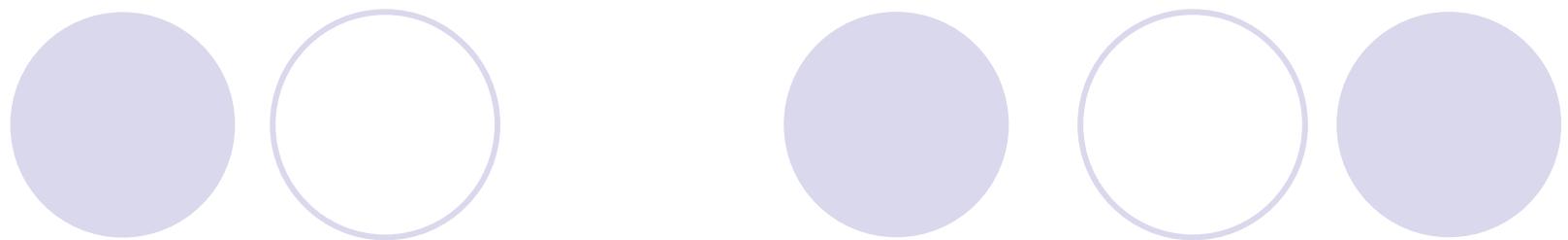
# Nekontrolirani pomaci procesa

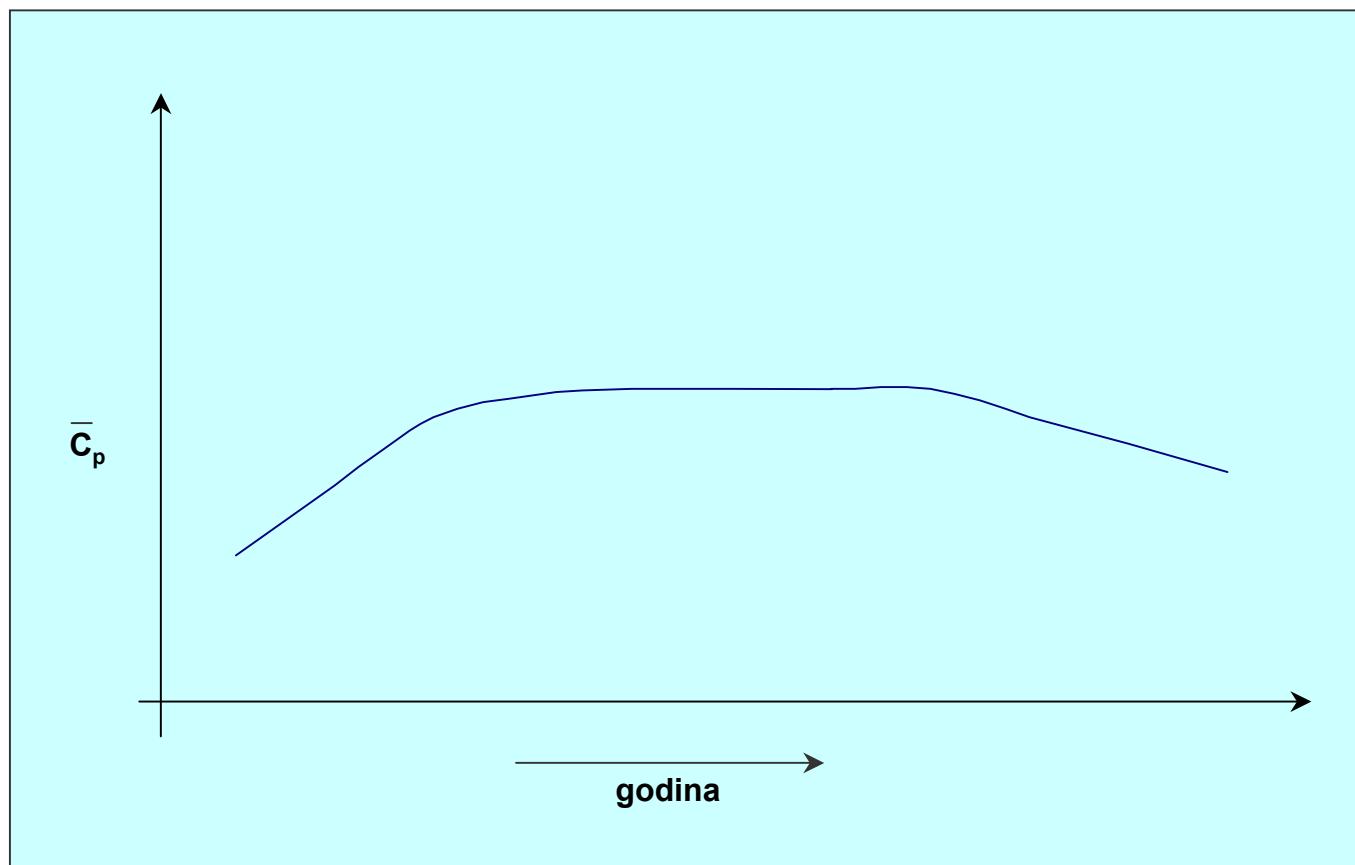
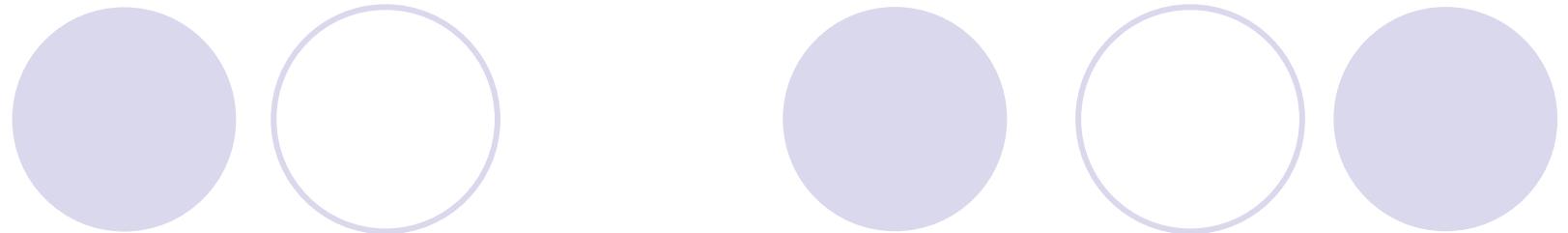






Vrlo često su pri analizi sposobnosti procesa provodi preispitivanje tolerancija. Rezultati takvih preispitivanja znaju biti iznenađujući i najčešće su rezultat loše procjene (neznanja).





LFSB



NACIONALNI LABORATORIJ ZA DULJINU  
NATIONAL LABORATORY FOR LENGTH

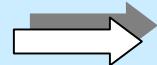
# **ANALIZA MJERNOG SUSTAVA U PROIZVODNIM UVJETIMA**

## PROCJENA MJERNOG SUSTAVA

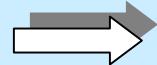
TRI  
OSNOVNA  
PITANJA



Ima li mjerni sustav zadovoljavajuće razlučivanje?



Je li mjerni sustav stabilan?



Je li mjerni sustav sposoban za kontrolu procesa  
(proizvoda)?

## POTREBE ZA ANALIZOM MJERNOG SUSTAVA

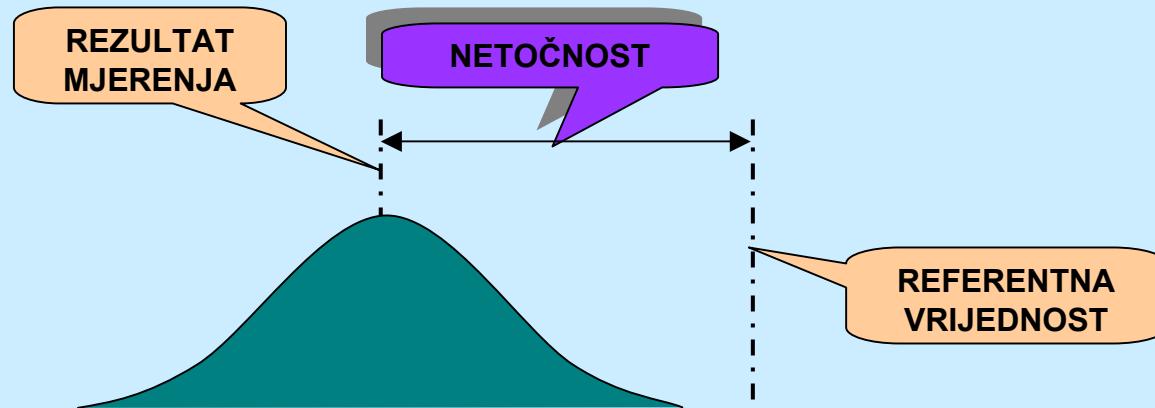
- Preuzimanje nove mjerne opreme
- Usporedba mjernih karakteristika različitih mjernih sredstava
- Utvrđivanje sustavnih pogrešaka
- Usporedba mjernih karakteristika prije i poslije popravka mjerne opreme
- Određivanje sastavnica varijacija procesa mjerenja i ocjenjivanje prihvatljivosti za kontrolu proizvodnog procesa.

# ELEMENTI ZA ANALIZU MJERNOG SUSTAVA

1. NETOČNOST
2. NESTABILNOST
3. NELINEARNOST
4. PONOVLJIVOST
5. OBNOVLJIVOST

# NETOČNOST

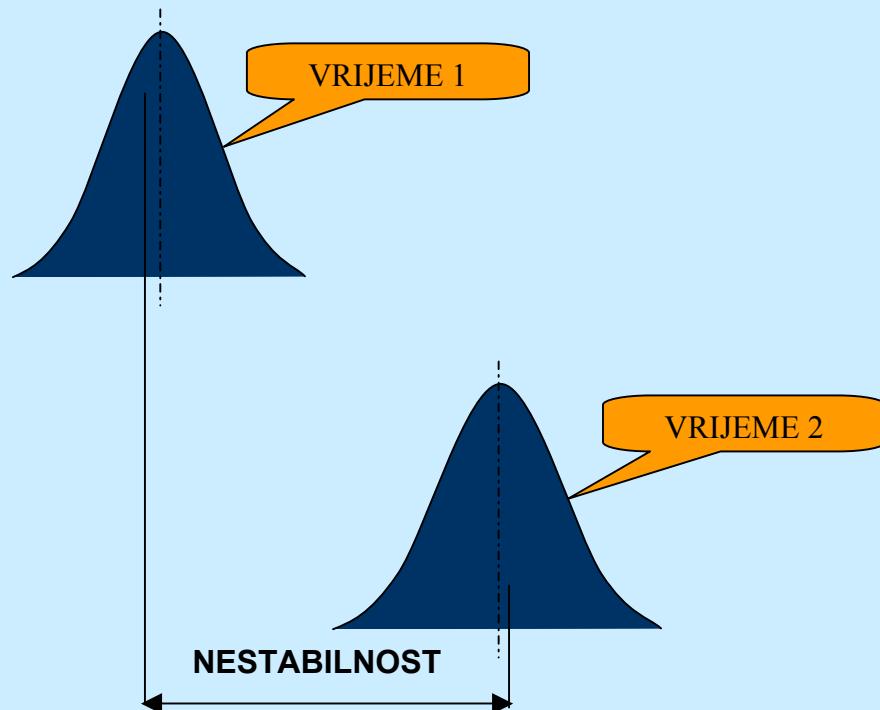
Netočnost je razlika između dobivenog rezultata mjerenja i referentne vrijednosti.



Referentna vrijednost je vrijednost koja služi kao dogovorenna referenca za mjernu vrijednost, a može biti utvrđena na osnovi srednje vrijednosti rezultata više mjerena provedenih mjernom opremom više razine točnosti.

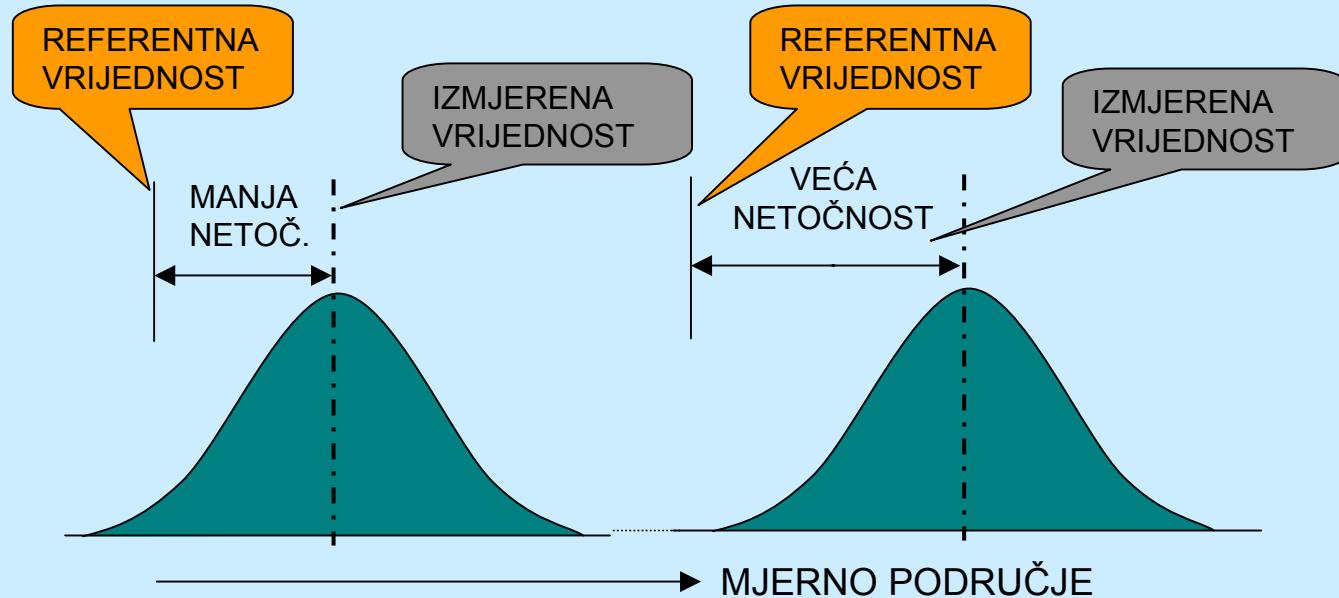
## NESTABILNOST

Nestabilnost je totalna varijacija mjerena jedne karakteristike tijekom dužeg vremenskog razdoblja.

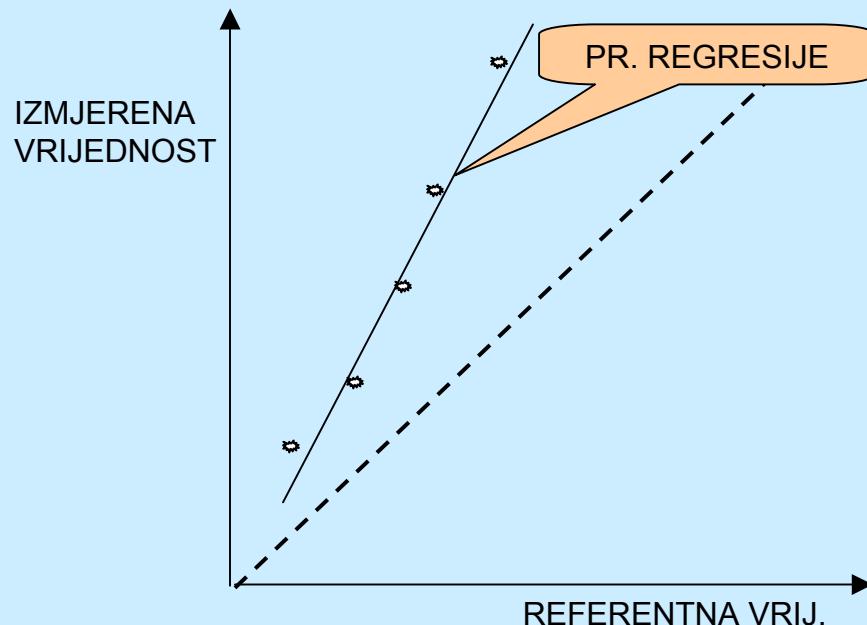


# NELINEARNOST

Nelinearnost je stalan (linearni) rast ili pad vrijednosti pogreške rezultata mjerjenja (netočnosti) unutar određenog dijela mjernog područja instrumenta.



## NELINEARNOST



PRAVAC REGRESIJE  $y = ax + b$

$$a = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} \quad b = \frac{\sum y - a \sum x}{n}$$

Primjer:  $(y = 1,022x - 0,002)$  mm

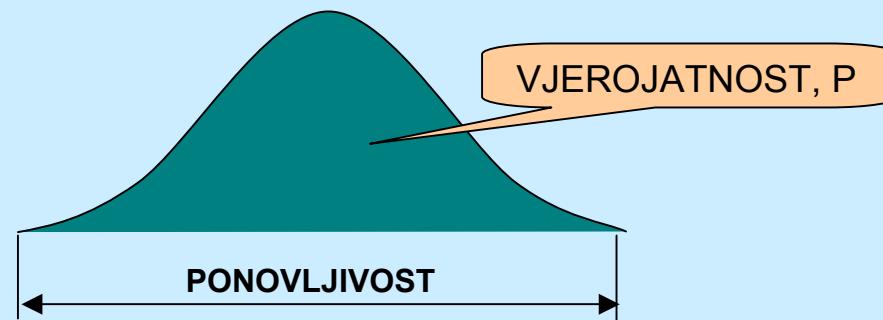
ODSTUPANJE OD NELINEARNOSTI

0,022 mm/mm

22  $\mu$ m/mm

## PONOVLJIVOST

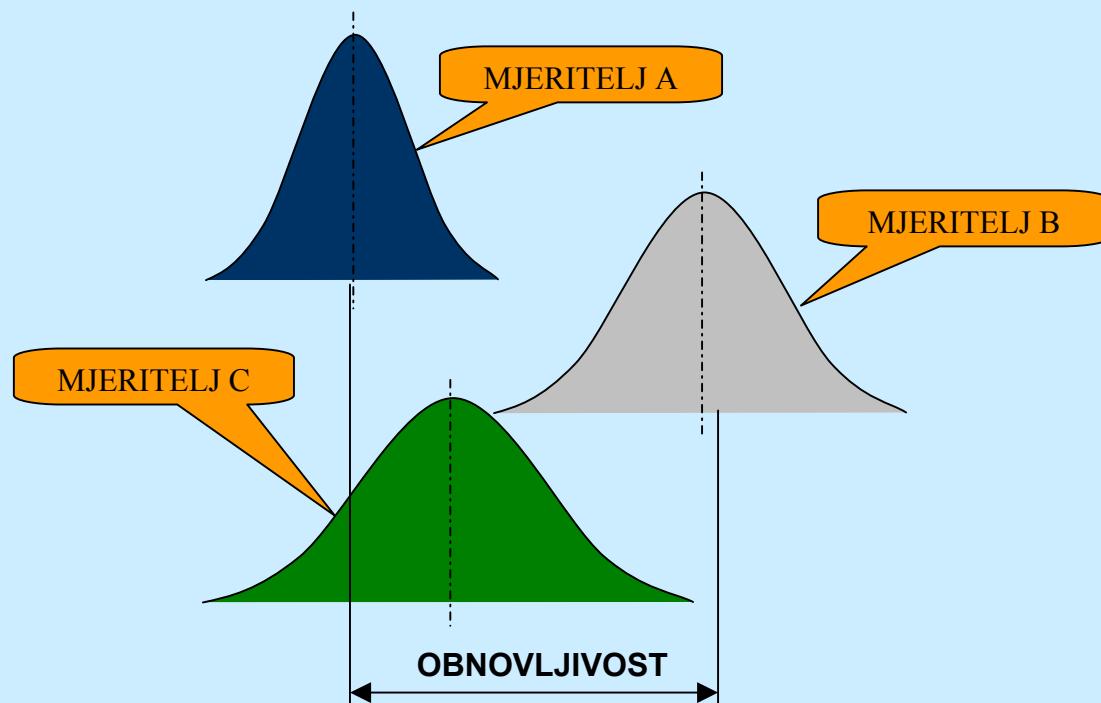
Ponovljivost je rasipanje rezultata mjerenja dobiveno od strane jednog mjeritelja pri višestrukom mjerenu iste karakteristike dijela uz korištenje istog instrumenta.



Ponovljivost u najvećoj mjeri određuje utjecaj mjerila u varijaciji mjernog sustava.

## OBNOVLJIVOST

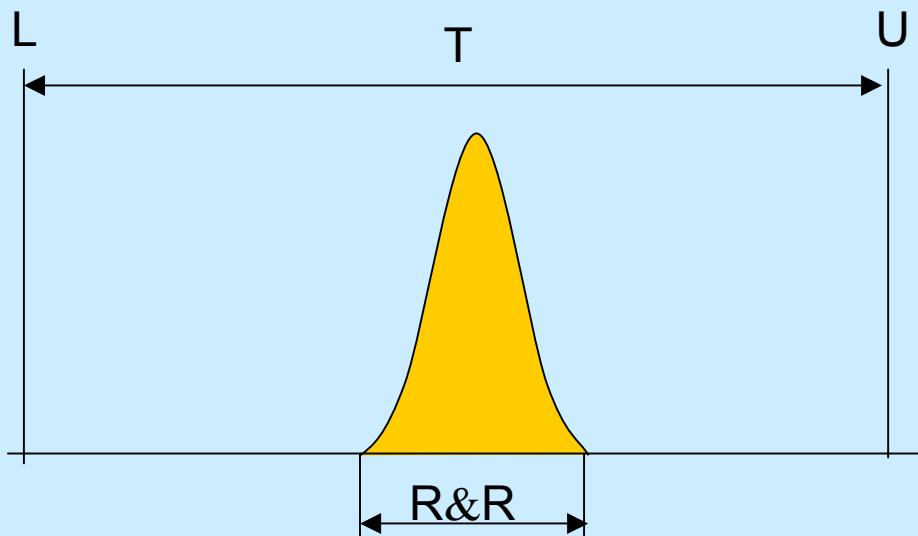
Obnovljivost je rasipanje rezultata mjerenja dobiveno od strane većeg broja mjeritelja pri višestrukom mjerenu iste karakteristike na istim dijelovima uz korištenje istog ili različitog mjernog instrumenta.



Obnovljivost u najvećoj mjeri određuje utjecaj mjeritelja u varijaciji mjernog sustava.

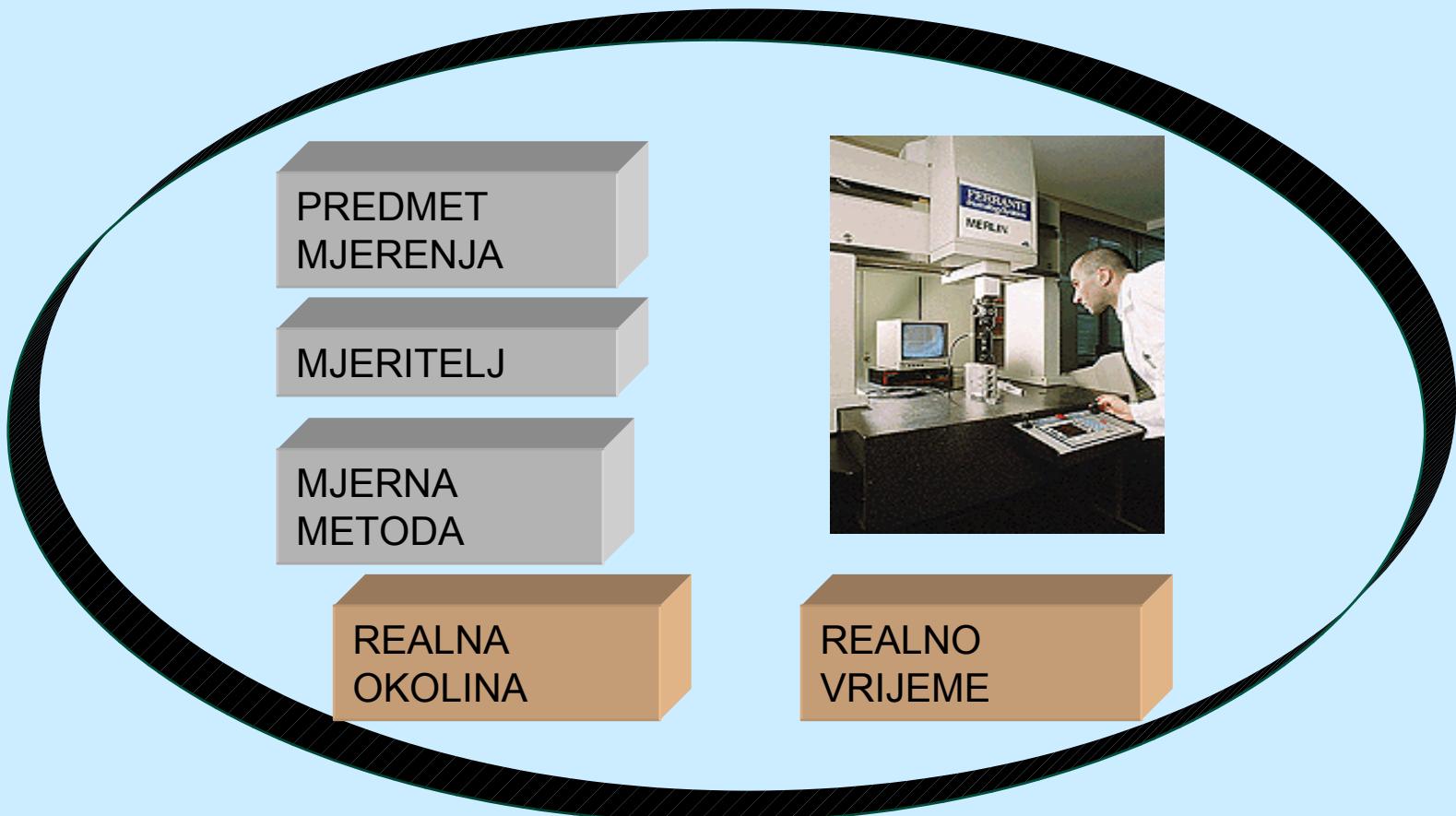
## SPOSOBNOST MJERNOG SUSTAVA

Sposobnost mjernog sustava predstavlja udio varijabilnosti mjernog sustava (R&R) iskazanog postotkom područja dopuštenog odstupanja (T).



$$\text{SPOSOBNOST MJERNOG SUSTAVA} = \frac{R \& R}{T} \cdot 100 \%$$

## IZVORI VARIJABILNOSTI



# PROCJENA SPOSOBNOSTI MJERNOG SUSTAVA

## METODA ARITMETIČKIH SREDINA I RASPONA $(\bar{X} - R)$

**VARIJACIJA OPREME**  
*(ponovljivo st)*

$$EV = 5,15 \frac{\bar{R}}{d_2} ; \bar{R} = \frac{\sum R}{g}$$

**VARIJACIJA MJERITELJA**  
*(obnovljivo st)*

$$AV = \sqrt{\left( 5,15 \frac{R_0}{d_2^*} \right)^2 - \left( 5,15 \frac{\bar{R}}{d_2} \right)^2 \left( \frac{1}{n \cdot r} \right)}$$

$$R_0 = \bar{X}_{\max} - \bar{X}_{\min}$$

**VARIJACIJA DIJELOVA**

$$PV = 5,15 \cdot \frac{R_p}{d_2^\otimes}$$



**PONOVLJIVOST I OBNOVLJIVOST**

$$R \& R = \sqrt{EV^2 + AV^2}$$

**UKUPNA VARIJACIJA**

$$TV = \sqrt{(R \& R)^2 + PV^2}$$



## PROCJENA SPOSOBNOSTI MJERNOG SUSTAVA

Ukoliko je udio R&R u tolerancijskom polju T ili ukupnoj varijaciji TV:

< 10 %



mjerni sustav je zadovoljavajući

10 % - 30%



mjerni sustav se može smatrati zadovoljavajućim  
(ovisno o značajnosti primjene)

>30 %



potrebna su poboljšanja u mjernom sustavu