1. Numerička matematika

1.1. Greške

Prisjetimo se s prve godine da tangenta (ako je funkcija ima) u okolini točke x_0 dobro aproksimira ponašanje funkcije u okolini točke x_0.

Želimo li bolje aproksimacije, umjesto tangente (pravca), funkciju možemo aproksimirati i polinomima višeg stupnja. Podizanjem stupnja polinoma sve do u beskonačno, dobit ćemo "beskonačne polinome" tj. Taylorove redove za funkciju f oko točke x_0:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots . \end{aligned}$$

Za funkcije koje imaju beskonačno mnogo derivacija, postoji interval oko x_0 u kojem se funkcijska vrijednost $f(x)$ može dobiti zbrajanjem članova na desnoj strani. Očito je da mora postojati bar jedna takva točka, jer ako uvrstimo x_0, dobivamo $f(x_0) = f(x_0)$ (svi osim prvog člana na desnoj strani su jednaki nula!).

Uz pretpostavku da red konvergira, tj. da je zbroj desne strane jednak funkcijskoj vrijednosti, možemo kao aproksimaciju za funkcijsku vrijednost umjesto beskonačno mnogo članova uzeti samo konačno mnogo njih. Tada ćemo umjesto Taylorovog reda dobiti Taylorov polinom. Odmah je jasno da smo uzimanjem samo konačno mnogo članova napravili neku grešku. Dakle za Taylorov polinom vrijedi

$$f(x) = p(x) + R_{n+1}(x), \quad R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

gdje je

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \end{aligned}$$

a R_{n+1} tzv. greška odbacivanja, pri čemu je ξ neki broj između x i x_0.

Na primjer, funkcija

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

može se razviti u Taylorov red oko $x_0 = 0$ (tzv. Mac Laurinov red). Deriviranjem dobivamo:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = 0!(1-x)^{-1}, & f(0) &= 1,\\
f'(x) &= (-1)\cdot(-1)(1-x)^{-2} = (1-x)^{-2} = 1!(1-x)^{-2}, & f'(0) &= 1!,\\
f''(x) &= (-2)\cdot(-1)(1-x)^{-3} = 2\cdot 1(1-x)^{-3} = 2!(1-x)^{-3}, & f''(0) &= 2!,\\
f'''(x) &= (-3)\cdot(-1)\cdot 2!(1-x)^{-3} = 3!(1-x)^{-3}, & f'''(0) &= 3!,\\
\vdots &= \quad\vdots & \vdots &= \vdots\\
f^{(n)}(x) &= (-n)(-1)(n-1)!(1-x)^{-(n+1)} = n!(1-x)^{-(n+1)}, & f^{(n)}(0) &= n!.
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem, dobivamo Mac Laurinov red:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots.$$

Ovaj razvoj neće vrijediti za svaki x. Očito je da ne vrijedi za, na primjer: $x = 1, -1$. Međutim, ovaj razvoj ne vrijedi i za mnoge druge x-ove. Recimo, ako je $x > 1$, svaki novi dodani član je veći od prethodnog, pa suma ne može težiti u negativan broj!

Uz malo znanja o redovima, nije teško odrediti radijus konvergencije dobivenog reda. Radijus konvergencije je broj r takav da u intervalu $\langle x_0 - r, x_0 + r\rangle$ funkcija f i njezin red daju jednake vrijednosti.

Za prethodni primjer, nije teško pokazati da mora biti $|x| < 1$, tj. da je radijus konvergencije prethodnog reda jednak 1.

Zamijenimo sad red

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots, \quad |x| < 1$$

Taylorovim polinomom. Zanima nas kolika je greška ako smo uzeli samo članove s potencijama do uključivo n.

Greška je:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

U našem slučaju je

$$f^{(n+1)}(x) = (n+1)!(1-x)^{-(n+2)} = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}},$$

pa je

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{(1-\xi)^{n+2}} x^{n+1},$$

a ξ između 0 i x.

Zadatak 1.1 *Ako znamo red za*

$$f(x) = \frac{1}{1-x},$$

možemo li lako napisati redove za

(a) $\frac{1}{1+x}$, (b) $\frac{1}{1+x^2}$, (c) $\ln(1+x)$, (d) $-\frac{1}{(1+x)^2}$?

Rješenje:

(a) Zamjenom $x \to -x$ dobivamo

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, \quad |x| < 1.$$

(b) Zamjenom $x \to x^2$ u redu (a) dobivamo

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots, \quad |x| < 1.$$

(c) Integriranjem reda (a) član po član, dobivamo

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots, \quad |x| < 1.$$

(d) Deriviranjem reda (a) član po član, dobivamo

$$-\frac{1}{(1+x)^2} = -1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 + \cdots + (-1)^n n x^{n-1} + \cdots, \quad |x| < 1.$$

□

Zadatak 1.2 *Vrijednost* $\ln 1.5$ *aproksimiramo početnim komadom Taylorovog reda funkcije* $\ln(x+1)$ *oko točke* 0. $T_n(x)$ *je početni komad tog reda, kojemu je najveća potencija od* x *jednaka* n, *a* $R_{n+1}(x)$ *odgovarajuća greška odbacivanja.*

(a) *Napišite* $T_n(x)$ *i ocijenite* $|R_{n+1}(x)|$ *za* $0 \le x \le 0.5$.

(b) *Ako* $T_n(0.5)$ *zbrajamo računalom (recimo u dvostrukoj točnosti), tako da je greška odbacivanja po apsolutnoj vrijednosti manja ili jednaka* ε, $(0 < \varepsilon \ll 1)$, *da li će izračunati rezultat dobro aproksimirati vrijednost* $\ln 1.5$, *tj. hoće li greške aritmetike računala biti velike? Objasnite.*

Rješenje:

(a) Mac Laurinov red za funkciju $f(x) = \ln(x+1)$ smo već izveli u prethodnom zadatku. Taj red smo mogli dobiti i direktnom upotrebom formula za Taylorov red, što je u ovom slučaju korisno, jer nam treba ocjena greške. Dakle, imamo:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(1+x), & f(0) &= 0,\\
f'(x) &= 0!(1+x)^{-1}, & f'(0) &= 1,\\
f''(x) &= -(1+x)^{-2} = -1!(1+x)^{-2}, & f''(0) &= -1!,\\
f'''(x) &= 2!(1+x)^{-3}, & f'''(0) &= 2!,\\
\vdots &= \quad \vdots & \vdots &= \vdots\\
f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}, & f^{(n)}(0) &= (-1)^{n-1}(n-1)!.
\end{aligned}$$

Za ocjenu greške Taylorovog polinoma treba nam

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n!(1+x)^{-(n+1)},$$

pa Taylorov polinom do uključenog člana s potencijom n glasi:

$$T_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{(n-1)}\frac{x^n}{n},$$

a pritom učinjena greška je

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!(1+\xi)^{n+1}}x^{n+1} = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}x^{n+1},$$

pri čemu je ξ između 0 i x. Ocijenimo sad grešku za $0 \le x \le 0.5$:

$$\begin{aligned}
|R_{n+1}(x)| &= \left|\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}x^{n+1}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)|1+\xi|^{n+1}}\\
&= (\text{smanjivanjem nazivnika povećavamo razlomak})\\
&= (\text{zbog } x > 0 \text{ nazivnik najmanji za } \xi = 0)\\
&\le \frac{|x|^{n+1}}{n+1} = (\text{zbog } x > 0 \text{ je } |x| = x) \le \frac{x^{n+1}}{n+1}.
\end{aligned}$$

Prethodna ocjena vrijedi za svaki $0 < x < 1$. Posebno, ako je $x < 0.5$, dobivamo

$$|R_{n+1}(0.5)| \le \frac{0.5^{n+1}}{n+1}.$$

Primijetimo da porastom n ta greška vrlo brzo opada.

(b) U svim zadacima tog tipa prvo treba vidjeti kako dobivamo rezultat. Ako ga dobivamo zbrajanjem (može i negativnih brojeva), opasnost nastupa **isključivo** ako oduzimanjem od (relativno obzirom na rezultat) velikih brojeva dobijemo male.

Najprije pogledajmo veličinu $\ln(1.5)$. Lako je ocijeniti da je $0 < \ln(1.5) < 1$ (preciznije $\ln(1.5) \approx 0.4$). Sad još treba vidjeti kakvi se brojevi javljaju u Mac Laurinovom redu:

$$T_n(0.5) = 0.5 - \frac{0.5^2}{2} + \frac{0.5^3}{3} - \frac{0.5^4}{4} + \cdots + (-1)^{(n-1)} \frac{0.5^n}{n}.$$

Pozitivne potencije od 0.5 su brojevi koji su manji od 0.5, tako da članovi reda po apsolutnoj vrijednosti brzo opadaju. Uzimamo toliko članova dok ne bude zadovoljeno

$$|R_{n+1}(0.5)| \leq \varepsilon,$$

tj. greška odbacivanja će biti malena, pa će odgovarajući polinom dobro aproksimirati funkciju.

Iako se u redu javlja oduzimanje, oduzimaju se samo (relativno) mali brojevi (obzirom na rezultat), pa će rezultat dobiven zbrajanjem Mac Laurinovog reda biti točan.

□

Zadatak 1.3 *Broj*

(a) e^{-10}, (b) $\operatorname{sh}(-10)$, (c) $\operatorname{arctg} 0.7$

računamo putem početnog komada MacLaurinovog reda za odgovarajuću funkciju, koristeći aritmetiku računala, (recimo, dvostruku točnost) sve dok posljednji član u zbroju ne padne ispod zadane točnosti ε ($0 < \varepsilon \ll 1$). Hoće li će takva aproksimacija dati približno točan rezultat ili ne? Objasnite!

Rješenje:

(a) Prisjetimo se reda za

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

(koji konvergira za svaki $x \in \mathbf{R}$). Odmah je vidljivo da je broj e^{-10} dosta malen broj koji se nalazi između 2^{-10} i 3^{-10}.

Uvrštavanjem -10 u red, dobivamo

$$e^{-10} = 1 - \frac{10}{1!} + \frac{10^2}{2!} - \frac{10^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{10^n}{n!} + \cdots.$$

Ako zbrojimo konačno mnogo članova tog reda, pogledajmo kolika će biti greška odbacivanja:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1},$$

pri čemu je ξ između -10 i 0. Grešku odbacivanja sad lako ocijenimo:

$$|R_{n+1}(x)| = \frac{e^\xi}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq (e^\xi < 1 \text{ jer } \xi \text{ negativan}) \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Dakle,

$$|R_{n+1}(10)| \leq \frac{10^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ako je posljednji član koji smo zbrojili (po apsolutnoj vrijednosti) ispod ε, tj. ako je

$$\frac{10^n}{n!} \leq \varepsilon,$$

onda je

$$|R_{n+1}(10)| \leq \frac{10^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|10|^n}{n!} \cdot \frac{10}{n+1} \leq \frac{10\varepsilon}{n+1},$$

očito $|R_{n+1}(10)|$ mali broj. Drugim riječima, odbacivanjem članova reda napravili smo relativno malu pogrešku.

Sad se pitamo možemo li zbrajanjem članova Taylorovog polinoma dobiti točan rezultat. To ovisi samo o aritmetici računala. Vratimo se članovima Taylorovog polinoma ako uvrstimo -10. Primjećujemo da su članovi različitih predznaka, da prvo rastu (recimo $10^7/7!$ je poprilično velik broj), a onda padaju (po apsolutnoj vrijednosti), a rezultat je malen broj. Taj malen broj mogli smo dobiti samo tako da se članovi oduzimanjem skrate. Dakle, iako je greška odbacivanja mala, rezultat je pogrešan, jer smo koristili aritmetiku računala.

(b) Funkcije sh, ch definiraju se kao

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Nadalje,

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

Pitanje je kolika je veličina broja $\operatorname{sh}(-10)$. Uvrštavanjem u definiciju za sh dobivamo:

$$\operatorname{sh}(-10) \approx -\frac{e^{10}}{2},$$

jer je e^{-10} zanemarive veličine obzirom na e^{10}. Drugim riječima, $|\operatorname{sh}(-10)|$ je vrlo velik broj. Pogledajmo kako ćemo dobiti Mac Laurinov red za sh (i ch) znajući red za

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Red za e^{-x} onda je

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Oduzimanjem ta dva reda (član po član) i dijeljenjem s 2 dobivamo

$$\operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad x \in \mathbf{R}.$$

(Red se lako pamti jer su mu članovi isti kao i u redu za sinus, samo svi imaju pozitivne predznake članova.) Na sličan način, ali zbrajanjem imamo

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Budući da red konvergira za svaki $x \in \mathbf{R}$, a odbacivanjem smo napravili malu pogrešku, (jer zbrajamo članove sve dok posljednji nije manji od ε) pitanje je samo koliku smo pogrešku napravili korištenjem aritmetike računala.

Budući da je rezultat po apsolutnoj vrijednosti velik broj, a dobili smo ga zbrajanjem negativnih brojeva (svi članovi u redu su negativni ako uvrstimo -10), rezultat mora biti točan.

(c) Prisjetimo se prvog zadatka. Tamo smo izveli red za

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots, \quad |x| < 1.$$

Integriranjem tog reda član po član, dobivamo

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, \quad |x| < 1.$$

Provjerimo koliki je $\operatorname{arctg} 0.7$. Približno je $\sqrt{3}/3 < 0.7 < 1$, pa je $\pi/6 < \operatorname{arctg} 0.7 < \pi/4$, tj. broj je reda veličine 1.

Red ima i pozitivne i negativne članove, međutim članovi brzo opadaju, pa ne dolazi do kraćenja velikih brojeva koji bi rezultirali pogrešnim rezultatom. Dakle, aproksimacija daje približno točan rezultat.

□

Zadatak 1.4 *Broj* $\operatorname{ctg} \frac{75\pi}{4}$ *računamo putem početnih komada MacLaurinovih redova za funkcije* $\cos x$ *i* $\sin x$ *koristeći aritmetiku računala, (recimo, dvostruku točnost) sve dok posljednji član u svakom od zbrojeva ne padne ispod zadane točnosti* ε *(*$0 < \varepsilon \ll 1$*). Da li će takva aproksimacija dati približno točan rezultat ili ne? Objasnite! Ako ne, može li se to nekako poboljšati?*

Rješenje: Rezultat je relativno mali broj i to -1.

Na predavanju ste vidjeli da red za sinus neće biti dobar ako je $|x|$ velik broj (članovi rada su suprotnih pradznaka i zbrajanjem se skrate). Slično vrijedi i za red za kosinus. Prema tome, ovako kao je red napisan, iz dva loša rezultata, dijeljenjem nećemo dobiti ništa bolje.

Popravak:

$$\operatorname{ctg} \frac{75\pi}{4} = \operatorname{ctg} \left(18\pi + \frac{3\pi}{4} \right) = \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4}.$$

Rezultat će biti bitno bolji, ali $3\pi/4$ je još uvijek veće od 1.

Može i još bolje:

$$\sin \frac{3\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4}, \quad \cos \frac{3\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4},$$

pa je

$$\operatorname{ctg} \frac{75\pi}{4} = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}.$$

Sada smo sigurni da će redovi za sinus i kosinus biti dobri i u aritmetici računala, jer je $\pi/4 < 1$, pa članovi u Taylorovom redu brzo opadaju. □