1. Binomne i normalne slučajne varijable

Primjer 1. U 2000 obitelji s četvero djece (uz uvjet da je vjerojatnost rođenja dječaka i djevojčice ista), nađite koliki je očekivani broj obitelji koje imaju

(a) barem jednog dječaka,

(b) točno dva dječaka,

(c) jednu ili dvije djevojčice,

(d) nemaju djevojčica?

Radi se o binomnoj slučajnoj varijabli, kod koje je $n = 2000$.

(a) U ovom je slučaju p, tj. vjerojatnost uspjeha ako se u jednoj obitelji rodio barem jedan dječak. Vjerojatnost da se rodio barem jedan dječak jednaka je

$$p = \Pr(\text{barem jedan dječak}) = 1 - \Pr(\text{niti jedan dječak}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{15}{16}.$$

Prema tome, očekivanje te binomne slučajne varijable je

$$E(B_{2000,15/16}) = 2000 \cdot \frac{15}{16} = 1875.$$

(b) Slično kao u (a) dijelu zadatka, vjerojatnost da se rode točno 2 dječaka je

$$p = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{8}.$$

Binomni koeficijent u prethodnoj formuli dolazi od toga da je bitan redosljed rođeenja dječaka/djevojčica, pa možemo na $\binom{4}{2}$ načina izabrati ‘mjesta’ gdje se među četvero djece rodio dječak. Očekivanje je

$$E(B_{2000,3/8}) = 2000 \cdot \frac{3}{8} = 750.$$

(c) Slično kao u (a) dijelu zadatka, vjerojatnost da se rode točno jedna/dvije djevojčice je

$$\begin{aligned}
p_1 &= \Pr(\text{rodila se točno jedna djevojčica}) \\
&= \binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}, \\
p_2 &= \Pr(\text{rodile su se točno dvije djevojčice}) \\
&= \Pr(\text{rodila su se točno dva dječaka}) = \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

Prema tome, $p = p_1 + p_2 = \frac{5}{8}$, pa je očekivanje

$$E(B_{2000,5/8}) = 2000 \cdot \frac{5}{8} = 1250.$$

(d) Ovo je zapravo ponavljanje dijela zadatka (a), gdje smo utvrdili da je vjerojatnost da se nije rodio niti jedan dječak $\frac{1}{16}$, pa je

$$E(B_{2000,1/16}) = 2000 \cdot \frac{1}{16} = 125.$$

Primjer 2. Nađite kolika je vjerojatnost da se među 2000 rođene djece (uz uvjet da je vjerojatnost rođenja dječaka i djevojčice ista) rodilo

(a) manje od 950 dječaka,

(b) između 970 i 1020 dječaka,

(c) točno 999 djevojčica?

Uputa: koristite aproksimaciju binomne razdiobe normalnom.

Aproksimacija binomne slučajne varijable normalnom vrši se tako da se pažljivo pogledaju 'rubovi' i stavi

$$\mu = np, \quad \sigma = \sqrt{npq}.$$

U ovom je slučaju $p = 1/2$, $q = 1/2$, $n = 2000$, pa je

$$\mu = 1000, \quad \sigma = \sqrt{500} \approx 22.360679775.$$

(a) Dakle, budući da gledamo manje od 950 dječaka, to će reći 1–949, onda treba staviti $N < 949.5$, tako da i zadnje dijete (949.) dobije 'istu' vjerojatnost kao i ostali. Prema tome imamo

$$\begin{aligned}
\Pr(X < 950) &= \Pr(N < 949.5) = (\text{svodimo na } N(0,1)) \\
&= \Pr\left(\frac{N-\mu}{\sigma} < \frac{949.5 - 1000}{22.360679775}\right) \\
&= \Pr(Z < -2.26) = 0.5 - \Phi_0(2.26) = 0.5 - 0.48808 = 0.01192.
\end{aligned}$$

(b) Imamo:

$$\begin{aligned}
\Pr(970 \le X \le 1020) &= \Pr(969.5 < N < 1020.5) = (\text{svodimo na } N(0,1)) \\
&= \Pr\left(\frac{969.5-1000}{22.360679775} < \frac{N-\mu}{\sigma} < \frac{1020.5-1000}{22.360679775}\right) \\
&= \Pr(-1.36 < Z < 0.92) \\
&= 0.5 + \Phi_0(0.92) - (0.5 - \Phi_0(1.36)) \\
&= 0.32121 + 0.41308 = 0.73429
\end{aligned}$$

(c) Opet treba paziti granice:

$$\begin{aligned}
\Pr(X = 999) &= \Pr(998.5 < N < 999.5) = (\text{svodimo na } N(0,1)) \\
&= \Pr\left(\frac{998.5-1000}{22.360679775} < \frac{N-\mu}{\sigma} < \frac{999.5-1000}{22.360679775}\right) \\
&= \Pr(-0.07 < Z < -0.02) = 0.5 - \Phi_0(0.02) - (0.5 - \Phi_0(0.07)) \\
&= 0.00798 + 0.02790 = 0.03588.
\end{aligned}$$

Primjer 3. Među 500 muških studenata (studentice se to ne pita!) nekog sveučilišta, masa studenata ponaša se kao normalna slučajna varijabla s očekivanjem 70 kg i standardnom devijacijom 7 kg. Koliko studenata tog sveučilišta ima masu

(a) između 55 kg i 75 kg,

(b) veću od 85 kg,

(c) veću ili jednaku 85 kg?

Smatramo da su mase zaokružene na najbliži prirodni broj.

(a) Dakle, budući da su mase zaokružene na najbliži kilogram, imamo

$$\begin{aligned}
\Pr(54.5 \le X \le 75.5) &= (\text{svodimo na } N(0,1)) \\
&= \Pr\left(\frac{54.5-70}{7} \le \frac{X-70}{7} \le \frac{75.5-70}{7}\right) \\
&= \Pr(-2.21 \le Z \le 0.79) \\
&= 0.5 + \Phi_0(0.79) - (0.5 - \Phi_0(2.21)) \\
&= 0.28523 + 0.48644 = 0.77167.
\end{aligned}$$

(b) Dobivamo:

$$\begin{aligned}
\Pr(X \ge 85.5) &= 1 - \Pr(X \ge 85.5) = (\text{svodimo na } N(0,1)) \\
&= 1 - \Pr\left(\frac{X-70}{7} \le \frac{85.5-70}{7}\right) \\
&= 1 - \Pr(Z \le 2.21) = 1 - (0.5 + \Phi_0(2.21)) \\
&= 1 - 0.5 - 0.48644 = 0.01356.
\end{aligned}$$

(c) Primijetite razliku obzirom na zadatak (b):

$$\begin{aligned}\Pr(X \geq 84.5) &= 1 - \Pr(X \geq 84.5) = (\text{svodimo na } N(0,1)) \\ &= 1 - \Pr\left(\frac{X-70}{7} \leq \frac{84.5-70}{7}\right) \\ &= 1 - \Pr(Z \leq 2.07) = 1 - (0.5 + \Phi_0(2.07)) \\ &= 1 - 0.5 - 0.48077 = 0.01923.\end{aligned}$$

Primjer 4. Pravilna kocka se baca 120 puta. Nađite vjerojatnost da se broj 4 pojavio

(a) manje ili jednako 18 puta,

(b) manje od 14 puta?

Uputa: koristite aproksimaciju binomne razdiobe normalnom.

Očito je $n = 120$, $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$,

$$\mu = np = 20, \qquad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{\frac{50}{3}} \approx 4.08.$$

(a) Sada je

$$\begin{aligned}\Pr(X <= 18) &= \Pr(N \leq 18.5) = \Pr\left(\frac{N-20}{4.08} \leq \frac{18.5-20}{4.08}\right) \\ &= \Pr(Z < -0.37) = 0.5 - \Phi_0(0.37) = 0.5 - 0.14431 = 0.35569.\end{aligned}$$

(b) Sada je

$$\begin{aligned}\Pr(X < 14) &= \Pr(N \leq 13.5) = \Pr\left(\frac{N-20}{4.08} \leq \frac{13.5-20}{4.08}\right) \\ &= \Pr(Z < -1.59) = 0.5 - \Phi_0(1.59) = 0.5 - 0.44408 = 0.05592.\end{aligned}$$