

8. Razvoj analitičke funkcije u red

8.1. Razvoj analitičke funkcije u Taylorov red

Neka je Γ pozitivno orijentirana kontura koja se nalazi unutar $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, a z točka iz unutarnjeg područja od Γ i f analitička na Ω . Onda vrijedi Cauchyjeva integralna formula

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (8.1.1)$$

Formula (8.1.1) poslužit će nam da izvedemo vrlo značajno svojstvo analitičkih funkcija, a to je da se svaka takva funkcija u okolini svake točke gdje je analitička može prikazati redom potencija — **Taylorovim redom**. Ovo svojstvo ima niz posljedica — recimo svaka analitička funkcija ima derivaciju svakog reda.

Teorem 8.1.1. (Taylorov red) *Neka je f analitička funkcija na $\Omega \subseteq \mathbb{C}$.*

1. *f ima derivaciju svakog reda na Ω i ta derivacija, je analitička funkcija,*
2. *Vrijednost n -te derivacije funkcije f u točki $z_0 \in \Omega$ je*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

gdje je Γ bilo koja kontura koja obuhvaća z_0 i leži unutar Ω .

3. Taylorov red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

konvergira (apsolutno) na svakom krugu $K(z_0, r) \Subset \Omega$ i u svakoj točki $z \in K(z_0, r)$ ima sumu $f(z)$.

Evo nekoliko tipičnih primjera Taylorovih redova, koje bi trebalo znati. Svi navedeni primjeri razvijeni su oko točke $z_0 = 0$, a uz svaki red piše i njegov radijus

konvergenције

$$\begin{aligned}
 e^z &= 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots & |z| < \infty, \\
 \sin z &= \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots & |z| < \infty, \\
 \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots & |z| < \infty, \\
 \ln(1+z) &= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} + \cdots & |z| < 1, \\
 \operatorname{arctg} z &= z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \cdots & |z| < 1, \\
 \operatorname{sh} z &= \frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots & |z| < \infty, \\
 \operatorname{ch} z &= 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots & |z| < \infty.
 \end{aligned}$$

Konačno, generalizacija binomnog reda

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots \quad |z| < 1$$

je red

$$(1+z)^p = 1 + \binom{p}{1}z + \binom{p}{2}z^2 + \cdots + \binom{p}{n}z^n + \cdots \quad |z| < 1,$$

pri čemu p ne mora biti cijeli broj, binomni koeficijenti definirani su s

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}.$$

Ako funkcije $(1+z)^p$ ima više grana, onda je ovo razvoj one grane za koju je $(1+z)^p = 1$ za $z = 0$.

8.2. Razvoj analitičke funkcije u Laurentov red

Promatramo redove oblika

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n.$$

Posebno odvojimo dio s nenegativnim indeksima ($n \geq 0$), a posebno onaj s negativnim indeksima ($n < 0$).

Proučit ćemo područje konvergencije tog reda. Prvo promotimo dio s nenegativnim indeksima

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n. \quad (8.2.1)$$

Red (8.2.1) je običan red potencija i ako je R_2 njegov radijus konvergencije, područje njegove konvergencije je otvoreni krug $K(z_0, R_2)$. Na tom krugu, taj red definira analitičku funkciju

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \quad z \in K(z_0, R_2).$$

Sada proučimo drugi dio reda

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}. \quad (8.2.2)$$

Ako stavimo

$$w = \frac{1}{z - z_0},$$

red (8.2.2) prelazi u red

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}w^n. \quad (8.2.3)$$

Neka je R radijus konvergencije tog reda potencija. Tada je s

$$F(w) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}w^n, \quad w \in K(0, R)$$

definirana analitička funkcija na krugu $K(0, R)$. Ovo razmatranje dovodi do zaključka da red (8.2.2) konvergira na području

$$|w| = \frac{1}{|z - z_0|} < R,$$

tj. ako označimo s $R_1 = 1/R$, onda konvergira na

$$|z - z_0| > R_1.$$

Na tom području (vanjšina kruga) je naša funkcije F analitička, analitička je i $\frac{1}{z-z_0}$, pa je analitička i

$$f_2(z) = F\left(\frac{1}{z-z_0}\right).$$

Dakle,

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}, \quad |z-z_0| > R_1.$$

Dakle, naš red potencija (8.2.1) konvergira na presjeku područja za $n \geq 0$ i $n < 0$, dakle ako je $R_1 < R_2$, pa je u pitanju kružni vijenac vanjskog radijusa R_2 i unutarnjeg R_1 , pa red (8.2.1) na tom kružnom vijencu definira jednu analitičku funkciju.

Koeficijenti u redu dani su s

$$c_n = \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Primjer 8.2.1. Na temelju poznatih redova, nađite Laurentov red za funkciju na zadanom području

(a) $(z-3) \sin\left(\frac{1}{z+2}\right)$ za $|z+2| > 0$,

(b) $\frac{z}{(z+1)(z+2)}$ za $|z+2| < 1$,

(a) Od nas se traži razvoj po potencijama od $z+2$. Ideja — supstituirajmo $w = z+2$, pa onda funkciju razvijajmo oko $w=0$. U varijabli w , funkcija glasi

$$(w-5) \sin\left(\frac{1}{w}\right).$$

Znamo li razvoj za $\sin z$, onda je

$$\sin \frac{1}{w} = \frac{1}{w} - \frac{1}{w^3 3!} + \frac{1}{w^5 5!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{w^{2n+1} (2n+1)!} + \dots$$

pa traženi razvoj dobivamo množenjem tog reda s $w-5$

$$\begin{aligned} (w-5) \sin\left(\frac{1}{w}\right) &= (w-5) \left(\frac{1}{w} - \frac{1}{w^3 3!} + \frac{1}{w^5 5!} \right. \\ &\quad \left. - \dots + (-1)^n \frac{1}{w^{2n+1} (2n+1)!} + \dots \right) \\ &= 1 - \frac{5}{w} - \frac{1}{3! w^2} + \frac{5}{3! w^3} \\ &\quad - \dots + \frac{1}{5! w^4} - \frac{5}{5! w^5} + \dots \end{aligned}$$

Ostaje još samo posljednji red napisati u varijabli $z + 2$,

$$(z - 3) \sin\left(\frac{1}{z + 2}\right) = 1 - \frac{5}{z + 2} - \frac{1}{3!(z + 2)^2} + \frac{5}{3!(z + 2)^3} \\ + \frac{1}{5!(z + 2)^4} - \frac{5}{5!(z + 2)^5} + \dots$$

(b) Ponovno, točka razvoja je -2 , pa supstituiramo $w = z + 2$ i razvijemo funkciju oko 0. Dakle, funkcija u varijabli w je

$$\frac{w - 2}{(w - 1)w} = \frac{2 - w}{w} \cdot \frac{1}{1 - w},$$

s tim da je područje razvoja $|w| < 1$. Primijetimo da je prvi član u produktu već razvijen po potencijama od w . Treba razviti samo drugi član, a to je binomni red

$$\frac{1}{1 - w} = 1 + w + w^2 + \dots + w^n + \dots \quad |w| < 1.$$

Prema tome, imamo

$$\frac{2 - w}{w} \cdot \frac{1}{1 - w} = \frac{2 - w}{w} (1 + w + w^2 + \dots + w^n + \dots) \\ = \frac{2}{w} + 1 + w + w^2 + \dots + w^n + \dots$$

Ostaje još samo supstituirati $w = z + 2$, pa imamo

$$\frac{z}{(z + 1)(z + 2)} = \frac{2}{z + 2} + 1 + (z + 2) + \dots + (z + 2)^n + \dots$$

Primjer 8.2.2. Razvijte u Laurentov red funkciju

$$f(z) = \frac{1}{(z + 1)(z + 3)}$$

za $1 < |z| < 3$.

Traži se razvoj po potencijama od z . Ideja je funkciju rastaviti na parcijalne razlomke, a zatim primijeniti na svaki od njih binomni razvoj, pazeći da ga upotrebavamo samo tamo gdje konvergira ($|z| < 1$).

Dakle

$$\frac{1}{(z + 1)(z + 3)} = \frac{A}{z + 1} + \frac{B}{z + 3}.$$

Množenjem s $(z + 1)(z + 3)$ lako dobijemo da je

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2},$$

pa je

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2} \frac{1}{z+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{z+3}.$$

Razvijmo prvo funkciju

$$\frac{1}{z+1}.$$

Ne možemo direktno primijeniti binomni red jer je $|z| > 1$. Prvo u nazivniku izlučimo z , pa imamo

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z\left(1+\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z}}.$$

Prvi član u produktu je već razvijen po potencijama od z . Moramo razviti još drugi. Primijetimo, budući da je $|z| > 1$, onda je

$$\left|\frac{1}{z}\right| < 1,$$

pa možemo uzeti $1/z$ za novu varijablu w , $|w| < 1$ i direktno primijeniti binomni razvoj

$$\frac{1}{1+w} = 1 - w + w^2 - \dots + (-1)^n w^n + \dots,$$

pa je

$$\frac{1}{1+\frac{1}{z}} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \dots + \frac{(-1)^n}{z^n} + \dots,$$

što daje

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{1}{z+1} &= \frac{1}{2z} \left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \dots + \frac{(-1)^n}{z^n} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{2z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z^3} - \dots + \frac{(-1)^n}{2z^{n+1}} + \dots \end{aligned}$$

Sad još ostaje razviti

$$\frac{1}{z+3}.$$

Ponovno ne možemo direktno primijeniti binomni razvoj, jer je $|z| < 3$. Ako u nazivniku izlučimo faktor 3, onda imamo

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{z}{3}+1}.$$

Sada je

$$\left|\frac{z}{3}\right| < 1,$$

pa možemo primijeniti binomni razvoj

$$\begin{aligned}\frac{1}{z+3} &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} - \cdots + (-1)^n \frac{z^n}{3^n} + \cdots \right), \\ &= \frac{1}{3} - \frac{z}{3^2} + \frac{z^2}{3^3} - \cdots + (-1)^n \frac{z^n}{3^{n+1}} + \cdots,\end{aligned}$$

pa je

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{z+3} = -\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{z}{2 \cdot 3^2} - \frac{z^2}{2 \cdot 3^3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{z^n}{2 \cdot 3^{n+1}} + \cdots.$$

Na kraju treba samo zbrojiti dva dobivena reda

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{1}{z+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{z+3} &= +\cdots + \frac{(-1)^n}{2z^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2z^3} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z} \\ &\quad - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{z}{2 \cdot 3^2} - \frac{z^2}{2 \cdot 3^3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{z^n}{2 \cdot 3^{n+1}} + \cdots.\end{aligned}$$

8.3. Singulariteti i njihova klasifikacija

Ao funkcija f nije analitička (ili nije definirana) u nekoj točki, ta točku zovemo **singularitet funkcije**.

Singularitete možemo podijeliti na nekoliko načina:

- izolirani (oko singulariteta možemo povući dovoljno malu kružnicu da je u njoj to jedini singularitet),
- neizolirani (onaj koji nije izolirani).

Za višeznačnu funkciju singulariteti su točke grananja. Ako točku grananja obiđemo po kružnici, onda se promijeni vrijednost funkcije. Na primjer funkcija

$$f(z) = \sqrt{z}$$

ima dvije grane u 0, ili

$$f(z) = \ln z$$

koja ima beskonačno mnogo grana u 0.

Izolirane singularitete klasificiramo još prema tipu ovako:

- uklonjivi singularitet,
- pol (reda n),
- bitni singularitet.

Klasifikacija ove tri vrste singulariteta može se vršiti prema broju članova s negativnim potencijama u Laurentovom redu te funkcije oko točke singulariteta z_0 .

Ako razvijemo funkciju koja ima uklonjivi singularitet z_0 u Laurentov red oko z_0 ona nema članova s negativnim potencijama. Primjer

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

ima u 0 uklonjivi singularitet, jer ako razvijemo tu funkciju po potencijama od z imamo

$$f(z) = \frac{1}{1!} - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

Ako razvijemo funkciju koja ima pol u z_0 u Laurentov red oko z_0 , onda ona ima konačno mnogo članova s negativnim potencijama, a najniža potencija koja se javlja predstavlja red pola. Na primjer, funkcija

$$f(z) = -\frac{1}{(z+4)^3} + \frac{1}{(z+4)} + 1 + (z+4)$$

ima u točki -4 pol reda 3.

ako razvijemo funkciju u bitnom singularitetu z_0 u Laurentov red, ona ima beskonačno mnogo članova s negativnim potencijama. Na primjer, funkcija

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z 1!} + \frac{1}{z^2 2!} + \dots + \frac{1}{z^n n!} + \dots$$

ima u 0 bitni singularitet.

9. Reziduum funkcije

9.1. Definicija

Na osnovu Cauchyjevog teorema i Cauchyjeve integralne formule zasniva se efikasna metoda za računanje kompleksnih integrala. Prije definicije promotrimo jedan primjer.

Primjer 9.1.1. *Izračunajte*

$$\oint_{\Gamma} \frac{12z + 11}{z^2 + 3z + 2} dz,$$

gdje je Γ pozitivno orijentirana kružnica sa središtem u 0 radijusa

(a) $r = \frac{1}{2}$,

(b) $r = \frac{3}{2}$,

(c) $r = 3$.

Ispitajmo singularitete zadane funkcije koji se nalaze unutar zadanih kružnica. Singulariteti su nultočke nazivnika ove funkcije, koji nisu istovremeno i nultočke brojnika. Dakle,

$$z_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2},$$

tj.

$$z_1 = -1, \quad z_2 = -2.$$

(a) *Funkcija je očito analitička unutar Γ , jer su oba singulariteta izvan kružnice, pa je*

$$\oint_{\Gamma} \frac{12z + 11}{z^2 + 3z + 2} dz = 0.$$

(b) *Kružnica obuhvaća samo singularitet $z_1 = -1$, dok je drugi izvan kružnice. Tvrđimo da je*

$$\frac{12z + 11}{z^2 + 3z + 2} = \frac{12z + 11}{(z + 1)(z + 2)} = \frac{\frac{12z + 11}{z + 2}}{z + 1},$$

pa ako definiramo

$$f(z) = \frac{12z + 11}{z + 2},$$

onda je

$$\frac{12z + 11}{z^2 + 3z + 2} = \frac{f(z)}{z + 1},$$

funkcija f je analitička, pa možemo direktno primijeniti Cauchyjevu integralnu formulu.

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \frac{12z + 11}{z^2 + 3z + 2} dz &= \oint_{\Gamma} \frac{\frac{12z+11}{z+2}}{z+1} dz = \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z+1} dz \\ &= 2\pi i f(-1) = 2\pi i \frac{12 \cdot (-1) + 11}{(-1) + 2} = -2\pi i. \end{aligned}$$

- (c) U ovom su slučaju oba singulariteta unutar kružnice. Po Cauchyjevom teoremu za višestruko povezana područja, zadani integral možemo “pretvoriti” u dva integrala po kružnicama koje obuhvaćaju svaka samo po jedan singularitet i ne precijecaju se, a rezultat trebamo zbrojiti. Dakle

$$\oint_{\Gamma} \frac{12z + 11}{z^2 + 3z + 2} dz = \oint_{\Gamma_1} \frac{12z + 11}{z^2 + 3z + 2} dz + \oint_{\Gamma_2} \frac{12z + 11}{z^2 + 3z + 2} dz,$$

pri čemu je unutar Γ_1 samo singularitet -1 , a unutar Γ_2 samo singularitet -2 . Prvi integral riješili smo u primjeru (b). Ostaje još riješiti drugi integral. Vrijedi

$$\frac{12z + 11}{z^2 + 3z + 2} = \frac{12z + 11}{(z + 1)(z + 2)} = \frac{\frac{12z+11}{z+1}}{z + 2},$$

pa ako definiramo

$$f(z) = \frac{12z + 11}{z + 1},$$

onda je

$$\frac{12z + 11}{z^2 + 3z + 2} = \frac{f(z)}{z + 2},$$

funkcija f je analitička, pa možemo direktno primijeniti Cauchyjevu integralnu formulu.

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \frac{12z + 11}{z^2 + 3z + 2} dz &= \oint_{\Gamma} \frac{\frac{12z+11}{z+1}}{z+2} dz = \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z+2} dz \\ &= 2\pi i f(-2) = 2\pi i \frac{12 \cdot (-2) + 11}{(-2) + 1} = 26\pi i. \end{aligned}$$

Konačno, zbrojimo dobivene rezultate,

$$\oint_{\Gamma} \frac{12z + 11}{z^2 + 3z + 2} dz = -2\pi i + 26\pi i = -24\pi i.$$

Sad je očito da se primjenom Cauchyjeve integralne formule i Cauchyjevog teorema za višestruko povezana područja integracija provodi po malim kružnicama koje obuhvaćaju samo po jedan singularitet unutar Γ .

Reziduum ili ostatak funkcije f u izoliranom singularitetu $z_0 \in \mathbb{C}$ definiramo kao broj

$$\operatorname{res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} f(z) dz,$$

gdje je $r > 0$ izabrano tako da je funkcija f analitička na $K(z_0, \rho) \setminus \{z_0\}$, $\rho > r$, a kružnica je pozitivno orijentirana.

U prethodnom primjeru, ako s f označimo podintegralnu funkciju

$$f(z) = \frac{12z + 11}{z^2 + 3z + 2},$$

imali smo

$$\begin{aligned} \operatorname{res}(f, -1) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z+1|=r_1} f(z) dz = -1 \\ \operatorname{res}(f, -2) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z+2|=r_2} f(z) dz = 13. \end{aligned}$$

Sada još treba učiniti dvije stvari: naći način kako ćemo upotrijebiti reziduume i naći način njihovog efikasnog računanja.

Teorem 9.1.1. (Teorem o reziduumima) *Neka je f analitička na području Ω , osim u izoliranim singularitetima i neka je Γ pozitivno orijentirana kontura u Ω na kojoj ne leži niti jedan singularitet od f , a čije unutarne područje sadrži izolirane singularitete z_1, \dots, z_n funkcije f . Tada je*

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}(f, z_k).$$

Dokaz:

Svakom singularitetu opišimo pozitivno orijentiranu kružnicu Γ_k unutar koje je to jedini singularitet. Po Cauchyjevom teoremu o višestruko povezanim područjima imamo

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{\Gamma_k} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_k} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}(f, z_k).$$

■

9.2. Efikasno računanje reziduuma

Ako funkcija f ima izolirani singularitet u z_0 , onda se ona oko z_0 može razviti u Laurentov red

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

koji konvergira u kružnom vijencu $0 < |z - z_0| < \rho$ (*rho* takav da unutar kružnice nema drugih singulariteta). Ako uzmemo $r < \rho$, onda integriranjem član po član dobivamo

$$\oint_{|z-z_0|=r} f(z) dz = 2\pi i \cdot c_{-1}.$$

Usporedbom s teoremom o reziduumima odmah slijedi da mora biti

$$\boxed{\text{res}(f, z_0) = c_{-1}.}$$

Dakle, $\text{res}(f, z_0)$ je koeficijent u Laurentovom razvoju funkcije f oko z_0 uz član $\frac{1}{z - z_0}$.

Jedan od načina nalaženja reziduuma je razvoj funkcije u Laurentov red i očitavanje odgovarajućeg koeficijenta. To je **jedini način** ako funkcija ima **bitni singularitet** u z_0 .

Primjer 9.2.1. Nađite $\text{res}(f, 0)$ ako je

$$f(z) = e^{1/z}.$$

Budući da funkcija ima bitni singularitet u 0, razvija je u red

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z 1!} + \frac{1}{z^2 2!} + \cdots + \frac{1}{z^n n!} + \cdots,$$

pa je koeficijent uz z^{-1} jednak 1, pa je

$$\text{res}(f, 0) = 1.$$

Ako funkcija ima **uklonjivi singularitet**, onda znamo da Laurentov red nema članova uz negativne potencije, pa je u uklonjivom singularitetu $\text{res}(f, z_0) = 0$.

Primjer 9.2.2. Nađite $\text{res}(f, 0)$ ako je

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}.$$

Znamo da f ima u 0 uklonjivi singularitet, jer je

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} = \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} + \dots,$$

pa je njezin $\text{res}(f, 0) = 0$.

Dakle, ostaje samo promotriti situaciju kad imamo pol odgovarajućeg reda.

Primjer 9.2.3. Nađite $\text{res}(f, 0)$ ako je

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2}.$$

Funkcija ima u 0 pol reda 1. Razvojem u red dobivamo

$$\frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} = \dots + (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n+1)!} + \dots,$$

pa je $\text{res}(f, 0) = 1$.

Općenito, ako funkcija u z_0 ima pol reda 1, onda je njezin Laurentov razvoj

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots + c_n(z - z_0)^n + \dots,$$

pa moramo izračunati c_{-1} . Množenjem prethodnog reda s $(z - z_0)$ dobivamo

$$(z - z_0)f(z) = c_{-1} + c_0(z - z_0) + c_1(z - z_0)^2 + \dots + c_n(z - z_0)^{n+1} + \dots,$$

pa za **pol prvog reda** imamo

$$\text{res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)f(z)].$$

Ako funkcija f ima u z_0 pol red m , $m \geq 2$, onda na sličan način množimo njezin red

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots + c_n(z - z_0)^n + \dots,$$

sa $(z - z_0)^m$, pa dobivamo

$$(z - z_0)^m f(z) = c_{-m} + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{m-1} + c_0(z - z_0)^m + \dots + c_n(z - z_0)^{n+m} + \dots.$$

Sada funkciju deriviramo $(m - 1)$ puta, Dobivamo

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_0)^m f(z) = (m - 1)! c_{-1} + m! c_0(z - z_0) + \dots,$$

pa za pol reda m imamo

$$\operatorname{res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)].$$

Primjer 9.2.4. *Odredite reziduume funkcije*

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-2)(z+1)^3}$$

u svim njezinim singularitetima.

Njezini singulariteti su pol reda 1 u 2 i pol reda 3 u -1 , pa imamo

$$\begin{aligned} \operatorname{res}(f, -2) &= \lim_{z \rightarrow -2} \left[(z-2) \frac{e^z}{(z-2)(z+1)^3} \right] = \lim_{z \rightarrow -2} \frac{e^z}{(z+1)^3} = \frac{e^2}{27}, \\ \operatorname{res}(f, -1) &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d^2}{dz^2} \left[(z+1)^3 \frac{e^z}{(z-2)(z+1)^3} \right] = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d^2}{dz^2} \frac{e^z}{z-2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \frac{e^z(z-3)}{(z-2)^2} = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{e^z(z-2)^2 - 2e^z(z-3)}{(z-2)^3} = -\frac{17}{54}e^{-1}. \end{aligned}$$

10. Računanje neprevih integrala

Računanje integrala oblika

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(x)}{B(x)} dx \quad (10.0.1)$$

gdje je

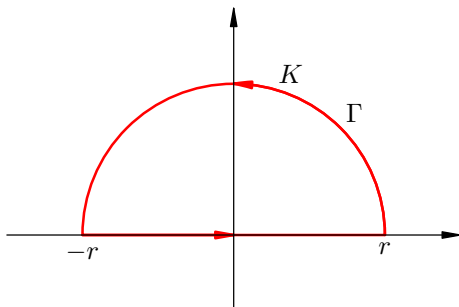
- A polinom stupnja n s vodećim koeficijentom 1,
- B polinom stupnja m , $m \geq n + 2$ s vodećim koeficijentom 1,
- B nema realnih nultočaka

može se svesti na računanje kompleksnih integrala.

Promatrajmo kompleksni integral funkcije f ,

$$f(z) = \frac{A(z)}{B(z)},$$

po polukružnici Γ



Ako pustimo $r \rightarrow \infty$ i pokažemo da je integral po luku polukružnice K teži k nuli, onda je nepravi integral jednak onome kompleksne funkcije f po Γ .

Pokažimo prvo da integral po K teži k 0. Tvrđimo da se može ograničiti $|f(z)|$ na luku kružnice

$$|f(z)| = \left| \frac{A(z)}{B(z)} \right| = \left| \frac{z^m + \dots + a_1 z + a_0}{z^n + \dots + b_1 z + b_0} \right|.$$

Budući da je $n \geq m + 2$, onda se racionalna funkcija s desne strane ponaša kao $\frac{1}{z^2}$, pa sigurno možemo ograničiti

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2} = \frac{M}{r^2},$$

na kružnici radijusa r , pri čemu je M neka konstanta. Sada je

$$\left| \int_K f(z) dz \right| \leq \int_K |f(z)| |dz| \leq \int_K \frac{M}{r^2} |dz| = \frac{M}{r^2} \int_K |dz|.$$

Budući da je značenje

$$\int_K |dz|$$

duljina luka polukružnice, onda je

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left| \int_K f(z) dz \right| \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M}{r^2} r\pi \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M\pi}{r} = 0.$$

Budući da apsolutna vrijednost nekog broja teži k nuli, onda k nuli mora težiti i taj broj, pa je

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_K f(z) dz = 0.$$

Prema tome,

Uz uvjete na funkciju f kao u (10.0.1) vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_k \in S^+} \text{res}(f, z_k),$$

pri šemu S^k označava gornju poluravninu.

Primjer 10.0.5. *Izračunajte*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx.$$

Uočimo da polinom u brojnika ima stupanj 0, polinom u nazivniku stupanj 2 i polinom u nazivniku nema realnih nultočaka, pa su ispunjeni svi uvjeti za primjenu prethodne formule.

Nultočke nazivnika su

$$z_1 = i, \quad z_2 = -i,$$

od čega se samo z_1 nalazi u gornjoj poluravnini. Sda još moramo izračunati $\text{res}(f, i)$.
 i je pol reda 1, pa je

$$\text{res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{1}{(z - i)(z + i)} \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z + i} = \frac{1}{2i}.$$

Prema tome,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi.$$

Uočite da rezultat *mora biti realan*.