1.3. Rješavanje nelinearnih jednadžbi

Rješavanje nelinearnih jednadžbi sastoji se od dva bitna koraka:

- nalaženja intervala u kojem se nalazi nultočka (analizom toka), što je teži dio posla,
- nalaženja nultočke na traženu točnost.

Kod traženja nultočke na zadanu točnost, u ocjenama grešaka pojavljuju se simboli M_k i m_k, pri čemu oni označavaju

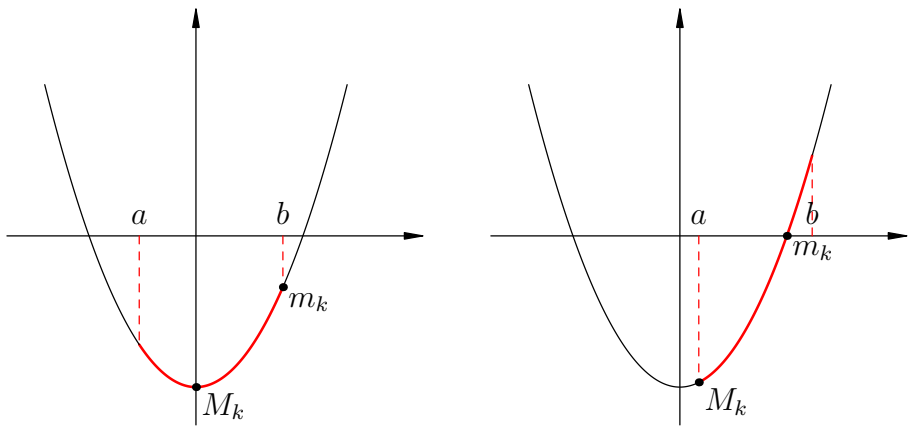
$$M_k = \max_{x\in[a,b]} |f^{(k)}(x)|, \quad m_k = \min_{x\in[a,b]} |f^{(k)}(x)|,$$

gdje je $f^{(k)}$ oznaka za k-tu derivaciju funkcije f.

Gdje se mogu nalaziti M_k i m_k:

- u bilo kojem lokalnom ekstremu funkcije $f^{(k)}$ (čak i u lokalnom minimumu), pri čemu **ne treba** pokazivati da se radi o lokalnom ekstremu (ne treba provjeravati više derivacije),
- u rubovima intervala,
- m_k može biti i u nultočki $f^{(k)}$.

Na primjer, za zadane grafove funkcije $f^{(k)}$



označeni su minimumi i maksimumi apsolutne vrijednosti.

Nadalje, treba uočiti da se uvijek umjesto M_k može koristiti $\widetilde{M}_k$, $\widetilde{M}_k \geq M_k$, a umjesto m_k broj $\widetilde{m}_k$ takav da vrijedi $0 < \widetilde{m}_k \leq m_k$. Ako umjesto M_k i m_k iskoristimo veličine s tildama, onda ćemo imati samo malo više iteracija, tj. dobit ćemo samo nešto točniji rezultat.

Zašto posebna napomena o $\widetilde{M}_k$ i $\widetilde{m}_k$? Katkad su derivacije funkcije vrlo komplicirane i teško im je naći maksimum/minimum, ali ga je lako ocijeniti.

Zadatak 1.6 *Ako je*

$$f^{(k)}(x) = x\sin^2 x + x^2\cos x^2, \quad x \in [1,2],$$

nađite ili ocijenite M_k.

Rješenje: Deriviranjem funkcije $f^{(k)}$, dobili bismo još kompliciraniju funkciju, kojoj je teško naći nultočku.

Stoga ocijenimo M_k, tj. nađimo $\widetilde{M}_k$, korištenjem poznatih relacija koje vrijede za apsolutne vrijednosti

$$\begin{aligned} |x \cdot y| &= |x| \cdot |y|, \\ |x + y| &\leq |x| + |y|, \quad \text{(relacija trokuta)}. \end{aligned}$$

(Posljednja relacija, zapravo, kaže da je zbroj duljina dvije stranice trokuta uvijek veći od treće).

Imamo

$$\begin{aligned} M_k &= \max_{x\in[1,2]} |x\sin^2 x + x^2\cos x^2| \leq \text{(relacija trokuta)} \\ &= \max_{x\in[1,2]} (|x\sin^2 x| + |x^2\cos x^2|) = \text{(upotrijebimo } |x\cdot y| = |x|\cdot|y|) \\ &= \max_{x\in[1,2]} (|x||\sin^2 x| + |x^2||\cos x^2|) = \max_{x\in[1,2]} (|x||\sin^2 x| + |x|^2|\cos x^2|) \\ &\leq 2\cdot 1 + 4\cdot 1 = 6. \end{aligned}$$

Prema tome, $\widetilde{M}_k = 6$. □

1.3.1. Metoda bisekcije (raspolavljanja)

Metoda bisekcije je najjednostavnija metoda za nalaženje nultočaka. Ona će sigurno konvergirati prema nultočki α, ako je funkcija f kojoj tražimo nultočku **neprekidna** na $[a, b]$ i vrijedi

$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

Kako se radi metoda bisekcije? Nalazi se srednja točka x_0 početnog intervala $[a_0, b_0] = [a, b]$, a zatim se nastavlja raditi na onom od intervala $[a_0, x_0]$ ili $[x_0, b_0]$ u kojem je ostala nultočka. Da bismo našli gdje je ostala nultočka, dovoljno je provjeriti predznak $f(a_0) \cdot f(x_0)$. Ako je on negativan, nultočka je u $[a_0, x_0]$, a ako je pozitivan, nultočka je u $[x_0, b_0]$. Ako je predznak nula, to znači da je x_0 nultočka. Postupak ponavljamo s intervalom koji je dvostruko kraći od početnog. Njegovu srednju točku označimo s x_1 ...

Postupak zaustavljamo ili kad je duljina intervala dovoljno mala (ispod zadane točnosti ε), tj. ako vrijedi

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{1}{2^{n+1}}(b-a) \leq \varepsilon,$$

ili ako funkcija ima neprekidnu prvu derivaciju i slučajno smo pogodili blizu nultočke, tj. ako vrijedi

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1} \leq \varepsilon.$$

Iz prethodne dvije ocjene mogu se dobiti kriteriji zaustavljanja. Zaustavljamo se ili kad smo obavili n raspolavljanja,

$$n \geq \frac{\log(b-a) - \log\varepsilon}{\log 2} - 1, \quad n \text{ cijeli broj}$$

ili ako se u nekoj iteraciji dogodilo da je

$$|f(x_n)| \leq m_1\varepsilon.$$

Zadatak 1.7 *Metodom bisekcije (raspolavljanja) riješite jednadžbu*

$$x^3 - 1.5 = 0$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$.

Rješenje: Očito je da tražimo $\sqrt[3]{1.5}$. Da bismo izolirali nultočku skicirajmo graf funkcije $f(x) = x^3 - 1.5$. Graf ćemo skicirati (slika 1.1) tako da prvo nacrtamo graf funkcije x^3 (na slici označen crtkano), a onda ga za 1.5 translatiramo nadolje duž osi y (puni crveni graf).

Iz slike je odmah vidljivo da funkcija f siječe os x između 1 i 2.

Budući da se radi o polinomu, on je neprekidna funkcija, koja ima sve derivacije neprekidne, možemo upotrijebiti obje ocjene greške.

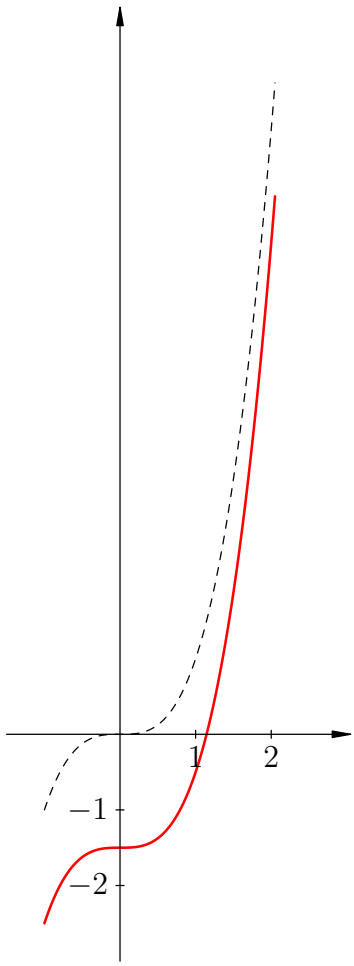
Nadalje, nultočka α je jedina nultočka funkcije f, jer funkcija f strogo raste na $\langle -\infty, 0\rangle$ (gdje je svugdje manja od 0) i $\langle -\infty, 0\rangle$.

Pokažimo da je $[1, 2]$ dobar startni interval:

$$\begin{aligned} f(1) &= -0.5 < 0 \\ f(2) &= 6.5 > 0, \end{aligned} \qquad f(1)\cdot f(2) < 0.$$

Ocijenimo grešku, tj. prvo nađimo potreban broj raspolavljanja ($a = 1$, $b = 2$, $\varepsilon = 10^{-3}$):

$$n \geq \frac{\log(2-1) - \log 10^{-3}}{\log 2} - 1 = \frac{3}{\log 2} - 1 \approx 8.96578,$$



Slika 1.1: Grafovi funkcija x^3 i $x^3 - 1.5$.

pa je

$$n \geq 9,$$

jer mora biti cijeli broj. Nađimo sad i dinamičku ocjenu greške. Za to nam treba minimum apsolutne vrijednosti prve derivacije funkcije f:

$$f'(x) = 3x^2.$$

Prvo, uočimo da je $f'(x) > 0$ za $x \in [1, 2]$, tj. funkcija ne mijenja predznak na $[1, 2]$. Nadalje, funkcija f' strogo raste na $[1, 2]$, što se pokazuje deriviranjem, jer je

$$f''(x) = 6x > 0 \text{ za } x \in [1, 2].$$

Zbog toga što funkcija ne mijenja predznak i strogo raste, minimum apsolutne vrijednosti te funkcije može biti samo u jednom od rubova (u ovom slučaju zato što je

pozitivna, u lijevom, tj. u 1)

$$m_1 = \min_{x\in[1,2]} |3x^2| = \min_{x\in[1,2]} 3x^2 = f'(1) = 3,$$

pa dinamička ocjena glasi

$$|f(x_n)| \leq 3 \cdot 10^{-3}.$$

Sad možemo formirati tablicu

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$f(a_n) \cdot f(x_n)$
0	1.00000000	2.00000000	1.50000000	1.87500000	< 0
1	1.00000000	1.50000000	1.25000000	0.45312500	< 0
2	1.00000000	1.25000000	1.12500000	−0.07617187	> 0
3	1.12500000	1.25000000	1.18750000	0.17456055	< 0
4	1.12500000	1.18750000	1.15625000	0.04580688	< 0
5	1.12500000	1.15625000	1.14062500	−0.01601791	> 0
6	1.14062500	1.15625000	1.14843750	0.01468420	< 0
7	1.14062500	1.14843750	1.14453125	−0.00071925	> 0

Dalje nije potrebno računati jer je

$$|f(x_7)| = 0.00071925 = 7.1925 \cdot 10^{-4} \leq 3 \cdot 10^{-3}.$$

Aproksimacija nultočke je $x_7 = 1.14453125$. Upotrebom kalkulatora, lako je vidjeti da je $\alpha = \sqrt[3]{1.5} = 1.1444714242$, pa je prava greška

$$\alpha - x_7 = 0.000182992 < 2 \cdot 10^{-4},$$

što znači da smo u raspolavljanju slučajno pogodili vrlo blizu nultočke. □

Zadatak 1.8 *Metodom bisekcije (raspolavljanja) riješite jednadžbu*

$$e^{-x} - 2 + x = 0$$

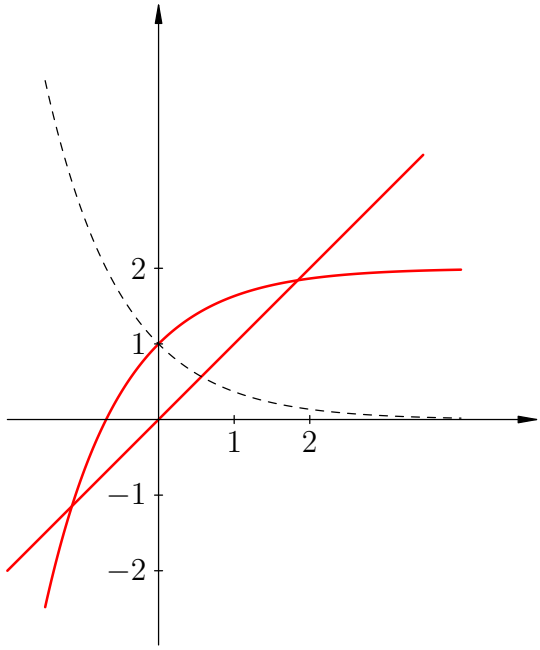
s točnošću $\varepsilon = 10^{-2}$.

Rješenje: Za izolaciju nultočke, ponovno skicirajmo graf funkcije $f(x) = e^{-x} - 2 + x$. Taj graf je dosta kompliciran da bi se odmah nacrtao. Umjesto toga, bolje je funkciju zapisati u formi

$$x = 2 - e^{-x},$$

zatim nacrtati grafove funkcija x i $2 - e^{-x}$. Ovaj posljednji nacrtat ćemo tako da prvo nacrtamo e^{-x}, zatim napravimo njegovu osnu simetriju oko osi x, da dobijemo $-e^{-x}$ i, konačno, translatiramo ga za 2 jedinice nagore duž osi y da dobijemo $2-e^{-x}$.

Gdje se grafovi funkcija x i $2 - e^{-x}$ sijeku, dobili smo nultočku funkcije f. Nadalje, funkcija f je neprekidna na $\mathbf{R}$ i ima neprekidne derivacije. Na slici 1.2 isprekidanim crtama nacrtan je graf e^{-x}, a traženi grafovi nacrtani su crveno i punom crtom.



Slika 1.2: Grafovi funkcija x i $2 - e^{-x}$.

Prava skica funkcije prikazana je na slici 1.3.

Odmah zaključujemo da jednadžba ima dva rješenja. Jedno od njih je pozitivno, u intervalu $[1, 2]$

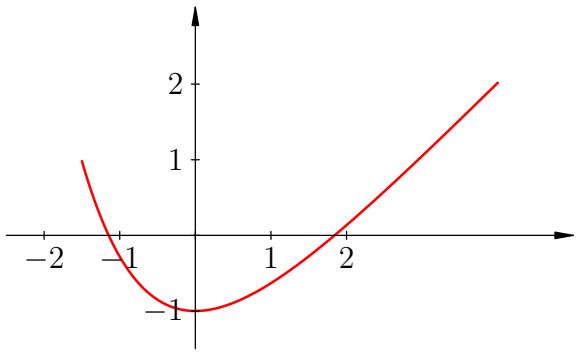
$$\begin{aligned} f(1) &\approx -0.63212 \\ f(2) &\approx 0.13533, \end{aligned} \qquad f(1) \cdot f(2) < 0.$$

Drugo je negativno i nalazi se u intervalu $[-2, -1]$

$$\begin{aligned} f(-1) &\approx 3.38906 \\ f(-2) &\approx -0.28172, \end{aligned} \qquad f(-1) \cdot f(-2) < 0.$$

Ocijenimo potreban broj koraka za nalaženje nultočke u intervalu $[1, 2]$

$$n \geq \frac{\log(2-1) - \log 10^{-2}}{\log 2} - 1 = \frac{2}{\log 2} - 1 \approx 5.64386,$$



Slika 1.3: Graf funkcije $f(x) = e^{-x} - 2 + x$.

pa je

$$n \geq 6.$$

Primijetite da ta ocjena vrijedi i za nultočku u intervalu $[-2, -1]$, jer jedino što je može biti "različito" je $b-a$ (duljina intervala). Ako startamo s intervalima jednake duljine (ovdje duljine 1), a točnost ne mijenjamo, uvijek dobijemo isti broj koraka n, tj. on uopće ne ovisi o funkciji f.

Nađimo i dinamičku ocjenu u oba slučaja. Za to nam je potrebna derivacija funkcije

$$f'(x) = -e^{-x} + 1 = 1 - e^{-x}.$$

Tvrdimo da ta funkcija strogo raste. To se lako pokazuje deriviranjem, jer je

$$f''(x) = e^{-x} > 0$$

za svaki $x \in \mathbf{R}$. Dakle, minimum mora biti u jednom od rubova intervala.

Ako je $x \in [1, 2]$, onda je $f'(x) > 0$, tj. funkcija f' raste i pozitivna je, pa joj je minimum u lijevom rubu

$$m_1 = \min_{x\in[1,2]} |1 - e^{-x}| = \min_{x\in[1,2]} (1 - e^{-x}) = f'(1) = 1 - e^{-1} \approx 0.632120559.$$

Dakle, na intervalu $[1, 2]$, dinamička ocjena greške je

$$|f(x_n)| \leq 0.632120559 \cdot 10^{-2} = 0.00632120559.$$

Ako je $x \in [-2, -1]$, onda je $f'(x) < 0$, tj. funkcija f' raste i negativna je, pa joj je minimum u desnom rubu

$$m_1 = \min_{x\in[-2,-1]} |1 - e^{-x}| = \min_{x\in[-2,-1]} (e^{-x} - 1) = -f'(-1) = e^1 - 1 \approx 1.718281828.$$

Dakle, na intervalu $[-2,-1]$, dinamička ocjena greške je

$$|f(x_n)| \leq 1.718281828 \cdot 10^{-2} = 0.01718281828.$$

Sad još treba napisati samo tablice

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$f(a_n) \cdot f(x_n)$
0	1.000000	2.000000	1.500000	−0.27686984	> 0
1	1.500000	2.000000	1.750000	−0.07622606	> 0
2	1.750000	2.000000	1.875000	0.02835497	< 0
3	1.750000	1.875000	1.812500	−0.02425449	> 0
4	1.812500	1.875000	1.843750	0.00197298	< 0

Dakle, rješenje je $x_4 = 1.84375$ jer je $|f(x_4)| \approx 0.00197298 < 0.00632120559$.

Za manju nultočku imamo

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$f(a_n) \cdot f(x_n)$
0	−2.000000	−1.000000	−1.500000	0.98168907	> 0
1	−1.500000	−1.000000	−1.250000	0.24034296	> 0
2	−1.250000	−1.000000	−1.125000	−0.04478315	< 0
3	−1.250000	−1.125000	−1.187500	0.09137377	> 0
4	−1.187500	−1.125000	−1.156250	0.02174343	> 0
5	−1.156250	−1.125000	−1.140625	−0.01190179	< 0

Rješenje je $x_5 = -1.140625$ jer je $|f(x_5)| \approx 0.01190179 < 0.01718281828$. □

1.3.2. Newtonova metoda (metoda tangente)

Kod Newtonove metode, funkciju f aproksimiramo njenom tangentom (u nekoj odabranoj točki $(x_0, f(x_0))$), pa nultočka tangente x_1 aproksimira nultočku funkcije. Postupak ponavljamo s točkom $(x_1, f(x_1))$.

Bitna razlika obzirom na metodu raspolavljanja je da Newtonova metoda ne mora konvergirati prema nultočki funkcije, ali kad konvergira prema jednostrukoj nultočki, konvergirat će brže nego metoda raspolavljanja (kvadratično).

Pretpostavimo da funkcije f na $[a,b]$ je neprekidna, ima neprekidnu prvu i drugu derivaciju (druga derivacija potrebna nam je za ocjenu pogreške), ili jednostavnije to se kaže da je $f \in C^2[a,b]$ (klase C^2 na $[a,b]$). Ako je ispunjeno i

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

to znači da f ima nultočku u $[a, b]$. Newtonova metoda formira niz aproksimacija $(x_{n+1}, n \in \mathbf{N}_0)$ oblika

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Ocjena pogreške je oblika

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2.$$

Želimo li da je pogreška u izračunatoj aproksimaciji nultočke manja ili jednaka ε, dovoljno je zatražiti da je desna strana prethodne nejednakosti manja ili jednaka ε, odakle izlazi dinamička ocjena pogreške

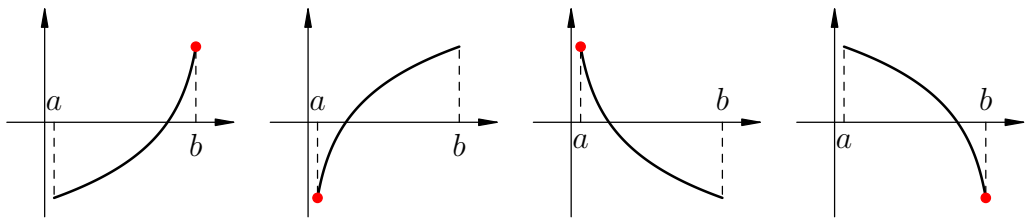
$$|x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{M_2}}.$$

U nekim će slučajevima Newtonova metoda **sigurno konvergirati**. Uvjeti koji moraju biti ispunjeni da Newtonova metoda sigurno konvergira su:

- f' i f'' ne promijene predznak na $[a, b]$ (četiri moguća slučaja),
- startamo sa strmijeg kraja intervala, tj. s onog ruba u kojem je ispunjeno

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0.$$

Grafički te četiri mogućnosti su prikazane na slici 1.4, s tim da je krugom (crvenim) označane startna točka.



Slika 1.4: Slučajevi sigurne konvergencije Newtonove metode.

Katkad uvjete za sigurnu konvergenciju nije moguće ispuniti. Na primjer funkcije $f(x) = x^3$ ima nultočku u 0, a u toj točki druga derivacija mijenja predznak.

Zadatak 1.9 *Newtonovom metodom nađite realne korijene jednadžbe*

$$x^5 + x + 1 = 0$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$.

Rješenje: Prvo, zadan je polinom koji je neprekidna funkcija i ima sve derivacije neprekidne. Nadalje, njegova je derivacija

$$f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$$

za svaki x, tj. polinom $f(x) = x^5 + x + 1$ je strogo rastuća funkcija, pa ima samo jednu realnu nultočku.

Pokušajmo locirati tu nultočku. Zbog $f(0) = 1$ (i strogog rasta), ne postoje pozitivne nultočke. Nadalje $f(-1) = -1$, pa je nultočka sigurno u intervalu $[-1, 0]$.

Budući da prva derivacija ne mijenja predznak na $[-1, 0]$, pogledajmo što se događa s drugom derivacijom:

$$f''(x) = 20x^3.$$

Druga je derivacija na $[-1, 0]$ ima negativan predznak, osim u točki 0. Zbog toga, interval $[-1, 0]$ treba suziti, tako da dobijemo interval gdje druga derivacija neće promijeniti predznak. Ispitajmo je li nultočka ostala u intervalu $[-1, -0.5]$. Vrijedi

$$f(-0.5) = -0.5^5 - 0.5 + 1 > 0, \quad f(-1) \cdot f(-0.5) < 0.$$

Dakle, na intervalu $[-1, -0.5]$ osigurali smo da druga derivacija ne mijenja predznak. Sad još samo treba odrediti strmiji kraj za start. Budući da je $f''(x) < 0$ na $[-1, -0.5]$, onda treba startati iz onog ruba intervala gdje je funkcijska vrijednost, također negativna, da bi vrijedilo $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$, tj. treba startati iz $x_0 = -1$.

Time smo osigurali konvergenciju. Preostaje samo napraviti dinamičku ocjenu pogreške i naći nultočku na zadanu točnost.

Izračunajmo

$$\begin{aligned}
m_1 &= \min_{x\in[-1,-0.5]} |f'(x)| = \min_{x\in[-1,-0.5]} (5x^4 + 1) \\
&= (\text{zbog } f''(x) < 0 \text{ na } [-1, -0.5]\ f' \text{ pada,} \\
&\qquad \text{ali je pozitivna, pa je min u desnom rubu}) \\
&= f'(-0.5) = 1.3125 \\
M_2 &= \max_{x\in[-1,-0.5]} |f''(x)| = \max_{x\in[-1,-0.5]} |20x^3| = \max_{x\in[-1,-0.5]} (-20x^3) \\
&= (\text{zbog } (-20x^3)' = -60x^2 < 0 \text{ na } [-1, -0.5], \\
&\qquad (-20x^3) \text{ pada i pozitivna je pa je max u lijevom rubu}) \\
&= -f''(-1) = 20.
\end{aligned}$$

Dakle, dinamička ocjena greške glasi

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{M_2}} = \sqrt{\frac{2.625 \cdot 10^{-4}}{20}} = 0.003622844.$$

Prema tome, niz iteracija dobivamo iz

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 + x_n + 1}{5x_n^4 + 1}, \quad x_0 = -1.$$

Niz aproksimacija glasi

$$\begin{aligned}
x_0 &= -1.000000000000000 \\
x_1 &= x_0 - \frac{-1.00000e{+}00}{6.00000e{+}00} = -0.833333333333333, \quad |x_1 - x_0| = 1.66666667e{-}01 \\
x_2 &= x_1 - \frac{-2.35211e{-}01}{3.41127e{+}00} = -0.764382115660107, \quad |x_2 - x_1| = 6.89512177e{-}02 \\
x_3 &= x_2 - \frac{-2.53293e{-}02}{2.70692e{+}00} = -0.755024867231838, \quad |x_3 - x_2| = 9.35724843e{-}03 \\
x_4 &= x_3 - \frac{-3.86288e{-}04}{2.62486e{+}00} = -0.754877701770128, \quad |x_4 - x_3| = 1.47165462e{-}04,
\end{aligned}$$

pa možemo stati jer je $|x_4 - x_3|$ manje od tražene dinamičke ocjene pogreške. Aproksimacija nultočke je $x_4 = -0.754877701770128$. Napomena: u razlomcima u prethodnoj tablici nisu ispisane sve decimale. □

Zadatak 1.10 *Metodom tangente nađite pozitivni korijen jednadžbe*

$$x - \sin x - 0.25 = 0$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$.

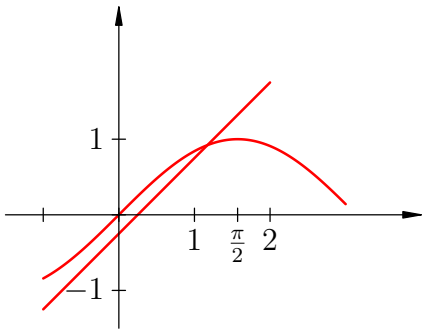
Rješenje: Skicirajmo grafove funkcija $\sin x$ i $x - 0.25$ da bismo približno odredili gdje se nalazi najmanja pozitivna nultočka (vidjeti sliku 1.5).

Vidimo da jednadžba ima samo jedno rješenje α na cijelom $\mathbf{R}$ i to $\alpha \in \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\begin{aligned}
f(1) &\approx -0.091470985 \\
f\left(\frac{\pi}{2}\right) &\approx \quad 0.320796327,
\end{aligned} \qquad f(1) \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right) < 0.$$

Za ocjenu greške potrebne su nam derivacije:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1 - \cos x > 0 \quad \text{na } \left[1, \frac{\pi}{2}\right] \\
f''(x) &= \sin x > 0 \quad \text{na } \left[1, \frac{\pi}{2}\right],
\end{aligned}$$



Slika 1.5: Grafovi funkcija $\sin x$ i $x - 0.25$.

pa će metoda sigurno konvergirati ako krenemo iz strmijeg ruba, a to je $\dfrac{\pi}{2}$, jer je

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot f''\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0.$$

Ocjene derivacija:

$$\begin{aligned}
m_1 &= \min_{x\in[1,\frac{\pi}{2}]} |f'(x)| = \min_{x\in[1,\frac{\pi}{2}]} f'(x) \\
&= (\text{zbog } f''(x) > 0 \text{ na } [1, \tfrac{\pi}{2}]\ f' \text{ raste i pozitivna je, pa je min u lijevom rubu}) \\
&= f'(1) = 1 - \cos x \approx 0.459697694 \\
M_2 &= \max_{x\in[1,\frac{\pi}{2}]} |f''(x)| = \max_{x\in[1,\frac{\pi}{2}]} f''(x) = \max_{x\in[1,\frac{\pi}{2}]} \sin x \\
&= (\text{jer } \sin x \text{ raste na } [1, \tfrac{\pi}{2}] \text{ i pozitivna je, pa je max u desnom rubu}) \\
&= f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.
\end{aligned}$$

Dinamička ocjena greške glasi

$$|x_n - x_{n-1}| \le \sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{M_2}} = 0.030321533.$$

Prema tome, niz iteracija dobivamo iz

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \sin x_n - 0.25}{1 - \cos x_n}, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Niz aproksimacija glasi

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 1.570796326794897 \\
x_1 &= x_0 - \frac{3.20796e{-}01}{1.00000e{+}00} = 1.250000000000000, \quad |x_1 - x_0| = 3.20796327e{-}01 \\
x_2 &= x_1 - \frac{5.10154e{-}02}{6.84678e{-}01} = 1.175489927167936, \quad |x_2 - x_1| = 7.45100728e{-}02 \\
x_3 &= x_2 - \frac{2.61131e{-}03}{6.14909e{-}01} = 1.171243264467176, \quad |x_3 - x_2| = 4.24666270e{-}03,
\end{aligned}
$$

pa možemo stati jer je $|x_3 - x_2|$ manje od tražene dinamičke ocjene pogreške. Aproksimacija nultočke je $x_3 = 1.171243264467176$. Napomena: u razlomcima u prethodnoj tablici nisu ispisane sve decimale. $\square$