4. Rješavanje nelinearnih jednadžbi

4.1. Općenito o iterativnim metodama

Računanje nultočaka nelinearnih funkcija jedan je od najčešćih zadataka primijenjene matematike. Općenito, neka je zadana funkcija

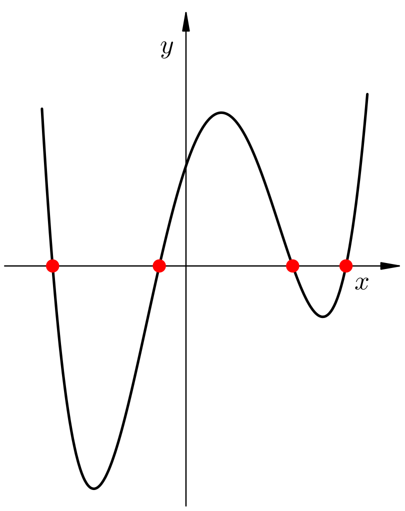
$$f : I \to \mathbb{R},$$

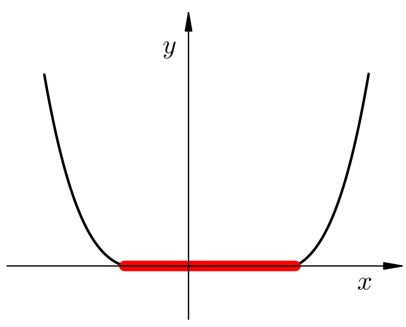
gdje je I neki interval. Tražimo sve one $x \in I$ za koje je

$$f(x) = 0.$$

Takve točke x zovu se rješenja, korijeni pripadne jednadžbe ili nultočke funkcije f.

U pravilu, pretpostavljamo da je f **neprekidna** na I i da su joj nultočke izolirane. U protivnom postojao bi problem konvergencije.





Traženje nultočki na zadanu točnost sastoji se od dvije faze.

1. Izolacije jedne ili više nultočki, tj. nalaženje intervala I unutar kojeg se nalazi bar jedna nultočka. Ovo je teži dio posla i obavlja se na temelju analize toka funkcije.
2. Iterativno nalaženje nultočke na traženu točnost.

Postoji mnogo metoda za nalaženje nultočaka nelinearnih funkcija na zadanu točnost. One se bitno razlikuju po tome hoće li uvijek konvergirati, tj. imamo li sigurnu konvergenciju ili ne i po brzini konvergencije. Uobičajen je slučaj da brze metode nemaju sigurnu konvergenciju, dok je sporije metode imaju.

Brzina konvergencije se definira pomoću reda konvergencije metode.

Definicija 4.1.1. *Niz iteracija* $(x_n, n \in \mathbb{N}_0)$ *konvergira prema točki* α *s redom konvergencije* p*,* $p \geq 1$ *ako vrijedi*

$$|\alpha - x_n| \leq c\,|\alpha - x_{n-1}|^p, \quad n \in \mathbb{N} \tag{4.1.1}$$

za neki $c > 0$*. Ako je* $p = 1$*, kažemo da niz konvergira linearno prema* α*. U tom slučaju je nužno da je* $c < 1$ *i obično se* c *naziva faktor linearne konvergencije.*

Relacija (4.1.1) katkad nije zgodna za linearne iterativne algoritme. Ako za slučaj $p = 1$ i $c < 1$ u (4.1.1), upotrijebimo indukciju po n, onda dobivamo da je

$$|\alpha - x_n| \leq c^n |\alpha - x_0|, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.1.2}$$

Katkad će biti mnogo lakše pokazati (4.1.2) nego (4.1.1). I u slučaju (4.1.2), reći ćemo da niz iteracija konvergira linearno s faktorom c.

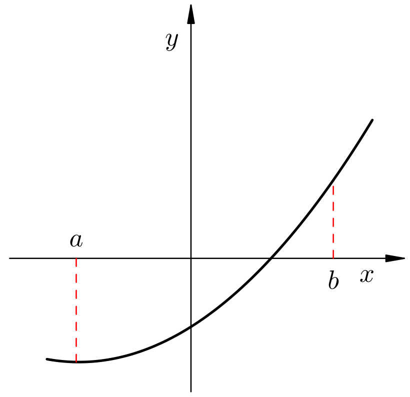
4.2. Metoda raspolavljanja (bisekcije)

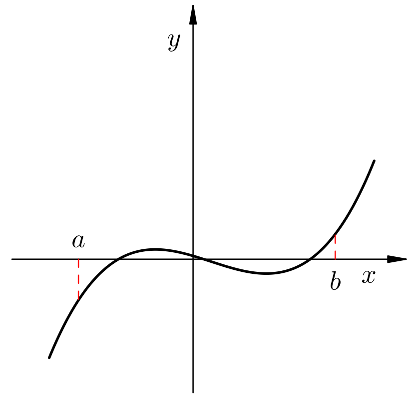
Najjednostavnija metoda nalaženja nultočaka funkcije je metoda raspolavljanja. Ona funkcionira za neprekidne funkcije, ali zbog toga ima i najlošiju ocjenu pogreške.

Osnovna pretpostavka za primjenu algoritma raspolavljanja je **neprekidnost** funkcije f na intervalu $[a, b]$ i uvjet

$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

Prethodna relacija znači da funkcija f ima na intervalu $[a, b]$ **barem jednu** nultočku.

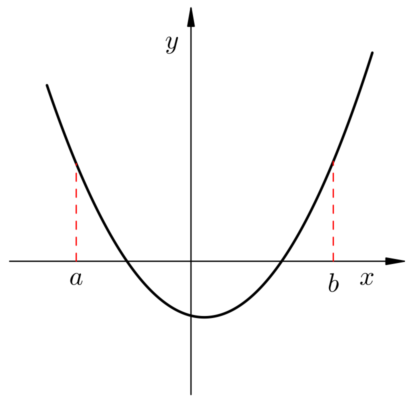


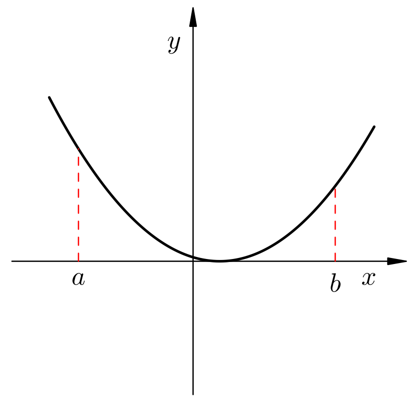


S druge strane, ako je

$$f(a) \cdot f(b) > 0,$$

to **ne mora** značiti da f nema unutar $[a, b]$ nultočku. Na primjer, moglo se dogoditi da smo loše separirali nultočke i da f ima unutar $[a, b]$ paran broj (brojeći ih s višestrukostima) nultočaka, ili nultočku parnog reda.





Dok je za prvi primjer s prethodne slike boljom separacijom nultočki lako postići $f(a) \cdot f(b) < 0$, za drugi je primjer to nemoguće! Dakle, nultočke parnog reda nemoguće je naći metodom bisekcije.

Ako vrijede polazne pretpostavke, metoda raspolavljanja (bez dodatnih uvjeta) konvergirat će prema nekoj nultočki iz intervala $[a, b]$.

Algoritam raspolavljanja je vrlo jednostavan. Označimo s α pravu nultočku funkcije, a zatim s $a_0 := a$, $b_0 := b$ i x_0 polovište $[a_0, b_0]$, tj.

$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}.$$

Neka je $n \geq 1$. U n-tom koraku algoritma konstruiramo interval $[a_n, b_n]$ kojemu je duljina polovina duljine prethodnog intervala, ali tako da je nultočka ostala unutar intervala $[a_n, b_n]$.

Konstrukcija intervala $[a_n, b_n]$ sastoji se u raspolavljanju intervala $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ točkom x_{n-1} i to tako da je

$$\begin{aligned} a_n &= x_{n-1}, \ b_n = b_{n-1} \quad \text{ako je} \quad f(a_{n-1}) \cdot f(x_{n-1}) > 0, \\ a_n &= a_{n-1}, \ b_n = x_{n-1} \quad \text{ako je} \quad f(a_{n-1}) \cdot f(x_{n-1}) < 0. \end{aligned}$$

Zašto je dovoljno ispitati samo predznak $f(a_{n-1}) \cdot f(x_{n-1})$, a nije potrebno gledati $f(x_{n-1}) \cdot f(b_{n-1})$? Ako je u intervalu $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ bila nultočka (uz pretpostavku neprekidnosti funkcije), onda je vrijedilo

$$f(a_{n-1}) \cdot f(b_{n-1}) < 0.$$

Tvrdimo da je

$$f(a_{n-1}) \cdot f^2(x_{n-1}) \cdot f(b_{n-1}) \leq 0,$$

jer je $f^2(x_{n-1}) \geq 0$. Ako je $f(x_{n-1}) = 0$, onda smo zadovoljni, jer je x_{n-1} nultočka, pa iteracije prekidamo. Dakle, zanimljiv je jedino slučaj $f^2(x_{n-1}) > 0$. Tada prethodnu nejednakost možemo pisati kao

$$[f(a_{n-1}) \cdot f(x_{n-1})] \cdot [f(x_{n-1}) \cdot f(b_{n-1})] < 0.$$

Budući da produkt dva broja može biti manji od nule samo ako su različitih predznaka, to znači da ako je $f(a_{n-1}) \cdot f(x_{n-1}) > 0$, onda je $f(x_{n-1}) \cdot f(b_{n-1}) < 0$ i obratno.

Postupak zaustavljamo kad je

$$|\alpha - x_n| \leq \varepsilon.$$

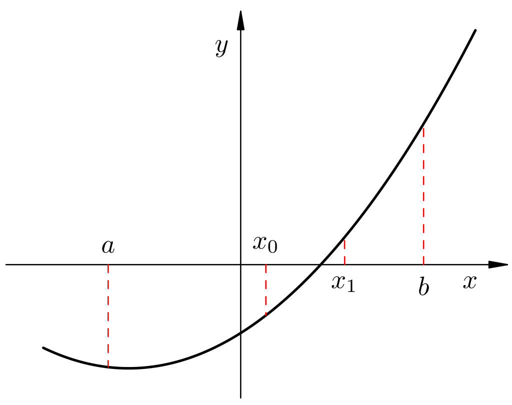
Kako ćemo znati da je prethodna relacija ispunjena ako ne znamo α? Jednostavno, budući da je x_n polovište intervala $[a_n, b_n]$, a $\alpha \in [a_n, b_n]$, onda je

$$|\alpha - x_n| \leq b_n - x_n,$$

pa je dovoljno postaviti zahtjev

$$b_n - x_n \leq \varepsilon.$$

Grafički, metoda raspolavljanja izgleda ovako



Napišimo algoritam za metodu raspolavljanja.

Algoritam 4.2.1. (Metoda raspolavljanja)

$x := (a+b)/2;$
while $b - x > \varepsilon$ **do**
  begin;
  if $f(x) * f(b) < 0.0$ **then**
    $a := x$
  else
    $b := x;$
  $x := (a+b)/2;$
  end;
{ Na kraju je $x \approx \alpha$. }

Iz konstrukcije metode lako se izvodi pogreška n-te aproksimacije nultočke. Vrijedi

$$|\alpha - x_n| \leq b_n - x_n = \frac{1}{2}\,(b_n - a_n) = \frac{1}{2^2}\,(b_{n-1} - a_{n-1}) = \cdots = \frac{1}{2^{n+1}}\,(b-a). \quad (4.2.1)$$

Primijetite da je

$$\frac{b-a}{2} = b - x_0,$$

pa bismo relaciju (4.2.1) mogli pisati kao

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{1}{2^n}\,(b - x_0).$$

Ova relacija podsjeća na (4.1.2), ali zdesna se nigdje ne pojavljuje $|\alpha - x_0|$. Ipak desna strana daje nam naslutiti da će konvergencija biti dosta spora.

Relacija (4.2.1) omogućava da unaprijed odredimo koliko je koraka raspolavljanja potrebno da bismo postigli točnost ε. Da bismo postigli da je $|\alpha - x_n| \leq \varepsilon$, dovoljno je zahtijevati

$$\frac{1}{2^{n+1}}\,(b-a) \leq \varepsilon.$$

Zadnja nejednakost je ekvivalentna s

$$\frac{b-a}{\varepsilon} \leq 2^{n+1},$$

a zatim logaritmiranjem nejednakosti dobivamo $\log(b-a) - \log\varepsilon \leq (n+1)\log 2$, odnosno

$$n \geq \frac{\log(b-a) - \log\varepsilon}{\log 2} - 1, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Ako je funkcija f još i klase $C^1[a,b]$, tj. ako f ima i neprekidnu prvu derivaciju, može se dobiti dinamička ocjena za udaljenost aproksimacije nultočke od prave nultočke.

Ako funkciju f razvijemo u okolini točke α u Taylorov red do konstantnog člana (ili kraće po Teoremu srednje vrijednosti), imamo

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\xi)(x_n - \alpha),$$

pri čemu je ξ između x_n i α. Prvo iskoristimo da je α nultočka, tj. $f(\alpha) = 0$, a zatim uzmemo apsolutne vrijednosti obje strane. Dobivamo

$$|f(x_n)| = |f'(\xi)|\,|\alpha - x_n|,$$

odakle slijedi

$$|\alpha - x_n| = \frac{|f(x_n)|}{|f'(\xi)|}. \tag{4.2.2}$$

Znamo da je α u intervalu $[a_n, b_n]$. Pretpostavimo da možemo ocijeniti

$$|f'(\xi)| \geq m_1, \quad m_1 = \min_{x\in[a,b]} |f'(x)|.$$

Ako je $m_1 > 0$, uvrštavanjem prethodne ocjene u (4.2.2), izlazi

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}.$$

Drugim riječima, ako želimo da je $|\alpha - x_n| \leq \varepsilon$, dovoljno je zahtijevati

$$\frac{|f(x_n)|}{m_1} \leq \varepsilon,$$

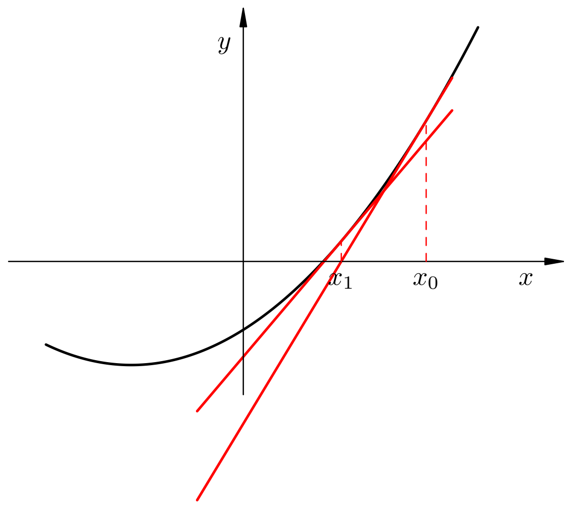
odnosno

$$|f(x_n)| \leq m_1\varepsilon.$$

4.3. Metoda tangente (Newtonova metoda)

Ako graf funkcije f aproksimiramo tangentom, dobili smo metodu tangente ili Newtonovu metodu. Time smo izgubili svojstvo sigurne konvergencije, ali se nadamo da će metoda brzo konvergirati.

Pretpostavimo da je zadana početna točka x_0. Ideja metode je povući tangentu u točki $(x_0, f(x_0))$ i definirati novu aproksimaciju x_0 u točki gdje ona siječe os x.



Geometrijski izvod je jednostavan. U točki x_n napiše se jednadžba tangente i pogleda se gdje siječe os x. Jednadžba tangente je

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n),$$

odakle izlazi da je nova aproksimacija $x_{n+1} := x$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Ako umjesto derivacije $f'(x_n)$ uzmemo njenu aproksimaciju

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}},$$

dobili smo metodu sekante, koja može biti korisna kad se derivacija funkcije teško računa.

Do Newtonove metode može se doći i na drugačiji način. Pretpostavimo li da je funkcija f dva puta neprekidno derivabilna (na nekom području oko α), onda je možemo razviti u Taylorov red oko x_n do uključivo prvog člana. Dobivamo

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(x - x_n)^2,$$

pri čemu je ξ_n između x i x_n. Uvrštavanjem $x = \alpha$, dobivamo

$$0 = f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(\alpha - x_n)^2.$$

Premještanjem, uz pretpostavku $f'(x_n) \neq 0$, izlazi

$$\alpha = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - (\alpha - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}.$$

Primijetite da prva dva člana zdesna daju x_{n+1}, pa dobivamo

$$\alpha - x_{n+1} = -(\alpha - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}. \tag{4.3.1}$$

Iz (4.3.1), odmah čitamo da je Newtonova metoda, kad konvergira kvadratično konvergentna. Ipak, treba biti oprezan, jer takav zaključak vrijedi samo ako $f'(x_n)$ ne teži k nuli tijeku cijelog procesa, tj. ako je $f'(\alpha) \neq 0$, dakle ako je nultočka jednostruka.

Za Newtonovu metodu može se dokazati sljedeći teorem o konvergenciji (dokaz možete pronaći u Osnovnom udžbeniku).

Teorem 4.3.1. *Neka su f, f' i f'' neprekidne za sve x u nekom intervalu koji sadrži jednostruku nultočku α. Ako je početna aproksimacija x_0 izabrana dovoljno blizu nultočke α, niz iteracija x_n konvergirat će prema α s redom konvergencije $p = 2$. Čak štoviše, vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^2} = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}.$$

Jednostavnim riječima, prethodni teorem daje dovoljne uvjete za tzv. **lokalnu** konvergenciju Newtonove metode prema jednostrukoj nultočki. Lokalnost se odnosi na to da početna aproksimacija mora biti dovoljno blizu nultočke

$$|\alpha - x_0| \leq \varepsilon.$$

Pretpostavimo da smo locirali nultočku funkcije f u segmentu $[a, b]$ i znamo da je f klase C^2 na tom segmentu. Neka je

$$M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|, \quad m_1 = \min_{x\in[a,b]} |f'(x)|.$$

Funkcija f je strogo monotona na $[a, b]$ onda i samo onda ako je $m_1 > 0$. Naime, funkcija f' je neprekidna na segmentu $[a, b]$, pa f' poprima svoj minimum i maksimum u nekoj točki segmenta. Ako je f monotono rastuća (padajuća), tada je $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) za sve x iz segmenta $[a, b]$, pa je $m_1 > 0$. Obratno, $m_1 > 0$ povlači monotonost funkcije f. Stoga, ako je $m_1 > 0$, f ima jedinstvenu jednostruku nultočku α u $[a, b]$.

Veličine M_2 i m_1 daju i lokalne ocjene greške iteracija u Newtonovoj metodi, uz uvjet da su sve iteracije u segmentu $[a, b]$. Iz ranije relacije (4.3.1)

$$\alpha - x_n = -\frac{f''(\xi_{n-1})}{2f'(x_{n-1})} (\alpha - x_{n-1})^2,$$

gdje je ξ_{n-1} između α i x_{n-1}, odmah slijedi

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1}\,(\alpha - x_{n-1})^2.$$

Ova ocjena nije naročito korisna za praksu, jer α ne znamo.

Da bismo izveli za praksu pogodniju ocjenu greške, iskoristit ćemo Taylorov teorem. Za dvije susjedne iteracije u Newtonovoj metodi vrijedi

$$f(x_n) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + \frac{f''(\xi_{n-1})}{2}(x_n - x_{n-1})^2,$$

pri čemu je ξ_{n-1} između x_{n-1} i x_n. Po definiciji iteracija u Newtonovoj metodi vrijedi i

$$f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = 0,$$

pa je

$$f(x_n) = \frac{f''(\xi_{n-1})}{2}(x_n - x_{n-1})^2.$$

Koristeći pretpostavku x_{n-1}, $x_n \in [a, b]$, dobivamo

$$|f(x_n)| \leq \frac{M_2}{2}(x_n - x_{n-1})^2.$$

Kao i kod metode bisekcije, ako je $m_1 > 0$, iz (4.2.2) slijedi ocjena

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}.$$

Kombinacijom ovih ocjena dobivamo

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2,$$

što se može iskoristiti u praksi. Ako je ε gornja ograda za apsolutnu grešku (uobičajeno se to kaže samo tražena točnost), onda test

$$\frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2 \leq \varepsilon$$

ili napisan u formi u kojoj se uobičajeno koristi

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{M_2}}$$

garantira da je $|\alpha - x_n| \leq \varepsilon$. Jasno, s obzirom da računamo na računalu, zadnja nejednakost će vrijediti do na greške zaokruživanja. Uočimo da možemo koristiti i raniji test

$$\frac{|f(x_n)|}{m_1} \leq \varepsilon.$$

U prethodnim ocjenama greške koristili smo pretpostavku da je f strogo monotona na $[a,b]$, ili ekvivalentno, da prva derivacija ima isti predznak na cijelom intervalu. Ako još i druga derivacija ima fiksni predznak na tom intervalu, onda možemo dobiti i **globalnu** konvergenciju Newtonove metode.

Teorem 4.3.2. *Neka je $f \in C^2[a,b]$, $f(a) \cdot f(b) < 0$ i neka f' i f'' nemaju nultočke u $[a,b]$, (tj. f' i f'' imaju fiksni predznak na $[a,b]$). Ako polazna iteracija x_0 iz intervala $[a,b]$ zadovoljava uvjet*

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0,$$

onda niz iteracija dobiven Newtonovom metodom konvergira prema (jedinstvenoj jednostrukoj) nultočki α funkcije f.

Uvjet $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ na izbor startne točke u prethodnom teoremu ima vrlo jednostavnu geometrijsku interpretaciju. Ako pogledamo graf funkcije f na $[a,b]$, startnu točku x_0 treba odabrati na "strmijoj" strani funkcije.

Prethodni teoremi daju samo dovoljne uvjete konvergencije pojedinih iterativnih metoda. U praktičnom računanju često imamo samo interval $[a,b]$ u kojem smo locirali nultočku funkcije f, a **nemamo** dodatne informacije o funkciji f iz kojih bismo mogli izvući zaključak o konvergenciji bržih iterativnih metoda. Zbog toga se ove metode katkad kombiniraju s metodom bisekcije na sljedeći način. Prvo izračunamo novu iteraciju po bržoj metodi i ako ona ostaje u trenutnom intervalu, onda ju prihvaćamo i s njom nastavljamo iteracije i skraćujemo interval. U protivnom, radimo korak bisekcije za smanjivanje intervala.

Primijetite da smo sve teoreme u ovom poglavlju iskazivali samo za jednostruke nultočke. Kao što će se u primjerima vidjeti, Newtonova metoda za višestruke nultočke konvergira linearno. Ipak, Newtonova metoda se može modificirati tako da konvergira kvadratično i za višestruke nultočke (pogledati za detalje Osnovni udžbenik).

Ako točno znate višestrukost nultočke, recimo neka je ona k, onda se može koristiti metoda s "produljenom" korekcijom

$$x_{n+1} = x_n - k \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Ako ne znamo višestrukost nultočke, može se raditi na sljedeći način. Formalno napišimo funkciju f koja ima nultočku α reda k, $k > 1$ (k ne znamo)

$$f(x) = (x-\alpha)^k h(x), \quad h(\alpha) \neq 0.$$

Tvrdimo da derivacija f' ima u α nultočku reda $k-1$

$$f'(x) = k(x-\alpha)^{k-1}h(x) + (x-\alpha)^k h'(x) = (x-\alpha)^{k-1}(kh(x) + (x-\alpha)h'(x)).$$

Očito je vrijednost $(kh(x) + (x - \alpha)h'(x))$ u α jednaka

$$(kh(\alpha) + (\alpha - \alpha)h'(\alpha)) = kh(\alpha) \neq 0,$$

pa zaključujemo da funkcija f' ima $(k-1)$-struku nultočku u α. Sada je očito da funkcija

$$g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

ima jednostruku nultočku u α, pa će Newtonova metoda, ako konvergira, konvergirati kvadratično prema α. Drugim riječima, Newtonovu metodu trebamo primijeniti na funkciju g.

4.4. Primjeri

Primjer 4.4.1. *Usporedimo brzinu metoda za izračunavanje $\sqrt[3]{1.5}$.*

Taj problem možemo interpretirati i kao traženje realne pozitivne nultočke funkcije $f(x) = x^3 - 1.5$.

Zatražimo li pogrešku manju od 10^{-8}, metodi bisekcije bit će potrebno 27 raspolavljanja, a približna nultočka bit će $x_{27} = 1.144714239984751$.

```
METODA BISEKCIJE
----------------

 f(  1.00) = -0.50000000000
 f(  2.00) =  6.50000000000

 trazena tocnost racunanja =  1.00000E-0008

 n       a              b              x              f(x)     f(a)*f(x)
------------------------------------------------------------------------
 0  1.00000000000  2.00000000000  1.50000000000   1.87500000000    < 0
 1  1.00000000000  1.50000000000  1.25000000000   0.45312500000    < 0
 2  1.00000000000  1.25000000000  1.12500000000  -0.07617187500    > 0
 3  1.12500000000  1.25000000000  1.18750000000   0.17456054688    < 0
 4  1.12500000000  1.18750000000  1.15625000000   0.04580688477    < 0
 5  1.12500000000  1.15625000000  1.14062500000  -0.01601791382    > 0
 6  1.14062500000  1.15625000000  1.14843750000   0.01468420029    < 0
 7  1.14062500000  1.14843750000  1.14453125000  -0.00071924925    > 0
 8  1.14453125000  1.14843750000  1.14648437500   0.00696935505    < 0
 9  1.14453125000  1.14648437500  1.14550781250   0.00312177557    < 0
10  1.14453125000  1.14550781250  1.14501953125   0.00120044418    < 0
11  1.14453125000  1.14501953125  1.14477539063   0.00024039276    < 0
```

```
12  1.14453125000  1.14477539063  1.14465332031  -0.00023947941    > 0
13  1.14465332031  1.14477539063  1.14471435547   0.00000044388    < 0
14  1.14465332031  1.14471435547  1.14468383789  -0.00011952096    > 0
15  1.14468383789  1.14471435547  1.14469909668  -0.00005953934    > 0
16  1.14469909668  1.14471435547  1.14470672607  -0.00002954793    > 0
17  1.14470672607  1.14471435547  1.14471054077  -0.00001455207    > 0
18  1.14471054077  1.14471435547  1.14471244812  -0.00000705411    > 0
19  1.14471244812  1.14471435547  1.14471340179  -0.00000330512    > 0
20  1.14471340179  1.14471435547  1.14471387863  -0.00000143062    > 0
21  1.14471387863  1.14471435547  1.14471411705  -0.00000049337    > 0
22  1.14471411705  1.14471435547  1.14471423626  -0.00000002474    > 0
23  1.14471423626  1.14471435547  1.14471429586   0.00000020957    < 0
24  1.14471423626  1.14471429586  1.14471426606   0.00000009241    < 0
25  1.14471423626  1.14471426606  1.14471425116   0.00000003384    < 0
26  1.14471423626  1.14471425116  1.14471424371   0.00000000455    < 0
27  1.14471423626  1.14471424371  1.14471423998  -0.00000001010
------------------------------------------------------------------------

RJESENJE :  x(27) =    1.144714239984751
```

Za grešku manju od 10^{-15} *Newtonova metoda trebat će samo* 7 *iteracija i* $x_7 = 1.144714242553332$.

```
NEWTONOVA METODA
----------------

 trazena tocnost racunanja =  1.00000E-0015

 n           x                   f(x)              korekcija
---------------------------------------------------------------
 0   2.000000000000000   6.500000000000000   0.541666666666667
 1   1.458333333333333   1.601490162037037   0.251009070294785
 2   1.207324263038549   0.259834330619978   0.059419284771986
 3   1.147904978266562   0.012578134527712   0.003181874908824
 4   1.144723103357739   0.000034833084971   0.000008860735819
 5   1.144714242621919   0.000000000269625   0.000000000068587
 6   1.144714242553332   0.000000000000000   0.000000000000000
 7   1.144714242553332   0.000000000000000
---------------------------------------------------------------

RJESENJE :  x( 7) =    1.144714242553332
```

Primjer 4.4.2. *Nađite nultočku funkcije*

$$f(x) = x^3 - 5.56x^2 + 9.1389x - 4.68999$$

korištenjem Newtonove metode, tako da greška bude manja od 10^{-15}.

```
NEWTONOVA METODA
----------------

 dvostruka nultocka  x = 1.23

 trazena tocnost racunanja =  1.00000E-0015

 n          x                  f(x)              korekcija
----------------------------------------------------------------
 0   1.500000000000000  -0.116640000000000   0.147440273037543
 1   1.352559726962457  -0.026248102309329   0.063506947954921
 2   1.289052779007536  -0.006315190760541   0.030015778457640
 3   1.259037000549896  -0.001552203168203   0.014633908572506
 4   1.244403091977390  -0.000384941831542   0.007229603981965
 5   1.237173487995426  -0.000095859059122   0.003593663348690
 6   1.233579824646736  -0.000023918444247   0.001791630511788
 7   1.231788194134948  -0.000005973865556   0.000894525173287
 8   1.230893668961661  -0.000001492750955   0.000446941328040
 9   1.230446727633621  -0.000000373098481   0.000223390506264
10   1.230223337127356  -0.000000093263474   0.000111675233252
11   1.230111661894104  -0.000000023314476   0.000055832614098
12   1.230055829280006  -0.000000005828445   0.000027915056720
13   1.230027914223287  -0.000000001457089   0.000013957215816
14   1.230013957007471  -0.000000000364270   0.000006978529777
15   1.230006978477694  -0.000000000091067   0.000003489245354
16   1.230003489232340  -0.000000000022767   0.000001744617791
17   1.230001744614549  -0.000000000005692   0.000000872307704
18   1.230000872306845  -0.000000000001423   0.000000436153629
19   1.230000436153216  -0.000000000000356   0.000000218076376
20   1.230000218076841  -0.000000000000089   0.000000109038186
21   1.230000109038655  -0.000000000000022   0.000000054517907
22   1.230000054520748  -0.000000000000006   0.000000027259838
23   1.230000027260910  -0.000000000000001   0.000000013624333
24   1.230000013636577  -0.000000000000000   0.000000006828241
25   1.230000006808336  -0.000000000000000   0.000000003389306
26   1.230000003419030  -0.000000000000000   0.000000001729681
27   1.230000001689349  -0.000000000000000   0.000000000823684
28   1.230000000865665  -0.000000000000000   0.000000000401855
29   1.230000000463810   0.000000000000000  -0.000000000000000
30   1.230000000463810   0.000000000000000
----------------------------------------------------------------

RJESENJE :  x(30) =    1.230000000463810
```

Poučeni prethodnim primjerom očekujemo desetak iteracija. Umjesto toga, *bilo nam je potrebno* 30 *iteracija za traženu točnost,* $x_{30} = 1.230000000463810$*, što je signaliziralo da smo ili loše derivirali, ili funkcija ima višestruku nultočku.*

Nije teško pokazati da je 1.23 *dvostruka nultočka zadane funkcije, pa Newtonova metoda konvergira samo linearno. Modificiramo li Newtonovu metodu tako da korekciju pomnožimo s višestrukošću nultočke, za istu točnost bilo nam je potrebno samo* 7 *iteracija,* $x_7 = 1.229999999995655$*, a konvergencija je bila kvadratična.*

```
NEWTONOVA METODA ZA VISESTRUKE NULTOCKE
---------------------------------------

 dvostruka nultocka  x = 1.23

 trazena tocnost racunanja =  1.00000E-0015

 n          x                  f(x)              korekcija
----------------------------------------------------------------
 0   1.500000000000000  -0.116640000000000   0.294880546075085
 1   1.205119453924915  -0.001173009833879  -0.024718265674538
 2   1.229837719599453  -0.000000049250590  -0.000162273360038
 3   1.229999992959491  -0.000000000000000  -0.000000007049176
 4   1.230000000008667   0.000000000000000  -0.000000026758865
 5   1.230000026767532  -0.000000000000001   0.000000026771877
 6   1.229999999995655   0.000000000000000   0.000000000000000
 7   1.229999999995655   0.000000000000000
----------------------------------------------------------------

RJESENJE :  x( 7) =    1.229999999995655
```

Primjer 4.4.3. *Nultočka funkcije*

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x)$$

je $x = 0$*, ali Newtonova metoda neće konvergirati iz svake startne točke* x_0*. Naći ćemo točku* β *za koju vrijedi*

$$\begin{cases} |x_0| < |\beta| & \textit{Newtonova metoda sa startom } x_0 \textit{ konvergira,} \\ |x_0| > |\beta| & \textit{Newtonova metoda sa startom } x_0 \textit{ divergira,} \\ |x_0| = |\beta| & \textit{Newtonova metoda sa startom } x_0 \textit{ ciklira.} \end{cases}$$

Kako ćemo naći točku "cikliranja"? Funkcija $f(x) = \operatorname{arctg} x$ *je neparna, pa da bismo dobili cikliranje, dovoljno je da tangenta na funkciju u točki* β *presiječe os* x *u točki* $-\beta$*. Jednadžba tangente na* arctg *u točki* β *je*

$$y - \operatorname{arctg}\beta = \frac{1}{1+\beta^2}(x - \beta),$$

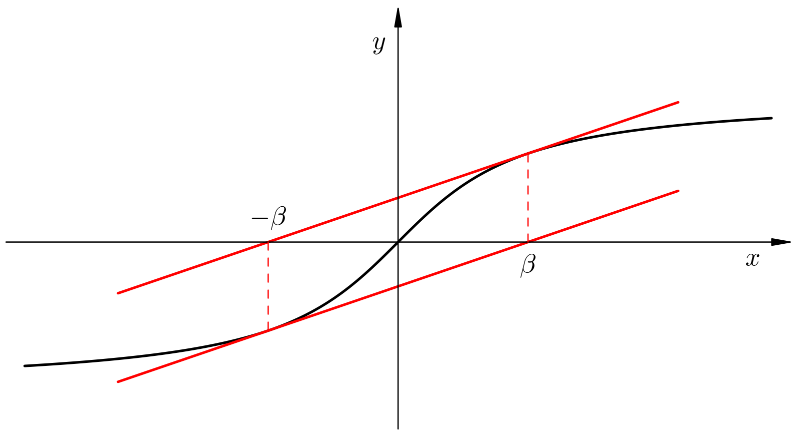
pa će tangenta sijeći os x u $-\beta$, ako je

$$\operatorname{arctg}\beta = \frac{2\beta}{1+\beta^2},$$

čime smo dobili nelinearnu jednadžbu po β. Očito, postoje dva rješenja, suprotnih predznaka, i nije ih teško izračunati metodom bisekcije

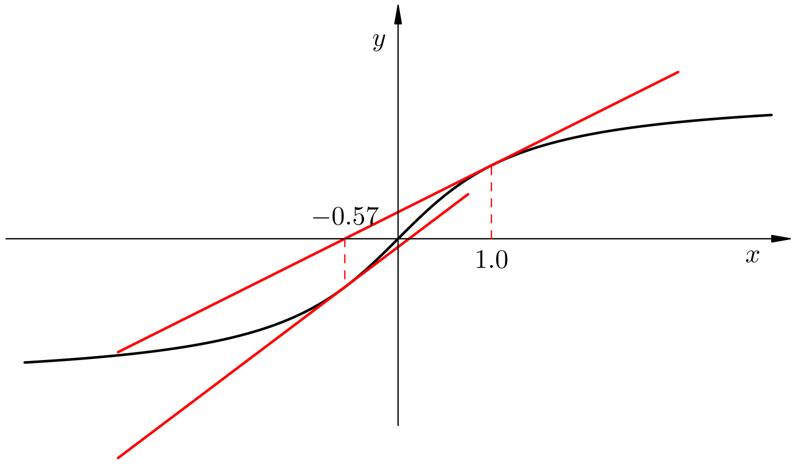
$$\beta = \pm 1.39174520027073489.$$

Pokažimo kako se numerički ponaša Newtonova metoda i nacrtajmo odgovarajuće grafove za sve tri mogućnosti za x_0, recimo za $x_0 = \beta$, $x_0 = 1$ i $x_0 = 1.5$.

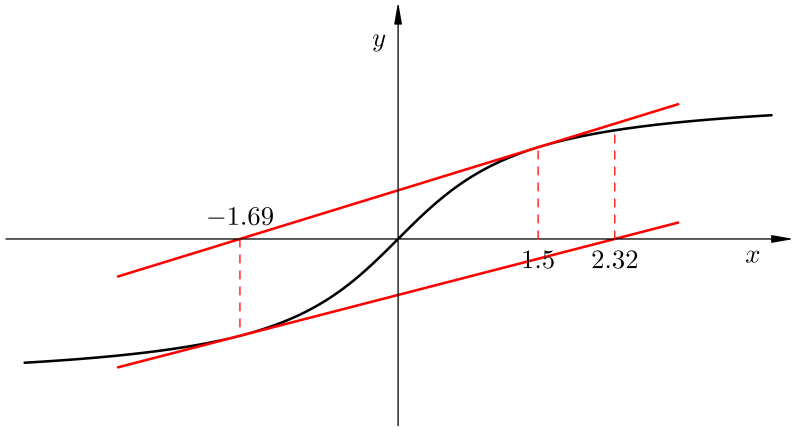



```
NEWTONOVA METODA
----------------

 x_0 = beta

 trazena tocnost racunanja =  1.00000E-0010

 n           x                 f(x)              korekcija
---------------------------------------------------------------
 0   1.391745200270735   0.947747133516990   2.783490400541470
 1  -1.391745200270735  -0.947747133516990  -2.783490400541470
 2   1.391745200270735   0.947747133516990   2.783490400541469
 3  -1.391745200270734  -0.947747133516990  -2.783490400541468
 4   1.391745200270734   0.947747133516990   2.783490400541466
 5  -1.391745200270732  -0.947747133516989  -2.783490400541459
 6   1.391745200270727   0.947747133516988   2.783490400541440
 7  -1.391745200270713  -0.947747133516983  -2.783490400541391
 8   1.391745200270678   0.947747133516971   2.783490400541262
 9  -1.391745200270584  -0.947747133516939  -2.783490400540922
```

```
10   1.391745200270337   0.947747133516939
---------------------------------------------------------------

RJESENJE :  x(10) =    1.391745200270337

Trazena tocnost nije postignuta u  10 iteracija !
```




```
NEWTONOVA METODA
----------------

 x_0 = 1.0

 trazena tocnost racunanja =  1.00000E-0010

 n           x                  f(x)               korekcija
---------------------------------------------------------------
 0    1.000000000000000   0.785398163397448   1.570796326794897
 1   -0.570796326794897  -0.518669369255017  -0.687656230793810
 2    0.116859903998913   0.116332265113896   0.117920926115958
 3   -0.001061022117045  -0.001061021718890  -0.001061022913354
 4    0.000000000796310   0.000000000796310   0.000000000796310
 5   -0.000000000000000  -0.000000000000000  -0.000000000000000
 6    0.000000000000000  -0.000000000000000
---------------------------------------------------------------

RJESENJE :  x( 6) =    0.000000000000000
```




```
NEWTONOVA METODA
----------------

 x_0 = 1.5

 trazena tocnost racunanja =  1.00000E-0010

 n          x                     f(x)              korekcija
---------------------------------------------------------------
 0    1.50000000000        0.9827937232473   3.19407960056
 1   -1.69407960056       -1.0375463591379  -4.01520656199
 2    2.32112696144        1.1640020424220   7.43521479822
 3   -5.11408783678       -1.3776945287028  -3.74097717510E+0001
 4    3.22956839142E+0001  1.5398423269080   1.60761263474E+0003
 5   -1.57531695082E+0003 -1.5701615339901  -3.89655132471E+0006
 6    3.89497600776E+0006  1.5707960700539   2.38302928685E+0013
 7   -2.38302889736E+0013 -1.5707963267949  -8.92028016112E+0026
 8    8.92028016112E+0026  1.5707963267949   1.24990459937E+0054
 9   -1.24990459937E+0054 -1.5707963267949  -2.45399463750E+0108
10    2.45399463750E+0108  1.5707963267949
---------------------------------------------------------------

RJESENJE :  x(10) =  2.4539946374984394E+0108

Trazena tocnost nije postignuta u  10 iteracija !
```