

## 1.4. Aproksimacija i interpolacija

Najčešći praktični problem je izračunavanje vrijednosti neke funkcije koja je zadana samo na diskretnom skupu točaka  $(x_k, f_k)$ ,  $k = 0, \dots, n$ , a približne vrijednosti žlimo naći u nekim točkama koje nisu iz zadanog skupa.

Ako aproksimacijska funkcija  $\varphi$  (koja ovisi o nekim parametrima) ima svojstvo

$$\varphi(x_k) = f_k, \quad k = 0, \dots, n$$

onda kažemo da  $\varphi$  **interpolira** zadane podatke.

Ako imamo zadan  $n + 1$  podatak, onda prema teoremu s predavanja postoji točno jedan polinom stupnja manjeg ili jednakog  $n$  koji interpolira taj skup podataka (uz uvjet da zadane točke imaju različite  $x$ -koordinate).

Taj interpolacijski polinom možemo naći na više načina. U teoretske svrhe obično se koristi Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma, a puno praktičniji je Newtonov oblik.

Nemojte zaboraviti, u praksi je **zabranjeno koristiti** interpolacijske polinome stupnja većeg od 3, jer mogu imati vrlo velike greške. U tim slučajevima koristimo se splajnovima ili metodom najmanjih kvadrata.

### 1.4.1. Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

Interpolacijski polinom  $p_n$  u Lagrangeovom obliku koji interpolira točke baze  $(x_k, f_k)$ ,  $k = 0, \dots, n$  glasi

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k \ell_k(x),$$

pri čemu je

$$\ell_k(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}.$$

Ako funkcija  $f$  koju interpoliramo ima  $(n + 1)$ -u neprekidnu derivaciju, onda smo interpolacijom napravili grešku

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{|\omega(x)|}{(n + 1)!} M_{n+1}, \quad M_{n+1} := \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|,$$

pri čemu je

$$\omega(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k).$$

Ova ocjena greške vrijedi i za Newtonov oblik interpolacijskog polinoma.

**Zadatak 1.11** Nađite interpolacijski polinom koji funkciju

$$f(x) = \sin(\pi x)$$

interpolira u točkama s  $x$ -koordinatama  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \frac{1}{6}$  i  $x_2 = \frac{1}{2}$ . Ocijenite grešku tako dobivene interpolacije. Nadalje, izračunajte vrijednost dobivenog interpolacijskog polinoma u točki  $x = 0.4$ , ocijenite grešku interpolacije u toj točki, te nađite pravu grešku.

**Rješenje:** Zadane točke interpolacije su

$$\begin{array}{c|ccc} x_k & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \hline f_k & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array},$$

pa zbog 3 podatka možemo naći interpolacijski polinom  $p_2$  koji ima stupanj manji ili jednak 2.

Formirajmo Lagrangeovu bazu:

$$\begin{aligned} \ell_0 &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - \frac{1}{6})(x - \frac{1}{2})}{(0 - \frac{1}{6})(0 - \frac{1}{2})} = \frac{(x - \frac{1}{6})(x - \frac{1}{2})}{\frac{1}{12}} \\ &= 12 \left( x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{12} \right) = 12x^2 - 8x + 1, \\ \ell_1 &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 0)(x - \frac{1}{2})}{(\frac{1}{6} - 0)(\frac{1}{6} - \frac{1}{2})} = \frac{x(x - \frac{1}{2})}{-\frac{1}{18}} \\ &= -18 \left( x^2 - \frac{1}{2}x \right) = -18x^2 + 9x, \\ \ell_2 &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 0)(x - \frac{1}{6})}{(\frac{1}{2} - 0)(\frac{1}{2} - \frac{1}{6})} = \frac{x(x - \frac{1}{6})}{\frac{1}{6}} \\ &= 6 \left( x^2 - \frac{1}{6}x \right) = 6x^2 - x. \end{aligned}$$

Interpolacijski polinom glasi

$$\begin{aligned} p_2(x) &= f_0 \ell_0(x) + f_1 \ell_1(x) + f_2 \ell_2(x) \\ &= 0 \cdot (12x^2 - 8x + 1) + \frac{1}{2} \cdot (-18x^2 + 9x) + 1 \cdot (6x^2 - x) = -3x^2 + \frac{7}{2}x. \end{aligned}$$

Primijetite da  $\ell_0$  nismo trebali računati jer je  $f_0 = 0$ !

Za ocjenu greške treba nam  $\omega(x)$

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = (x - 0) \left( x - \frac{1}{2} \right) \left( x - \frac{1}{6} \right) = x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{12}x$$

i treća derivacija funkcije  $f$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(\pi x) & f'(x) &= \pi \cos(\pi x) \\ f''(x) &= -\pi^2 \sin(\pi x) & f'''(x) &= -\pi^3 \cos(\pi x). \end{aligned}$$

Tada imamo

$$M_3 = \max_{x \in [0, \frac{1}{2}]} |f^{(3)}(x)| = \max_{x \in [0, \frac{1}{2}]} |-\pi^3 \cos(\pi x)| = \pi^3 \max_{x \in [0, \frac{1}{2}]} |\cos(\pi x)| = \pi^3,$$

jer je  $0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$  i  $\cos 0 = 1$ . Prema tome ocjena greške za proizvoljnu točku iz intervala  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  glasi

$$|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{\pi^3}{3!} \left| x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{12}x \right|.$$

Izračunajmo još interpolaciju u zadanoj točki

$$p_2(0.4) = -3 \cdot (0.4)^2 + \frac{7}{2} \cdot 0.4 = 0.92.$$

Ocjena greške daje (budući da je  $0.4 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ )

$$|f(0.4) - p_2(0.4)| \leq \frac{\pi^3}{3!} \left| (0.4)^3 - \frac{2}{3} \cdot (0.4)^2 + \frac{1}{12} \cdot 0.4 \right| = 0.04823198604.$$

Prava greška je

$$f(0.4) - p_2(0.4) = \sin(\pi \cdot 0.4) - 0.92 = 0.0310565164,$$

i ona je, naravno po apsolutnoj vrijednosti manja ili jednaka ocjeni greške.  $\square$

**Zadatak 1.12** *Nađite interpolacijski polinom za podatke*

$$(0, 1), (-1, 2), (1, 3).$$

**Rješenje:** Primijetite da sada ne možemo ocjenjivati grešku, jer nije zadana funkcija iz koje su uzeti ti podaci.

Ponovno, zbog tri podatka, imamo interpolacijski polinom stupnja 2.

Formiramo Lagrangeovu bazu:

$$\begin{aligned} \ell_0 &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} = -x^2 + 1, \\ \ell_1 &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x, \\ \ell_2 &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-0)(x+1)}{(1-0)(1+1)} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x. \end{aligned}$$

Interpolacijski polinom tada je

$$p_2(x) = 1 \cdot (-x^2 + 1) + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\right) + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1.$$

□

### 1.4.2. Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Polinom stupnja najviše  $n$  koji interpolira podatke  $(x_k, f_k)$ ,  $k = 0, \dots, n$  u Newtonovom obliku glasi

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x-x_0) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{n-1}),$$

pri čemu su  $f[x_0, \dots, x_n]$  podijeljene razlike. Podijeljene razlike razlike računaju se rekurzivno formulom

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0},$$

sa startom  $f[x_k] := f_k$ ,  $k = 0, \dots, n$ .

Obično se formira tablica podijeljenih razlika

$x_k$	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$\dots$	$f[x_0, \dots, x_n]$
$x_0$	$f[x_0]$				
$x_1$	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_2]$		
$\vdots$	$\vdots$	$f[x_1, x_2]$		$\ddots$	
$x_{n-1}$	$f[x_{n-1}]$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}]$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	$\ddots$	$f[x_0, \dots, x_n]$
$x_n$	$f[x_n]$	$f[x_{n-1}, x_n]$			

i od nje trebamo samo prvi “vršni redak” da bismo napisali interpolacijski polinom.

**Zadatak 1.13** Funkcija  $\sqrt[3]{x}$  zadana je tablično na 3 decimale

$x_k$	1.0	1.1	1.3	1.5	1.6
$f_k$	1.000	1.032	1.091	1.145	1.170

Nađite vrijednost  $\sqrt[3]{1.15}$  i ocijenite grešku. Nađite i pravu grešku.

**Rješenje:** Formiramo tablicu podijeljenih razlika

$x_k$	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f[x_k, \dots, x_{k+3}]$	$f[x_k, \dots, x_{k+4}]$
1.0	1.000				
		0.320			
1.1	1.032		-0.083		
		0.295		0.042	
1.3	1.091		-0.063		-0.083
		0.270		-0.008	
1.5	1.145		-0.067		
		0.250			
1.6	1.170				

Budući da imamo 5 podataka, interpolacijski je polinom stupnja 4 i glasi

$$\begin{aligned}
 p_4(x) = & 1.000 + 0.320(x - 1) - 0.083(x - 1)(x - 1.1) \\
 & + 0.042(x - 1)(x - 1.1)(x - 1.3) \\
 & - 0.083(x - 1)(x - 1.1)(x - 1.3)(x - 1.5).
 \end{aligned}$$

Njegova vrijednost za  $x = 1.15$  je

$$\begin{aligned}
 p_4(1.15) = & 1.000 + 0.320(1.15 - 1) - 0.083(1.15 - 1)(1.15 - 1.1) \\
 & + 0.042(1.15 - 1)(1.15 - 1.1)(1.15 - 1.3) \\
 & - 0.083(1.15 - 1)(1.15 - 1.1)(1.15 - 1.3)(1.15 - 1.5) \\
 = & 1.047295313,
 \end{aligned}$$

odnosno  $p_4(1.15) = 1.047$  ako zaokružujemo na točnost podataka.

Za ocjenu pogreške treba nam 5-ta derivacija:

$$\begin{aligned}
 f(x) = x^{1/3}, & & f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}, & & f''(x) = -\frac{2}{3^2}x^{-5/3}, \\
 f'''(x) = \frac{10}{3^3}x^{-8/3}, & & f^{(4)}(x) = -\frac{80}{3^4}x^{-11/3}, & & f^{(5)}(x) = \frac{880}{3^5}x^{-14/3}.
 \end{aligned}$$

Nadalje,

$$\omega(1.15) = (1.15-1.0)(1.15-1.1)(1.15-1.3)(1.15-1.5)(1.15-1.6) = -1.771875 \cdot 10^{-4}.$$

Nađimo još i  $M_5$ :

$$\begin{aligned} M_5 &= \max_{x \in [1, 1.6]} |f^{(5)}(x)| = \max_{x \in [1, 1.6]} \frac{880}{3^5} x^{-14/3} = \frac{880}{3^5} \max_{x \in [1, 1.6]} \frac{1}{\sqrt[3]{x^{14}}} \\ &= (\text{broj je najveći ako mu je nazivnik najmanji, a to je u 1}) = \frac{880}{3^5}. \end{aligned}$$

Ocjena greške u 1.15 je

$$|f(1.15) - p_4(1.15)| \leq \frac{|\omega(1.15)|}{5!} M_5 = \frac{-1.771875 \cdot 10^{-4}}{120} \cdot \frac{880}{3^5} = 5.347222213 \cdot 10^{-6}.$$

Izračunajmo još pravu grešku

$$f(1.15) - p_4(1.15) = \sqrt[3]{1.15} - 1.047689553 = 0.000394240.$$

No, pogledajmo što smo dobili! Prava greška je veća od ocjene, pa smo ili loše računali, ili je nešto drugo u pitanju! Što? Pošli smo od podataka zaokružanih na 3 decimale, a ne od točnih vrijednosti za  $\sqrt[3]{x_k}$ . Dakle, zaokruživanje početnih podataka dovelo je od zaokruživanja u  $p_4(1.15)$ . Budući da su podaci bili zaokruženi na 3 znamenke, više ne možemo očekivati niti od rezultata. Prava greška bi bila manja od ocjene greške da smo umjesto sa tri znamenke radili s više od 6 (barem 7-8, jer je ocjena greške reda veličine  $10^{-6}$ ).  $\square$

**Zadatak 1.14** Nađite interpolacijski polinom koji interpolira funkciju

$$f(x) = \log_{10} x$$

u točkama s  $x$ -koordinatama 1, 10, 100, 1000. Nađite vrijednost  $\log_{10} 500$ , ocijenite grešku i nađite pravu grešku.

**Rješenje:** Formiramo tablicu podijeljenih razlika

$x_k$	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f[x_k, \dots, x_{k+3}]$
1	0			
10	1	$\frac{1}{9}$		
100	2	$\frac{1}{90}$	$-\frac{1}{990}$	
1000	3	$\frac{1}{900}$	$-\frac{1}{99000}$	$\frac{1}{999000}$

Sada odmah slijedi da je

$$p_3(x) = 0 + \frac{1}{9}(x-1) - \frac{1}{990}(x-1)(x-10) + \frac{1}{999000}(x-1)(x-10)(x-100),$$

pa je

$$p_3(500) = \frac{1}{9} \cdot 499 - \frac{1}{990} \cdot 499 \cdot 490 + \frac{1}{999000} \cdot 499 \cdot 490 \cdot 400 = -93.63345.$$

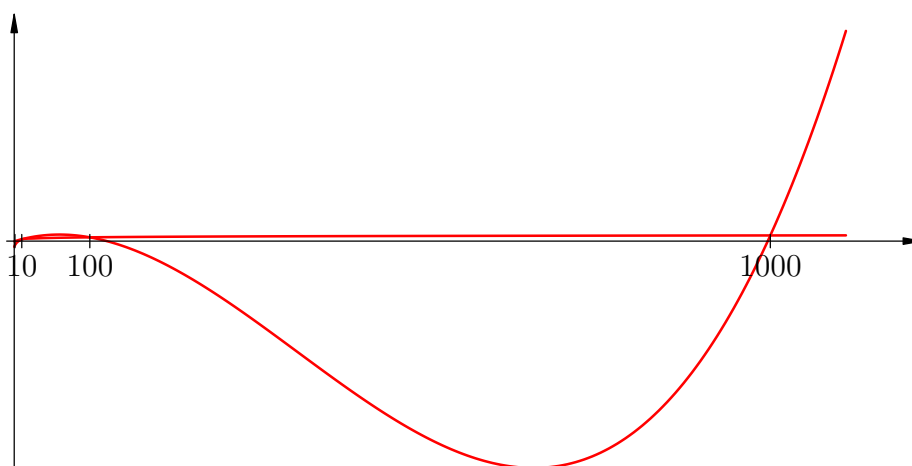
Najprije, uočimo da aproksimacija nije ni približno jednaka  $\log_{10}(500)$ , jer je

$$2 < \log_{10}(500) < 3.$$

Dakle, ili

- smo krivo računali,
- ili interpolacijski polinom loše interpolira funkciju, tj. greške između čvorova su velike.

Pokažimo da se događa ovo drugo. Na slici 1.6 skicirana je funkcija  $f$  i interpolacijski polinom  $p_3$ .



Slika 1.6: Grafovi funkcija  $\log_{10} x$  i  $p_3(x)$ .

Ostaje još naći i ocjenu greške, za koju nam treba maksimum četvrte derivacije funkcije

$$\begin{aligned} f(x) &= \log_{10} x, & f'(x) &= \frac{1}{x} \log_{10} e, & f''(x) &= -\frac{2}{x^2} \log_{10} e, \\ f'''(x) &= \frac{2}{x^3} \log_{10} e, & f^{(4)}(x) &= -\frac{6}{x^4} \log_{10} e. \end{aligned}$$

Nadalje,

$$\begin{aligned} M_4 &= \max_{x \in [1, 1000]} |f^{(4)}(x)| = \max_{x \in [1, 1000]} \left| -\frac{6}{x^4} \log_{10} e \right| = \log_{10} e \max_{x \in [1, 1000]} \frac{6}{x^4} \\ &= (\text{najveću vrijednost dobivamo ako je nazivnik najmanji}) = 6 \log_{10} e. \end{aligned}$$

Da bismo dobili ocjenu greške treba nam još i

$$\omega(x) = (x-1)(x-10)(x-100)(x-1000),$$

pa je

$$\begin{aligned} |f(x) - p_3(x)| &\leq \frac{|\omega(x)|}{4!} M_4 = \frac{6 \log_{10} e}{24} |(x-1)(x-10)(x-100)(x-1000)| \\ &= \frac{\log_{10} e}{4} |(x-1)(x-10)(x-100)(x-1000)|, \end{aligned}$$

i ona vrijedi za svaki  $x \in [1, 1000]$ .

Za  $x = 500$ , ocjena daje

$$|f(500) - p_3(500)| \leq \frac{\log_{10} e}{4} |499 \cdot 490 \cdot 400 \cdot (-500)| = 5.309 \cdot 10^9,$$

dok je prava greška

$$f(500) - p_3(500) = 2.698970004 - (-93.63345) = 96.33242.$$

Dakle ocjena greške je vrlo pesimistična obzirom na pravu grešku. □

### 1.4.3. Diskretna metoda najmanjih kvadrata

Ako znamo oblik ponašanje pojave, odnosno mjerenih podataka, uvijek ga treba iskoristiti. Pretpostavljamo da imamo dovoljno mjerenih točaka  $(x_k, f_k)$ ,  $k = 0, \dots, n$ , koje želimo aproksimirati nekom funkcijom oblika

$$\varphi(x, a_0, \dots, a_m),$$

koja osim o varijabli  $x$  ovisi i o  $m+1$ ,  $m < n$  nepoznatih parametara koje trebamo odrediti.

Ako je funkcija  $\varphi$  linearna, tj. ako vrijedi

$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_m\varphi_m(x),$$

onda metodu najmanjih kvadrata provodimo direktno, tj. tražimo da

$$S := S(a_0, \dots, a_m) = \sum_{k=0}^n (f_k - \varphi(x_k))^2 \rightarrow \min.$$

Nužni uvjeti postojanja minimuma funkcije više varijabli su

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = 0, \quad k = 0, \dots, n.$$

To su i dovoljni uvjeti zbog oblika funkcije, tj. ne treba posebno provjeravati je li to globalni ekstrem.

Ako funkcija  $\varphi$  nije linearna, nastojimo je svesti na linearnu, jer samo linearne funkcije vode na linearne sustave jednadžbi (vidjeti predavanje).

Na kraju, ako je zadan uvjet da  $\varphi$  treba zadovoljavati neka svojstva (na primjer prolaziti određenom točkom ili da njezine derivacija prolazi nekom točkom i sl.) uvijek prvo treba iskoristiti taj uvjet i smanjiti broj parametara, pa tek onda napraviti metodu najmanjih kvadrata.

**Zadatak 1.15** *Za određenu pojavu izmjereni su sljedeći podaci:*

$x_k$	0	1	2	3	4
$f_k$	3.8	3.7	4.0	3.9	4.3

*Nađite aproksimaciju pravcem po metodi najmanjih kvadrata za taj skup podataka.*

**Rješenje:** Aproksimacijska funkcija je

$$\varphi(x) = ax + b,$$

a minimizirati treba

$$S = \sum_{k=0}^4 (f_k - \varphi(x_k))^2 = \sum_{k=0}^4 (f_k - ax_k - b)^2 \rightarrow \min.$$

Uvjeti minimuma daju

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_{k=0}^4 (f_k - ax_k - b)x_k = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_{k=0}^4 (f_k - ax_k - b) = 0.$$

Preuređivanjem obje jednadžbe, tako da sve sume koje sadrže nepoznanice prebacimo na lijevu stranu, a sve one koje ih ne sadrže na desnu stranu, dobivamo sustav

$$a \sum_{k=0}^4 x_k^2 + b \sum_{k=0}^4 x_k = \sum_{k=0}^4 f_k x_k$$

$$a \sum_{k=0}^4 x_k + 5b = \sum_{k=0}^4 f_k.$$

Pritom smo upotrijebili svojstvo da  $a$  i  $b$  ne ovise o indeksu sumacije, pa mogu ispred sume. Sada još samo treba izračunati sume i riješiti linearni sustav. Sume obično pišemo u tablicu:

$x_k$	$f_k$	$x_k^2$	$f_k x_k$	
0	3.8	0	0.0	
1	3.7	1	3.7	
2	4.0	4	8.0	
3	3.9	9	11.7	
4	4.3	16	17.2	
$\Sigma$	10	19.7	30	40.6

Uvrštavanjem, dobivamo linearni sustav

$$\begin{aligned} 30a + 10b &= 40.6 \\ 10a + 5b &= 19.7. \end{aligned}$$

Množenjem druge jednadžbe s  $-2$  i dodavanjem prvoj, izlazi

$$10a = 40.6 - 2 \cdot 19.7 = 1.2 \quad \implies a = 0.12.$$

Množenjem druge jednadžbe s  $-3$  i dodavanjem prvoj, izlazi

$$-5b = 40.6 - 3 \cdot 19.7 = -18.5 \quad \implies b = 3.7.$$

Dakle, aproksimacijska funkcija je

$$\varphi(x) = 0.12x + 3.7.$$

Pogledajmo koliko, zapravo dobro, ova funkcija aproksimira dobivene podatke. Na primjer, u točki 3.5 je

$$\varphi(3.5) = 0.12 \cdot 3.5 + 3.7 = 4.12,$$

što, gledajući podatke, vidimo da ima smisla. □

**Zadatak 1.16** *Odredite funkciju oblika*

$$\varphi(x) = be^{ax}$$

*koja aproksimira podatke*

$x_k$	1	2	3	4
$f_k$	7	11	17	27

*metodom najmanjih kvadrata.*

**Rješenje:** Najprije uočavamo da  $\varphi$  nije linearna funkcija, pa je treba linearizirati, u ovom slučaju logaritmiranjem:

$$\psi(x) = \ln \varphi(x) = \ln(be^{ax}) = \ln b + ax = Ax + B,$$

gdje je  $A = a$ ,  $B = \ln b$ .

Kad se linearizira funkcija, moraju se istom funkcijom linearizirati i podaci, pa uz oznaku  $h_k = \ln f_k$  tablica glasi

$x_k$	1	2	3	4
$h_k$	1.94591	2.39790	2.83321	3.29584

Minimiziramo

$$S = \sum_{k=0}^3 (h_k - \psi(x_k))^2 = \sum_{k=0}^3 (h_k - Ax_k - B)^2 \rightarrow \min.$$

Uvjeti minimuma daju

$$\frac{\partial S}{\partial A} = -2 \sum_{k=0}^3 (h_k - Ax_k - B)x_k = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial B} = -2 \sum_{k=0}^3 (h_k - Ax_k - B) = 0.$$

Preuređivanjem obje jednačbe, tako da sve sume koje sadrže nepoznanice prebacimo na lijevu stranu, a sve one koje ih ne sadrže na desnu stranu, dobivamo sustav

$$A \sum_{k=0}^3 x_k^2 + B \sum_{k=0}^3 x_k = \sum_{k=0}^3 h_k x_k$$

$$A \sum_{k=0}^3 x_k + 4B = \sum_{k=0}^3 h_k.$$

Tablica:

$x_k$	$h_k$	$x_k^2$	$h_k x_k$
1	1.94591	1	1.94591
2	2.39790	4	4.79579
3	2.83321	9	8.49964
4	3.29584	16	13.18335
$\Sigma$	10	30	28.42469

Uvrštavanjem, dobivamo linearni sustav

$$30A + 10B = 28.42469$$

$$10A + 4B = 10.47286,$$

kojemu je rješenje

$$A = 0.44851, \quad B = 1.49694.$$

Odatle odmah imamo da je

$$a = A = 0.44851, \quad b = e^B = 4.46799,$$

pa je aproksimacijska funkcija

$$\varphi(x) = 4.46799e^{0.44851x}.$$

□

**Zadatak 1.17** Zadan je skup točaka  $(x_k, f_k)$ ,  $f_k \geq 0$ ,  $k = 0, \dots, n$ . Taj skup točaka treba aproksimirati funkcijom oblika

$$\varphi(x) = (a \sin x + b)^2$$

metodom najmanjih kvadrata. Postavite linearizaciju i sustav za koeficijente.

**Rješenje:** Linearizacija je očito

$$\psi(x) = \sqrt{\varphi(x)} = a \sin x + b, \quad h_k = \sqrt{f_k}.$$

Minimiziramo

$$S = \sum_{k=0}^n (h_k - \psi(x_k))^2 = \sum_{k=0}^n (h_k - a \sin x_k - b)^2 \rightarrow \min.$$

Uvjeti minimuma daju

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_{k=0}^n (h_k - a \sin x_k - b) \sin x_k = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_{k=0}^n (h_k - a \sin x_k - b) = 0.$$

Sređivanjem dobivamo

$$a \sum_{k=0}^n \sin^2 x_k + b \sum_{k=0}^n x_k = \sum_{k=0}^n h_k \sin x_k$$

$$a \sum_{k=0}^n \sin x_k + (n+1)B = \sum_{k=0}^n h_k.$$

□

**Zadatak 1.18** Zadan je skup točaka  $(x_k, f_k)$ ,  $k = 0, \dots, n$ . Metodom najmanjih kvadrata nađite pravac koji prolazi točkom  $(0, 1)$  i aproksimira zadane podatke.

**Rješenje:** Aproksimacijska funkcija glasi

$$\varphi(x) = ax + b.$$

Iskoristimo uvjet da  $\varphi$  mora prolaziti zadanom točkom. Imamo

$$1 = \varphi(0) = a \cdot 0 + b,$$

odakle slijedi da mora biti  $b = 1$ , pa aproksimacijska funkcija glasi

$$\varphi(x) = ax + 1.$$

Minimiziramo

$$S = \sum_{k=0}^n (f_k - \varphi(x_k))^2 = \sum_{k=0}^n (f_k - ax_k - 1)^2 \rightarrow \min.$$

Uvjet minimuma je

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_{k=0}^n (f_k - ax_k - 1)x_k = 0.$$

Sređivanjem dobivamo

$$a \sum_{k=0}^n x_k^2 = \sum_{k=0}^n (f_k - 1)x_k,$$

odakle izlazi

$$a = \frac{\sum_{k=0}^n (f_k - 1)x_k}{\sum_{k=0}^n x_k^2}.$$

Opres, u prethodnom se rezultatu nište ne može pokratiti! □