1.5. Numerička intergracija

Računanje određenih integrala vrlo često nije moguće napraviti analitički. Zbog toga se koriste integracijske formule. Ideja integracijskih formula je određeni integral

$$I(f) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

zamijeniti vrijednošću funkcije f u određenim točkama, tako da aproksimacija oblika

$$I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k^{(m)} f(x_k^{(m)})$$

integrira redom polinome sve višeg i višeg stupnja. Na predavanjima je pokazano da je takav oblik numeričke integracije ekvivalentan tome da integriramo interpolacijske polinome sve viših i viših stupnjeva, što nije dobro.

Zbog toga, umjesto integracije polinoma vrlo visokih stupnjeva odlučujemo se za $n = 1$ i 2, za tzv. trapeznu i Simpsonovu formulu, samo ćemo područje intergacije podijeliti na n dijelova. Tada dobivamo tzv. produljene formule.

1.5.1. Produljena trapezna formula

Općenito, produljenu trapeznu formulu dobivamo tako da cijeli interval $[a, b]$ podijelimo na n podintervala oblika $[x_{k-1}, x_k]$, takvih da je $x_k - x_{k-1} = h$ za $k = 1, \ldots, n$ (tj. podijelimo na n jednakih podintervala), i na svakom od njih upotrijebimo običnu trapeznu formulu. Duljinu podintervala očito možemo izračunati kao

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Tada je aproksimacija produljenom trapeznom formulom

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = h\Big(\frac{1}{2}f_0 + f_1 + \cdots + f_{n-1} + \frac{1}{2}f_n\Big) + E_n^T(f),$$

pri čemu je $E_n^T(f)$ greška produljene formule, pri čemu za grešku vrijedi

$$|E_n^T(f)| \le \frac{(b-a)h^2}{12}M_2 = \frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2, \quad M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

Želimo li da je $|E_n^T(f)| \le \varepsilon$, onda je dovoljno tražiti da bude

$$n \ge \sqrt{\frac{(b-a)^3 M_2}{12\varepsilon}}, \quad n \text{ cijeli broj.}$$

Zadatak 1.19 *Produljenom trapeznom formulom izračunajte vrijednost integrala*

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

s 10 *podintervala, te ocijenite grešku i nađite pravu grešku. Nađite broj podintervala potreban da se istom formulom postigne točnost* 10^{-4}.

Rješenje: Ovdje je $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $a = 0$, $b = 1$, $n = 10$,

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0.1.$$

Čvorovi integracije x_k i funkcijske vrijednosti (napisane na 5 decimala) su u njima su

k	x_k	f_k
0	0.0	1.00000
1	0.1	0.90909
2	0.2	0.83333
3	0.3	0.76923
4	0.4	0.71429
5	0.5	0.66667
6	0.6	0.62500
7	0.7	0.58824
8	0.8	0.55556
9	0.9	0.52632
10	1.0	0.50000

Uvrstimo te vrijednosti u trapeznu formulu

$$I_T = h\left(\frac{1}{2}(f_0 + f_{10}) + \sum_{k=1}^{9} f_k\right) = 0.1 \cdot 6.93771 = 0.693771.$$

Ocijenimo grešku, uvrštavanjem poznatih vrijednosti u formulu za E_T,

$$|E_n^T(f)| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} M_2 = \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2.$$

Očito je da prvo moramo pronaći M_2. Nađimo drugu derivaciju funkcije f:

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3},$$

pa je

$$M_2 = \max_{x\in[0,1]} |f''(x)| = \max_{x\in[0,1]} \left| \frac{2}{(1+x)^3} \right| = \max_{x\in[0,1]} \frac{2}{(1+x)^3}$$
$$= (\text{razlomak je veći što mu je nazivnik manji}) = 2.$$

Uvrštavanjem u ocjenu dobivamo

$$|E_n^T(f)| \leq \frac{1 \cdot 0.1^2}{12} 2 = 0.00167$$

(zaokruženo na 5 znamenki). Egzaktna vrijednost integrala je

$$I(f) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(x+1) \Big|_0^1 = \ln 2 = 0.69315$$

(zaokruženo na 5 znamenki). Prava pogreška je

$$I(f) - I_T = 0.69315 - 0.69377 = -0.00062,$$

tj. prava je greška približno dva i pol puta bolja no što to kaže ocjena greške.

Na kraju, za $\varepsilon = 10^{-4}$ mora biti

$$n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3 M_2}{12\varepsilon}} = \sqrt{\frac{(1-0)^3 \cdot 2}{12 \cdot 10^{-4}}} = 40.82,$$

tj. $n \geq 41$. □

Zadatak 1.20 *Produljenom trapeznom formulom izračunajte vrijednost integrala*

$$\int_{0.7}^{0.9} \operatorname{sh} x \, dx$$

tako da greška bude manja ili jednaka 10^{-4}.

Rješenje: Prvo nađimo drugu derivaciju funkcije f:

$$f(x) = \operatorname{sh} x, \quad f'(x) = \operatorname{ch} x, \quad f''(x) = \operatorname{sh} x.$$

Budući da je sh rastuća funkcija i pozitivna na $\langle 0, \infty \rangle$, onda ona ima maksimum u desnom rubu,

$$M_2 = \max_{x\in[0.7,0.9]} |f''(x)| = \max_{x\in[0.7,0.9]} |\operatorname{sh} x| = \max_{x\in[0.7,0.9]} \operatorname{sh} x = \operatorname{sh}(0.9) = 1.02651673.$$

Zbog toga, potrebno nam je

$$n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3 M_2}{12\varepsilon}} = \sqrt{\frac{(0.9-0.7)^3 \cdot 1.02651673}{12 \cdot 10^{-4}}} = 2.61599,$$

tj. $n = 3$. Tablica

k	x_k	f_k
0	0.7000000000	0.7585837018
1	0.7666666667	0.8440099990
2	0.8333333333	0.9331888412
3	0.9000000000	1.0265167257

$h = 0.2/3$ i aproksimacija integrala je

$$I_T = h\Big(\frac{1}{2}(f_0 + f_3) + \sum_{k=1}^{2} f_k\Big) = 0.1779832703.$$

Primijetite da smo ovdje računali s nešto više znamenki, jer se tražila veća točnost.
□

1.5.2. Produljena Simpsonova formula

Na sličan se način izvodi i produljena Simpsonova formula. Primijetite, osnovna Simpsonova formula ima 3 točke, tj. 2 podintervala, pa produljena formula mora imati, također, paran broj podintervala. Na svakom od podintervala $[x_{2k-2}, x_{2k}]$, duljine $2h$, primijenimo običnu Simpsonovu formulu, za $k = 1, \ldots, n/2$, pa zbrajanjem izlazi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\Big(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \cdots + 4f_{n-1} + f_n\Big) + E_n^S(f),$$

pri čemu je $E_n^S(f)$ greška produljene formule. Greška se može ocijeniti s

$$|E_n^S(f)| \leq \frac{(b-a)h^4}{180} M_4 = \frac{(b-a)^5}{180 n^4} M_4, \quad M_4 = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Želimo li da je $|E_n^S(f)| \leq \varepsilon$, onda je dovoljno tražiti da bude

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 M_4}{180\varepsilon}}, \quad n \text{ paran cijeli broj.}$$

Zadatak 1.21 *Produljenom Simpsonovom formulom izračunajte vrijednost integrala*

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

s 10 podintervala, te ocijenite grešku i nađite pravu grešku. Nađite broj podintervala potreban da se istom formulom postigne točnost 10^{-8}.

Rješenje: Imamo $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $a = 0$, $b = 1$ i $n = 10$ je paran broj. Tablica vrijednosti je identična onoj u zadatku s trapeznom formulom, pa je ne prepisujemo. Označimo s S_1 vrijednosti f_k onih koje se množe s 4, a s S_2 onih koji se množe s 2. Konkretno, ovdje je

$$\begin{aligned} S_1 &= f_1 + f_3 + f_5 + f_7 + f_9 = 3.45954 \\ S_2 &= f_2 + f_4 + f_6 + f_8 = 2.72817. \end{aligned}$$

Tada je aproksimacija po Simpsonovoj formuli

$$I_S = \frac{h}{3}(f_0 + f_{10} + 4S_1 + 2S_2) = \frac{0.1}{3}(1.5 + 4 \cdot 3.45954 + 2 \cdot 2.72817) = 0.69315,$$

odnosno, da smo računali s više znamenki, bilo bi $I_S = 0.6931471805$. Prava greška je

$$\begin{aligned} I(f) - I_S &= 0 \text{ (ako smo računali s 5 znamenki)} \\ &= -3.0505 \cdot 10^{-6} \text{ (ako smo računali s 10 znamenki).} \end{aligned}$$

Za ocjenu greške potrebna nam je četvrta derivacija funkcije. Iskoristimo da smo drugu derivaciju već izračunali

$$f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f'''(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5},$$

pa imamo

$$\begin{aligned} M_4 &= \max_{x\in[0,1]} |f^{(4)}(x)| = \max_{x\in[0,1]} \left| \frac{24}{(1+x)^5} \right| = \max_{x\in[0,1]} \frac{24}{(1+x)^5} \\ &= \text{(razlomak je veći što mu je nazivnik manji)} = 24. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u ocjenu dobivamo

$$|E_n^S(f)| \le \frac{1 \cdot 0.1^4}{180} 24 = 1.33333 \cdot 10^{-5}.$$

Da bismo postigli točnost $\varepsilon = 10^{-8}$ potrebno je

$$n \ge \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 M_4}{180\varepsilon}} = \sqrt[4]{\frac{(1-0)^5 \cdot 24}{180 \cdot 10^{-8}}} = 60.4275$$

tj. $n \ge 62$ (mora biti paran!). □

Zadatak 1.22 *Produljenom Simpsonovom formulom izračunajte vrijednost integrala*

$$\int_{0.7}^{0.9} \operatorname{sh} x \, dx$$

tako da greška bude manja ili jednaka 10^{-4}.

Rješenje: Prvo nađimo četvrtu derivaciju funkcije f, (znajući drugu iz zadatka o trapeznoj formuli)

$$f''(x) = \operatorname{sh} x, \quad f'''(x) = \operatorname{ch} x, \quad f^{(4)}(x) = \operatorname{sh} x.$$

Budući da je druga derivacija jednaka četvrtoj, onda je $M_4 = M_2 = 1.02651673$. Zbog toga, potrebno nam je

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 M_4}{180\varepsilon}} = \sqrt[4]{\frac{(0.9-0.7)^5 \cdot 1.02651673}{180 \cdot 10^{-4}}} = 0.36755,$$

tj. $n = 2$. Tablica

k	x_k	f_k
0	0.7000000000	0.7585837018
1	0.8000000000	0.8881059822
2	0.9000000000	1.0265167257

$h = 0.2/2 = 0.1$ i aproksimacija integrala je

$$I_S = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) = 0.1779174785.$$

□

Pokažimo još jedan zadatak u kojem ocjenjujemo M_4 i gdje nije lako naći pravu vrijednost integrala (za kontrolu).

Zadatak 1.23 *Produljenom Simpsonovom formulom izračunajte vrijednost integrala*

$$\int_{0}^{1} \sin e^x \, dx$$

tako da greška bude manja ili jednaka 10^{-3}.

Rješenje: Prvo moramo naći odgovarajuće derivacije

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin e^x \\
f'(x) &= e^x \cos e^x \\
f''(x) &= e^x \cos e^x - e^{2x} \sin e^x \\
f'''(x) &= e^x \cos e^x - e^{2x} \sin e^x - 2e^{2x} \sin e^x - e^{3x} \cos e^x \\
&= e^x \cos e^x - 3e^{2x} \sin e^x - e^{3x} \cos e^x \\
f^{(4)}(x) &= e^x \cos e^x - e^{2x} \sin e^x - 6e^{2x} \sin e^x - 3e^{3x} \cos e^x - 3e^{3x} \cos e^x + e^{4x} \sin e^x \\
&= e^x \cos e^x - 7e^{2x} \sin e^x - 6e^{3x} \cos e^x + e^{4x} \sin e^x.
\end{aligned}
$$

Sada je lako ocijeniti M_4:

$$
\begin{aligned}
M_4 &= \max_{x\in[0,1]} |f^{(4)}(x)| = \max_{x\in[0,1]} |e^x \cos e^x - 7e^{2x} \sin e^x - 6e^{3x} \cos e^x + e^{4x} \sin e^x| \\
&\le \max_{x\in[0,1]} (|e^x \cos e^x| + |7e^{2x} \sin e^x| + |6e^{3x} \cos e^x| + |e^{4x} \sin e^x|) \\
&= \max_{x\in[0,1]} (|e^x|\,|\cos e^x| + 7|e^{2x}|\,|\sin e^x| + 6|e^{3x}|\,|\cos e^x| + |e^{4x}|\,|\sin e^x|) \\
&= \max_{x\in[0,1]} (e^x|\cos e^x| + 7e^{2x}|\sin e^x| + 6e^{3x}|\cos e^x| + e^{4x}|\sin e^x|) \\
&\le e^1 \cdot 1 + 7e^2 \cdot 1 + 6e^3 \cdot 1 + e^4 \cdot 1 = 229.55304609.
\end{aligned}
$$

Uvrštavanjem gornje ocjene za M_4 u formulu za broj podintervala, dobivamo (samo malo više podintervala, nego da smo uspjeli izračunati točan M_3)

$$
n \ge \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 M_4}{180\varepsilon}} = \sqrt[4]{\frac{(1-0)^5 \cdot 229.55304609}{180 \cdot 10^{-3}}} = 5.97589,
$$

tj. $n = 6$. Tablica glasi

k	x_k	f_k
0	0.0000000000	0.8414709848
1	0.1666666667	0.9251233717
2	0.3333333333	0.9846945035
3	0.5000000000	0.9969653876
4	0.6666666667	0.9297961439
5	0.8333333333	0.7450546445
6	1.0000000000	0.4107812905

pa je $h = 1/6$, a aproksimacija integrala

$$
I_S = \frac{h}{3}(f_0 + f_6 + 4S_1 + 2S_2) = 0.8749892881.
$$

□

1.6. Inicijalni problem za obične diferencijalne jednadžbe

Promatrat ćemo običnu diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{dy}{dx} = f(y, x), \quad y(x_0) = y_0,$$

pri čemu pretpostavljamo da je funkcija $f(y, x)$ neprekidna na vremenskom intervalu $x_0 \leq x \leq b$ i za $-\infty < y < \infty$.

Najjednostavnije metode rješavanja te diferencijalne jednadžbe su jednokoračne Runge–Kutta metode, od kojih smo spomenuli one reda 1, RK-1 (poznata još i kao Eulerova metoda),

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, \ldots,$$

reda 2, tzv. RK-2

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

gdje je

$$\begin{aligned} k_1 &= h_n f(x_n, y_n) \\ k_2 &= h_n f(x_n + h_n, y_n + k_1), \end{aligned}$$

i reda 4, tzv. RK-4

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

gdje je

$$\begin{aligned} k_1 &= h_n f(x_n, y_n) \\ k_2 &= h_n f(x_n + \frac{1}{2}h_n, y_n + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 &= h_n f(x_n + \frac{1}{2}h_n, y_n + \frac{1}{2}k_2) \\ k_4 &= h_n f(x_n + h_n, y_n + k_3). \end{aligned}$$

Ako umjesto jedne jednadžbe želimo rješavati sustav jednadžbi, onda treba upamtiti da veličine y_n, k_n i $f(x_n, y_n)$ postaju vektori, dok h_n i x_n ostaju skalari.

Ako želite riješiti diferencijalnu jednadžbu višeg reda, prvo je treba svesti na sustav prvog reda.

Diferencijalna jednadžba je kruta ako mala perturbacija početnih vodi na veliku perturbaciju u rješenju.

Zadatak 1.24 *Eulerovom metodom s korakom* $h = 0.5$ *nađite rješenje diferencijalne jedandžbe*

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + x, \quad y(0) = 0.25.$$

u točki $x = 0.5$.

Rješenje: Primijetite da nam je potreban samo jedan korak, jer startamo iz točke $x_0 = 0$ u kojoj je $y_0 = 0.25$. U sljedećem koraku smo u $x_1 = x_0 + h = 0.5$. Funkcija je

$$f(x, y) = y^2 + x,$$

pa dobivamo

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) = 0.25 + 0.5 \cdot f(0, 0.25) = 0.25 + 0.5 \cdot (0.25^2 + 0) \\ &= 0.25 + 0.5 \cdot 0.625 = 0.28125. \end{aligned}$$

Prema tome, približno rješenje ove diferencijalne jednadžbe u 0.5 je 0.28125. □

Zadatak 1.25 *Riješite diferencijalnu jednadžbu iz prethodnog zadatka korištenjem RK-2 i RK-4 metoda.*

Rješenje: Ponovno, potreban je samo jedan korak, $x_0 = 0$, $y_0 = 0.25$. Za RK-2 prvo moramo izračunati k_1 i k_2

$$\begin{aligned} k_1 &= h_n f(x_n, y_n) = 0.5 f(0, 0.25) = 0.5 \cdot (0.25^2 + 0) = 0.03125, \\ k_2 &= h_n f(x_n + h_n, y_n + k_1) = 0.5 f(0 + 0.5, 0.25 + 0.03125) = 0.5 f(0.5, 0.28125) \\ &= 0.5 \cdot (0.28125^2 + 0.5) = 0.28955078. \end{aligned}$$

Nadalje,

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 0.25 + \frac{1}{2}(0.03125 + 0.28955078) = 0.41040039.$$

Za RK-4 imamo

$$\begin{aligned} k_1 &= h_n f(x_n, y_n) = 0.5 f(0, 0.25) = \text{(ovo smo već izračunali)} = 0.03125, \\ k_2 &= h_n f(x_n + \frac{1}{2} h_n, y_n + \frac{1}{2} k_1) = 0.5 f(0 + 0.5 \cdot 0.5, 0.25 + 0.5 \cdot 0.03125) \\ &= 0.5 f(0.25, 0.265625) = 0.5 \cdot (0.265625^2 + 0.25) = 0.16027832 \\ k_3 &= h_n f(x_n + \frac{1}{2} h_n, y_n + \frac{1}{2} k_2) = 0.5 f(0.25, 0.25 + 0.5 \cdot 0.16027832) \\ &= 0.5 f(0.25, 0.33013916) = 0.5 \cdot (0.33013916^2 + 0.25) = 0.17949593 \\ k_4 &= h_n f(x_n + h_n, y_n + k_3) = 0.5 f(0 + 0.5, 0.25 + 0.17949593) \\ &= 0.5 f(0.5, 0.42949593) = 0.5 \cdot (0.42949593^2 + 0.5) = 0.34223338. \end{aligned}$$

Nadalje

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
&= \frac{1}{6}(0.03125 + 2 \cdot 0.16027832 + 2 \cdot 0.17949593 + 0.34223338) = 0.42550531.
\end{aligned}
$$

□

Zadatak 1.26 *Za sustav diferencijalnih jednadžbi*

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_1 + y_2 \quad y_1(0) = 0, \\
y_2' &= -y_1 + y_2 \quad y_2(0) = 1,
\end{aligned}
$$

nađite aproksimaciju rješenja u $x = 0.2$ *RK-2 metodom s korakom* $h = 0.1$.

Rješenje: Prvo treba pravilno napisati sustav, imenujući neke funkcije vektorima

$$
y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad y_0 = y(0) = \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f(x, y) = \begin{bmatrix} y_1 + y_2 \\ -y_1 + y_2 \end{bmatrix}.
$$

Najprije, vidimo da su nam potrebna 2 koraka duljine 0.1 da bismo stigli u 0.2. Za RK-2 prvo moramo naći k_1 i k_2 koji su vektori. Da bismo razlikovali k-ove u raznim koracima, indeksirajmo ih joši gornjim indeksom, tako da, na primjer, $k_1^{(i)}$ znači vektor k_1 u i-tom koraku.

Dakle,

$$
\begin{aligned}
k_1^{(1)} &= hf(x_0, y_0) = 0.1f\left(0, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 0.1 \begin{bmatrix} 0 + 1 \\ -0 + 1 \end{bmatrix} = 0.1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} \\
k_2^{(1)} &= hf(x_0 + h, y_0 + k_1^{(1)}) = 0.1f\left(0 + 0.1, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}\right) = 0.1f\left(0.1, \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1.1 \end{bmatrix}\right) \\
&= 0.1 \begin{bmatrix} 0.1 + 1.1 \\ -0.1 + 1.1 \end{bmatrix} = 0.1 \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.12 \\ 0.10 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Nadalje, (ovdje y_1 označava sljedeću iteraciju, a ne varijablu)

$$
y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(k_1^{(1)} + k_2^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.12 \\ 0.10 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.11 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.11 \\ 1.10 \end{bmatrix}.
$$

Dakle, u 0.1 su aproksimacije rješenja $y_1(0.1) \approx 0.11$ i $y_2(0.1) \approx 1.10$.

Sada treba napraviti još jedan korak

$$\begin{aligned}
k_1^{(2)} &= hf(x_1, y_1) = 0.1f\left(0.1, \begin{bmatrix} 0.11 \\ 1.10 \end{bmatrix}\right) = 0.1 \begin{bmatrix} 0.11 + 1.10 \\ -0.11 + 1.10 \end{bmatrix} \\
&= 0.1 \begin{bmatrix} 1.21 \\ 0.99 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.121 \\ 0.099 \end{bmatrix} \\
k_2^{(2)} &= hf(x_1 + h, y_1 + k_1^{(2)}) = 0.1f\left(0.1 + 0.1, \begin{bmatrix} 0.11 \\ 1.10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.121 \\ 0.099 \end{bmatrix}\right) \\
&= 0.1f\left(0.2, \begin{bmatrix} 0.231 \\ 1.199 \end{bmatrix}\right) = 0.1 \begin{bmatrix} 0.231 + 1.199 \\ -0.231 + 1.199 \end{bmatrix} = 0.1 \begin{bmatrix} 1.430 \\ 0.968 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1430 \\ 0.0968 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Nadalje, (ovdje y_1 i y_2 označavaju iteracije, a ne varijable)

$$\begin{aligned}
y_2 = y_1 + \frac{1}{2}(k_1^{(2)} + k_2^{(2)}) &= \begin{bmatrix} 0.11 \\ 1.10 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 0.121 \\ 0.099 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1430 \\ 0.0968 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 0.11 \\ 1.10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.132 \\ 0.0979 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2420 \\ 1.1979 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Znajući da je pravo rješenje ovog sustava

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= e^x \sin x \\
y_2(x) &= e^x \cos x
\end{aligned}$$

nije teško poakazati da su prava rješenja u 0.2

$$\begin{aligned}
y_1(0.2) &= 0.24265527 \\
y_2(0.2) &= 1.19705602,
\end{aligned}$$

pa smo dobili dobre aproksimacije rješenja. □

Zadatak 1.27 *Diferencijalnu jednadžbu*

$$y^{(4)} + (x+1)y' + y + x + 1 = 0$$

napišite u obliku sustava diferencijalnih jednadžbi prvog reda.

Rješenje: Redom zamjenjujemo derivacije y-a novim varijablama:

$$\begin{aligned}
y' &= z \\
z''' + (x+1)z + y + x + 1 &= 0.
\end{aligned}$$

Vidimo da u drugoj jednadžbi imamo treću derivaciju. Ponovimo zamjenu

$$\begin{aligned}
y' &= z \\
z' &= u \\
u'' + (x+1)z + y + x + 1 &= 0.
\end{aligned}$$

Očito nam treba još jedna zamjena

$$\begin{aligned} y' &= z \\ z' &= u \\ u' &= v \\ v' + (x+1)z + y + x + 1 &= 0, \end{aligned}$$

pa sustav uobičajeno pišemo

$$\begin{aligned} y' &= z \\ z' &= u \\ u' &= v \\ v' &= -(x+1)z - y - x - 1. \end{aligned}$$

Ako zadamo i početne uvjete (u kojima na isti način supstituiramo varijable), onda možemo takvu diferencijalnu jednadžbu riješiti proizvoljnom RK-metodom. U vektoru rješenja su komponente redom $y(x_n)$, $y'(x_n)$, $y''(x_n)$, $y'''(x_n)$. $\square$

Zadatak 1.28 *Poznato je opće rješenje neke diferencijalne jednadžbe koje glasi*

$$y(x) = c_1 e^{-25x} + x^2 - x.$$

Zadan je početni uvjet $y(-1) = 2$. Je li ta diferencijalna jednadžba kruta ako napredujemo po x? Objasnite!

Rješenje: Za krute diferencijalne jednadžbe vrijedi da mala perturbacija početnog uvjeta bitno mijenja partikularno rješenje.

U ovoj diferencijalnoj jednadžbi, zbog početnog uvjeta $y(-1) = 2$, određujemo c_1 i dobivamo da mora vrijediti

$$2 = y(-1) = c_1 e^{-25\cdot(-1)} + (-1)^2 - (-1),$$

tj.

$$2 = c_1 e^{25} + 2,$$

pa je $c_1 = 0$.

Dakle, partikularno rješenje te diferencijalne jednadžbe je

$$y(x) = x^2 - x.$$

Sada malo perturbirajmo početni uvjet. Neka je $y(-1) = 2 + \varepsilon$, $|\varepsilon| \ll 1$. Uvrštyavanjem tog početnog uvjeta dobivamo:

$$2 + \varepsilon = y(-1) = c_1 e^{-25\cdot(-1)} + (-1)^2 - (-1),$$

tj.

$$2 + \varepsilon = c_1 e^{25} + 2,$$

pa je

$$c_1 = \frac{\varepsilon}{e^{25}}.$$

Tada je partikularno rješenje

$$y(x) = \frac{\varepsilon}{e^{25}} e^{-25x} + x^2 - x.$$

Usporedimo sad oba partikularna rješenja. Pitanje je samo hoće li član

$$\frac{\varepsilon}{e^{25}} e^{-25x}$$

dominirati nad $x^2 - x$. Jasno je da neće, jer funkcija e^{-25x} brzo pada kad x raste, pa diferencijalna jednadžba nije kruta. □

Zadatak 1.29 *Poznato je opće rješenje neke diferencijalne jednadžbe koje glasi*

$$y(x) = c_1 e^{25x} + x^2 - x.$$

Zadan je početni uvjet $y(-1) = 2$. Je li ta diferencijalna jednadžba kruta ako napredujemo po x? Objasnite!

Rješenje: Iz početnog uvjeta $y(-1) = 2$, određujemo c_1 i dobivamo

$$2 = y(-1) = c_1 e^{25\cdot(-1)} + (-1)^2 - (-1),$$

tj.

$$2 = c_1 e^{-25} + 2,$$

pa je $c_1 = 0$.

Dakle, partikularno rješenje te diferencijalne jednadžbe je

$$y(x) = x^2 - x.$$

Sada malo perturbirajmo početni uvjet. Neka je $y(-1) = 2 + \varepsilon$, $|\varepsilon| \ll 1$. Uvrštyavanjem tog početnog uvjeta dobivamo:

$$2 + \varepsilon = y(-1) = c_1 e^{25\cdot(-1)} + (-1)^2 - (-1),$$

tj.

$$2 + \varepsilon = c_1 e^{-25} + 2,$$

pa je

$$c_1 = \frac{\varepsilon}{e^{-25}} = \varepsilon e^{25}.$$

Tada je partikularno rješenje

$$y(x) = (\varepsilon e^{25}) \cdot e^{25x} + x^2 - x.$$

Usporedimo sad oba partikularna rješenja. Pitanje je samo hoće li član

$$(\varepsilon e^{25}) \cdot e^{25x}$$

dominirati nad $x^2 - x$. Jasno je da hoće, jer funkcija e^{25x} brzo raste kad x raste, pa će $x^2 - x$ vrlo brzo postati malo prema dotičnom članu. Zaključujemo diferencijalna jednadžba je kruta. $\square$