6. Poopćenja Newton–Leibnizove formule

6.1. Još neki važni operatori

Doasad smo naučili operator ∇ ili grad, koji od skalarnog polja radi vektorsko polje:

$$\nabla U = \operatorname{grad} U = \nabla \cdot U(x,y,z) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right).$$

Sada ćemo upoznati još dva operatora: rot i div. Operator rot od vektorskog polja pravi drugo vektorsko polje:

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right).}$$

Rotacija mjeri vrtložnost polja $\vec{F}$.

Primjer 6.1.1. *Izračunajte* $\operatorname{rot} \vec{F}$ *ako je* $\vec{F} = (x + 2y + z^2, x^2 - z, y^2 + z)$.

Vrijedi

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) = (2y + 1, 2z - 0, 2x - 2).$$

Divergencija od vektorskog polja pravi skalarno polje i definira se kao:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (F_x, F_y, F_z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.}$$

Divergencija mjeri ima li polje $\vec{F}$ izvor.

Primjer 6.1.2. *Izračunajte* div $\vec{F}$ *ako je* $\vec{F} = (x + 2y + z^2, x^2 - z, y^2 + z)$.

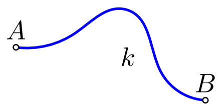
Vrijedi

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 1 + 0 + 1 = 2.$$

6.2. Stokesov teorem

1-dimenzionalni slučaj

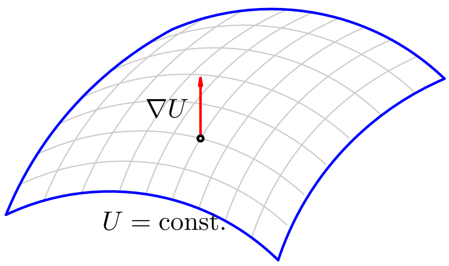
Prisjetimo se, ako imamo konzervativno polje, onda se $\vec{F}$ može napisati kao gradijent nekog skalarnog polja U, a integral vektorskog polja $\vec{F}$ od točke A do točke B takve funkcije uopće ne ovisi o putu.



Označimo s k krivulju od A do B, a s ∂k rub krivulje k, tj. krajnje točke krivulje k. Onda imamo:

$$\boxed{\int_k \nabla U \cdot d\vec{r} = \int_k dU = U \Big|_A^B = U \Big|_{\partial k}.}$$

Što mjeri ∇U? Brzinu rasta (pazite brzina je vektor, a ne broj!) polja U.



2-dimenzionalni slučaj – Stokesov teorem

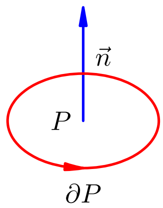
Stokesov teorem omogućava nam da umjesto po plohi P integriramo po rubu plohe P (krivulji!), u oznaci ∂P i obratno.

Neka je definirano vektorsko polje $\vec{F}$ i $\nabla \times \vec{F}$ na plohi P. Orijentirajmo zatvorenu krivulju ∂P tako da je orijentacija suprotna od kazaljke na satu. Jednako tako, u svakoj točki plohe, kad pogledamo s vrha $d\vec{P}$, prema krivulji, krivulja mora biti pozitivno orijentirana (obrnuto od kazaljke na satu). Tada vrijedi

$$\boxed{\iint_P (\nabla \times \vec{F})\, d\vec{P} = \iint_P \operatorname{rot} \vec{F}\, d\vec{P} = \oint_{\partial P} \vec{F} \cdot d\vec{r}.}$$

Što mjeri $\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F}$? Mjeri rotaciju, odnosno vrtložnost polja $\vec{F}$.

Ako je P mala površina na koju je $\vec{n}$ jedinični vektor normale i ako rub od P označimo s ∂P,



onda imamo

$$\frac{\displaystyle\oint_{\partial P} \vec{F} \cdot d\vec{r}}{P} = \frac{\displaystyle\iint_P (\nabla \times \vec{F})\, d\vec{P}}{P} \approx \frac{\displaystyle(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \iint_P dP}{P} = (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}.$$

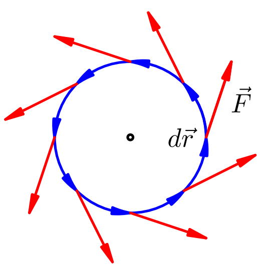
Približna jednakost vrijedi zato što je ploha mala, pa se niti $\vec{n}$, niti $\vec{F}$ ne mijenja puno.

Drugim riječima, zaključili smo da je

$$\boxed{(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} = \lim_{P \to 0} \frac{1}{P} \oint_{\partial P} \vec{F} \cdot d\vec{r}.}$$

Limes s desne strane predstavlja rotaciju polja $\vec{F}$.

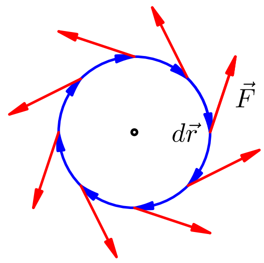
Imamo tri moguće situacije.



$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} > 0$

$(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} > 0$

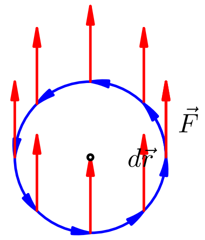
$+$ vrtlog



$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} < 0$$

$$(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n} < 0$$

– vrtlog



$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

$$(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n} = 0$$

protok

Ako je $\nabla\times\vec{F} = 0$ u svakoj točki nekog dijela prostora, onda je polje $\vec{F}$ bezvrtložno u tom dijelu prostora.

Pokažimo sad da su potencijalna (konzervativna) polja bezvrtložna. Zbog potencijalnosti imamo $\vec{F} = \nabla U$, pa je

$$\nabla\times\nabla U = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial U}{\partial x} & \dfrac{\partial U}{\partial y} & \dfrac{\partial U}{\partial z} \end{vmatrix} = \vec{0}.$$

Posljednja nula na desnoj strani slijedi zbog toga što kad funkcije imaju dovoljno neprekidnih derivacija, poredak deriviranja po različitim varijablama nije bitan.

> Potencijalna (konzervativna) polja su bezvrtložna. Vrijedi i obrat, bezvrtložna polja su potencijalna (konzervativna).

Primjer 6.2.1. *Ispitajte je li polje*

$$\vec{F} = (y^2\cos x + z^3, 2y\sin x - 4, 3xz^2 + 2)$$

konzervativno, potencijalno, bezvrtložno polje.

Prema već zaključenom, ta tri pitanja predstavljaju isto pitanje, pa možemo dokazati bilo što od toga.

Konzervativnost polja

Ovo je vjerojatno najteže direktno dokazati, jer treba vidjeti da za svaki par točaka A, B i svaku krivulju k koja ih spaja vrijedi

$$\oint_k \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

Potencijalnost polja

Treba naći skalarno polje U, takvo da vrijedi

$$\vec{F} = \nabla U.$$

Dakle, imamo:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = y^2 \cos x + z^3,$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2y \sin x - 4,$$
$$\frac{\partial U}{\partial z} = 3xz^2 + 2.$$

Iz posljednje jednadžbe izlazi da je

$$U(x, y, z) = \int (3xz^2 + 2)\, dz = xz^3 + 2z + g(x, y).$$

Deriviranjem po y imamo

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial g(x, y)}{\partial y},$$

a s druge strane mora biti

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2y \sin x - 4,$$

što zajedno daje

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = 2y \sin x - 4,$$

odnosno

$$g(x, y) = y^2 \sin x - 4y + h(x).$$

Uvrstimo li to u $U(x, y, z)$, dobivamo:

$$U(x, y, z) = xz^3 + 2z + y^2 \sin x - 4y + h(x).$$

Konačno, moramo odrediti još funkciju h, deriviranjem U po x. Vrijedi:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = z^3 + y^2 \cos x + \frac{dh(x)}{dx},$$

i

$$\frac{\partial U}{\partial x} = y^2 \cos x + z^3,$$

što zajedno daje da je

$$\frac{dh(x)}{dx} = 0,$$

odnosno da je

$$h(x) = c.$$

Prema tome,

$$U(x,y,z) = xz^3 + 2z + y^2 \sin x - 4y + c.$$

Zaključujemo da je polje potencijalno.

Bezvrtložnost polja

Treba provjeriti je li uvijek $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$.

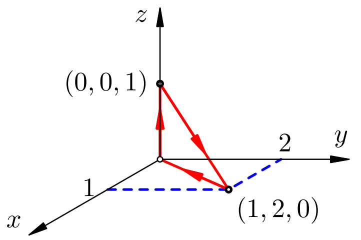
$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2\cos x + z^3 & 2y\sin x - 4 & 3xz^2 + 2 \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y}(3xz^2+2) - \frac{\partial}{\partial z}(2y\sin x - 4)\right)\vec{\imath} \\
&\qquad - \left(\frac{\partial}{\partial x}(3xz^2+2) - \frac{\partial}{\partial z}(y^2\cos x + z^3)\right)\vec{\jmath} \\
&\qquad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(2y\sin x - 4) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2\cos x + z^3)\right)\vec{k} \\
&= (0-0)\vec{\imath} - (3z^2 - 3z^2)\vec{\jmath} + (2y\cos x - 2y\cos x)\vec{k} = \vec{0}.
\end{aligned}$$

Zaključujemo da je polje bezvrtložno.

Primjer 6.2.2. *Izračunajmo*

$$\oint_k \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

ako je k zatvorena krivulja (dijelovi pravaca) koji spajaju točke $(1,2,0)$, $(0,0,0)$ i $(0,0,1)$,



a $\vec{F}$ vektorsko polje

$$\vec{F}(x,y,z) = (2y^2 + z^2, 2z^2 + x^2, 2x^2 + y^2).$$

Ovaj primjer možemo riješiti direktno i primjenom Stokesovog teorema.

Direktno rješenje

Da bismo direktno dobili rješenje, moramo parametrizirati sve tri dužine. Prvo, parametrizirajmo dužinu od $(1,2,0)$ do $(0,0,0)$. Pravac koji prolazi zadanim točkama je:

$$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-0}{2-0} = \frac{z-0}{0-0} = t,$$

odnosno

$$\begin{aligned} x &= t, \\ y &= 2t, \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Pritom se parametar t kreće od 1 do 0.

Odmah vidimo da je

$$\begin{aligned} F(\vec{r}(t)) &= (2\cdot(2t)^2 + 0^2, 2\cdot 0^2 + t^2, 2t^2 + (2t)^2) = (8t^2, t^2, 6t^2), \\ \frac{d\vec{r(t)}}{dt} &= (1,2,0). \end{aligned}$$

Integral od $(1,2,0)$ do $(0,0,0)$ jednak je:

$$I_1 = \int_1^0 (8t^2, t^2, 6t^2)\cdot(1,2,0)\,dt = \int_1^0 10t^2\,dt = \frac{10}{3}t^3\,\Big|_1^0 = -\frac{10}{3}.$$

Sada parametrizirajmo dužinu od $(0,0,0)$ do $(0,0,1)$. Odmah vidimo da je

$$\begin{aligned} x &= 0, \\ y &= 0, \\ z &= t, \end{aligned}$$

parametar t *se kreće od* 0 *do* 1.

Sada je

$$\begin{aligned}F(\vec{r}(t)) &= (2\cdot(0)^2+t^2, 2\cdot t^2+0^2, 2\cdot 0^2+(0)^2) = (t^2, 2t^2, 0),\\ \frac{d\vec{r(t)}}{dt} &= (0,0,1).\end{aligned}$$

Integral od $(0,0,0)$ *do* $(0,0,1)$ *jednak je:*

$$I_2 = \int_0^1 (t^2, 2t^2, 0)\cdot(0,0,1)\,dt = \int_0^1 0\,dt = 0.$$

Konačno, treba još parametrizirati dužinu od $(0,0,1)$ *do* $(1,2,0)$. *Jednadžba pravca kroz te dvije točke je:*

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{2} = \frac{z-1}{-1} = t,$$

odnosno

$$\begin{aligned}x &= t,\\ y &= 2t,\\ z &= -t+1.\end{aligned}$$

Pritom se t *kreće od* 0 *do* 1.

Sada je

$$\begin{aligned}F(\vec{r}(t)) &= (2\cdot(2t)^2+(-t+1)^2, 2\cdot(-t+1)^2+t^2, 2t^2+(2t)^2)\\ &= (9t^2-2t+1, 3t^2-4t+2, 6t^2),\\ \frac{d\vec{r(t)}}{dt} &= (1,2,-1).\end{aligned}$$

Integral od $(0,0,1)$ *do* $(1,2,0)$ *jednak je:*

$$\begin{aligned}I_3 &= \int_0^1 (9t^2-2t+1, 3t^2-4t+2, 6t^2)\cdot(1,2,-1)\,dt\\ &= \int_0^1 (9t^2-10t+5)\,dt = (3t^3-5t^2+5t)\Big|_0^1 = 3-5+5 = 3.\end{aligned}$$

Prema tome, naš integral jednak je

$$I = I_1+I_2+I_3 = -\frac{10}{3}+0+3 = -\frac{1}{3}.$$

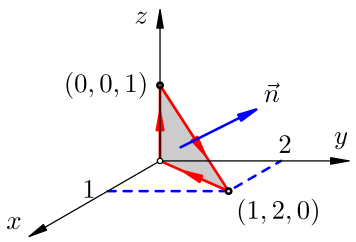
Rješenje pomoću Stokesovog teorema

Za računanje pomoću Stokesovog teorema treba nam

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2y^2+z^2 & 2z^2+x^2 & 2x^2+y^2 \end{vmatrix}$$

$$= (2y-4z)\vec{\imath} - (4x-2z)\vec{\jmath} + (2x-4y)\vec{k}.$$

Sada s integrala po stranicama trokuta prelazimo na integral po trokutu.



Prvo moramo znati parametrizirati dio ravnine kojoj pripada zadani trokut. Toj ravnini pripadaju točka $(0,0,0)$*, a razapeta je vektorima* $(0,0,1)$ *i* $(1,2,0)$*. Normala te ravnine je*

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2,1,0).$$

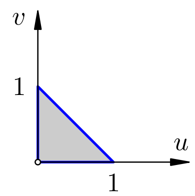
Primijetite da je normala te ravnine dobro orijentirana obzirom na orijenataciju trokuta. Jednadžba te ravnine je

$$-2x + y = 0.$$

Parametrizaciju možemo napisati kao

$$\begin{aligned} x &= u, \\ y &= 2u, \\ z &= v. \end{aligned}$$

Tada naš trokut u u, v *ravnini izgleda ovako:*



Zadani trokut ima parametrizaciju:

$$\begin{aligned} x &= u, \quad 0 \le u \le 1 \\ z &= v, \quad 0 \le v \le 1-u. \end{aligned}$$

Po definiciji nam još samo treba

$$\begin{aligned} \vec{r}_u &= \frac{\partial \vec{r}(u,v)}{\partial u} = (1,2,0) \\ \vec{r}_v &= \frac{\partial \vec{r}(u,v)}{\partial v} = (0,0,1), \end{aligned}$$

i $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$*, no to smo već izračunali kad smo računali* $\vec{n}$*. Osim toga, ustanovili smo da moramo napraviti vektorski produkt u drugom smjeru da normala "gleda na pravu stranu".*

Konačno, u $\nabla \times \vec{F}$ *treba uvrstiti izabranu parametrizaciju:*

$$(\nabla \times \vec{F})(u,v) = (2\cdot 2u - 4\cdot v, 2\cdot v - 4\cdot u, 2\cdot u - 4\cdot(2u)) = (4u-4v, 2v-4u, -6u).$$

Sada je

$$\begin{aligned} \iint_P (\nabla \times \vec{F})\, d\vec{P} &= \int_0^1 \int_0^{1-u} (4u-4v, 2v-4u, -6u)\cdot(-2,1,0)\, dv\, du \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-u} (-8u+8v+2v-4u)\, dv\, du = \int_0^1 \int_0^{1-u} (-12u+10v)\, dv\, du \\ &= \int_0^1 (-12uv+5v^2)\Big|_0^{1-u} du = \int_0^1 (-12u(1-u)+5(1-u)^2)\, du \\ &= \int_0^1 (-12u+12u^2+5-10u+5u^2)\, du = \int_0^1 (17u^2-22u+5)\, du \\ &= \left(\frac{17}{3}u^3 - 11u^2 + 5u\right)\Big|_0^1 = \left(\frac{17}{3} - 11 + 5\right) = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

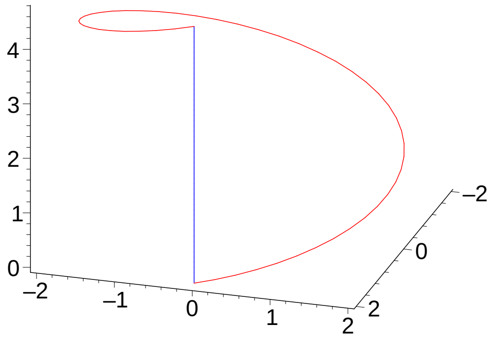
Primjer 6.2.3. *Izračunajmo*

$$\int_k \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

ako je k *dio Arhimedove spirale*

$$\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt),$$

pri čemu su a, $b \neq 0$ *neke konstante, za* $0 \leq t \leq 2\pi$,



a $\vec{F}$ *vektorsko polje*

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2 - yz, y^2 - xz, z^2 - xy).$$

Ponovno, zadatak se može riješiti direktno, ali i korištenjem činjenice da je polje $\vec{F}$ *konzervativno.*

Direktno rješenje

Parametrizacija krivulje k *već je zadana, pa treba još izračunati*

$$\begin{aligned} F(\vec{r}(t)) &= (a^2\cos^2 t - abt\sin t, a^2\sin^2 t - abt\cos t, b^2t^2 - a^2\sin t\cos t), \\ \frac{d\vec{r(t)}}{dt} &= (-a\sin t, a\cos t, b), \\ F(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r(t)}}{dt} &= -a^3\sin t\cos^2 t + a^2bt\sin^2 t + a^3\sin^2 t\cos t \\ &\quad - a^2bt\cos^2 t + b^3t^2 - a^2b\sin t\cos t. \end{aligned}$$

Samo računanje integrala kojemu posljednja funkcija podintegralna, postaje prilično dugotrajan posao (obavite ga za vježbu).

Rješenje korištenjem konzervativnosti polja

Pokažimo da je zadano polje bezvrtložno, pa onda i konzervativno:

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - yz & y^2 - xz & z^2 - xy \end{vmatrix}$$

$$= (-x + x)\vec{\imath} - (-y + y)\vec{\jmath} + (-z + z)\vec{k} = \vec{0}.$$

Kod konzervativnih polja, integral ne ovisi o putu, nego samo o krajnjim točkama puta. Prema tome, možemo odabrati neki jednostavniji put, kao što je dio *pravca od točke $(a,0,0)$ do točke $(a,0,2b\pi)$ (plava spojnica). Parametrizacija tog dijela pravca je*

$$\begin{aligned} x &= a, \\ y &= 0, \\ z &= t, \end{aligned}$$

pri čemu se t kreće od 0 do $2b\pi$.

Sada je

$$\begin{aligned} F(\vec{r}(t)) &= (a^2, -at^2, t^2), \\ \frac{d\vec{r(t)}}{dt} &= (0,0,1), \\ F(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r(t)}}{dt} &= t^2, \end{aligned}$$

i

$$I = \int\limits_k \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\limits_0^{2b\pi} t^2\, dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^{2b\pi} = \frac{8b^3\pi^3}{3}.$$

Primjer 6.2.4. *Zadano je vektorsko polje*

$$\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0 \right).$$

Pokažite, da iako je $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$, svugdje gdje je $\vec{F}$ definirano, ipak je

$$\oint\limits_{\partial P} \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq 0, \qquad \iint\limits_P (\nabla \times \vec{F})\, d\vec{P} = 0.$$

ako je P gornja polusfera $x^2+y^2+z^2=a^2$, odnosno ∂P je rub te polusfere, tj. to je kružnica $x^2+y^2=a^2$ u xy ravnini.

Promatramo li polje $\vec{F}$, vidjet ćemo da ono nije definirano čim je $x=y=0$. Ima li na našoj sferi takva točka? Ima! To je točka $(0,0,a)$. Kad nije definiran $\vec{F}$ u toj točki, ne može biti definiran niti $\operatorname{rot}\vec{F}$.

Za sve ostale točke (gdje je $\vec{F}$ definiran) je:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} \\ &= (0-0)\vec{\imath} - (0-0)\vec{\jmath} + \left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \right) \vec{k} = \vec{0}. \end{aligned}$$

S druge strane, direktnim računom iz parametrizacije kružnice

$$\begin{aligned} x &= a\cos\varphi, \\ y &= a\sin\varphi, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi \\ z &= 0, \end{aligned}$$

izlazi

$$\begin{aligned} F(\vec{r}(\varphi)) &= \left(-\frac{\sin\varphi}{a}, \frac{\cos\varphi}{a}, 0\right), \\ \frac{d\vec{r(\varphi)}}{d\varphi} &= (-a\sin\varphi, a\cos\varphi, 0), \\ F(\vec{r}(\varphi)) \cdot \frac{d\vec{r(\varphi)}}{d\varphi} &= 1, \end{aligned}$$

pa je

$$\oint\limits_{\partial P} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\limits_0^{2\pi} 1\, d\varphi = \varphi \,\Big|_0^{2\pi} = 2\pi \neq 0.$$

6.3. Gaussov teorem

3-dimenzionalni slučaj

Ovaj teorem mnogi nazivaju i teorem o divergenciji ili teorem Gauss–Green–Ostrogradski. Slično kao što smo u dvodimenzionalnom slučaju, umjesto po plohi P integrirali po krivulji ∂P (i obratno), Gaussov teorem omogućava da vektorsko polje $\vec{F}$ umjesto po zatvorenoj plohi ∂V integriramo po volumenu V i obratno (pri čemu je ∂V "rub" volumena V):

$$\boxed{\iiint\limits_V \nabla \cdot \vec{F}\, dV = \iiint\limits_V \operatorname{div} \vec{F}\, dV = \oiint\limits_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{P}.}$$

Pritom je $d\vec{P}$ tzv. vanjska normala, jer "gleda" izvan zatvorene plohe ∂V.

Što mjeri $\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$? Mjeri divergenciju, odnosno izviranje polja $\vec{F}$.

Ako je V mali volumen onda je

$$\frac{\oiint\limits_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{P}}{V} = \frac{\iiint\limits_V \nabla \cdot \vec{F}\, dV}{V} \approx \frac{\nabla \cdot \vec{F} \iiint\limits_V dV}{V} = \nabla \cdot \vec{F}.$$

Približna jednakost vrijedi zato što je volumen mali, pa se niti $\vec{F}$ ne mijenja puno.

Drugim riječima, zaključili smo da je

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{F} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oiint\limits_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{P}.}$$

Ako je div $\vec{F} > 0$, onda ćemo imati izvor polja $\vec{F}$, ako je div $\vec{F} < 0$ onda ćemo imati ponor polja $\vec{F}$, a ako je div $\vec{F} = 0$ onda polje $\vec{F}$ nema ni izvor ni ponor.

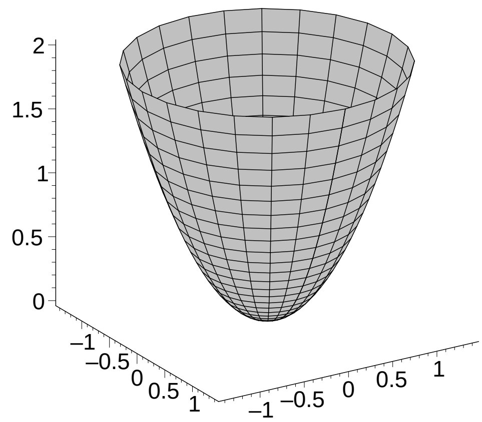
Primjer 6.3.1. *Za vektorsko polje*

$$\vec{F} = (x, y, -z).$$

izračunajte tok tog polja kroz oplošje paraboloida (bez baze!)

$$z = x^2 + y^2$$

omeđenog ravninom $z = 2$.



Ponovno, račun možemo provesti direktno i korištenjem Gaussovog teorema.

Direktno rješenje

Parametrizirajmo paraboloid:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, \\ y &= \rho \sin \varphi, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad 0 \le \rho \le \sqrt{2}. \\ z &= \rho^2, \end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned}
\vec{r}_\rho &= (\cos\varphi, \sin\varphi, 2\rho),\\
\vec{r}_\varphi &= (-\rho\sin\varphi, \rho\cos\varphi, 0)\\
\vec{r}_\rho \times \vec{r}_\varphi &= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 2\rho \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}\\
&= \vec{\imath}(-2\rho^2\cos\varphi) - \vec{\jmath}(2\rho^2\sin\varphi) + \vec{k}(\rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi)\\
&= (-2\rho^2\cos\varphi, -2\rho^2\sin\varphi, \rho).
\end{aligned}$$

Primijetite da je z-komponenta ove normale pozitivna, pa će normala "gledati prema unutrašnosti" paraboloida. Želimo li normalu koja "gleda na van", (kao što nam to treba kod Gaussovog teorema), moramo joj promijeniti znak u suprotan, drugim riječima, za "vanjsku normalu" trebamo

$$\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_\rho = (2\rho^2\cos\varphi, 2\rho^2\sin\varphi, -\rho).$$

Nadalje,

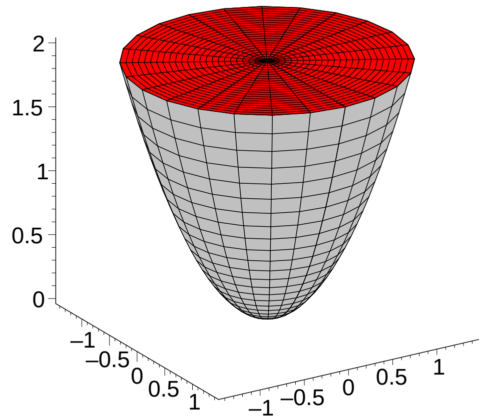
$$\begin{aligned}
\vec{F}(\vec{r}(\rho,\varphi)) &= (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, -\rho^2)\\
\vec{F}(\vec{r}(\rho,\varphi)) \cdot (\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_\rho) &= 2\rho^3\cos^2\varphi + 2\rho^3\sin^2\varphi + \rho^3 = 3\rho^3.
\end{aligned}$$

Prema tome, imamo:

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} 3\rho^3\,d\rho\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{3\rho^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{2}}\,d\varphi = \int_0^{2\pi} 3\,d\varphi = 3\varphi\Big|_0^{2\pi} = 6\pi.$$

Rješenje korištenjem Gaussovog teorema

Da bismo mogli iskoristiti Gaussov teorem, moramo "zatvoriti" plohu. Najjednostavnije zatvaranje je dodavanjem baze B paraboloida (crveno).



Ako s I označimo traženi intergal po otvorenom paraboloidu, onda je

$$\iiint\limits_V \nabla\cdot\vec{F}\,dV = I + \oiint\limits_B \vec{F}\cdot d\vec{P}.$$

Prvo izračunajmo

$$\oiint\limits_B \vec{F}\cdot d\vec{P},$$

pri čemu krug B parametriziramo s

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi, \\ y &= \rho\sin\varphi, \qquad 0\le\varphi<2\pi, \quad 0\le\rho\le\sqrt{2}. \\ z &= 2, \end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned} \vec{r}_\rho &= (\cos\varphi,\sin\varphi,0), \\ \vec{r}_\varphi &= (-\rho\sin\varphi,\rho\cos\varphi,0) \\ \vec{r}_\rho\times\vec{r}_\varphi &= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = (0,0,\rho). \end{aligned}$$

Normala na krug gleda "prema gore" (z komponenta pozitivna), tako da normale na rub ∂V gledaju "prema van". Nadalje je

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}(\rho,\varphi)) &= (\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,-2) \\ \vec{F}(\vec{r}(\rho,\varphi))\cdot(\vec{r}_\rho\times\vec{r}_\varphi) &= -2\rho. \end{aligned}$$

Prema tome, imamo:

$$\oiint\limits_B \vec{F}\cdot d\vec{P} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} -2\rho\,d\rho\,d\varphi = \int_0^{2\pi} -\rho^2\Big|_0^{\sqrt{2}}\,d\varphi = \int_0^{2\pi} -2\,d\varphi = -2\varphi\Big|_0^{2\pi} = -4\pi.$$

Moramo još izračunati i

$$\iiint\limits_V \nabla\cdot\vec{F}\,dV,$$

gdje je V zatvoreni paraboloid.

Imamo:

$$\nabla\cdot\vec{F} = 1+1-1 = 1,$$

a paraboloid parametriziramo u cilindarskim koordinatama

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi, \\ y &= \rho\sin\varphi, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \rho \le \sqrt{2}, \quad \rho^2 \le z \le 2. \\ z &= z, \end{aligned}$$

Prema tome izlazi

$$\begin{aligned} \iiint\limits_V \nabla \cdot \vec{F}\, dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_{\rho^2}^{2} \rho\, dz\, d\rho\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \rho z \Big|_{\rho^2}^{2}\, d\rho\, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} (2\rho - \rho^3)\, d\rho\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\rho^2 - \frac{\rho^4}{4}\right) \Big|_0^{\sqrt{2}}\, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} 1\, d\varphi = \varphi \Big|_0^{2\pi} = 2\pi. \end{aligned}$$

Konačno, uvrštavanjem, dobivamo

$$I = \iiint\limits_V \nabla \cdot \vec{F}\, dV - \oiint\limits_B \vec{F} \cdot d\vec{P} = 2\pi - (-4\pi) = 6\pi.$$