

# 1. Fourierov red

Neka je funkcija  $f$  definirana na intervalu  $\langle -L, L \rangle$ , a izvan tog intervala smatramo da je funkcija periodička s periodom  $2L$ , tj. da je

$$f(x + 2L) = f(x)$$

Fourierov red funkcije  $f$  je razvoj

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (1.0.1)$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \end{aligned} \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.0.2)$$

Uočite da se koeficijenti  $a_n$  i  $b_n$  mogu izračunati izračunati i po bilo kojem intervalu  $\langle c, c + 2L \rangle$ , jedino je bitno da je interval; duljine  $2L$ .

Konvergencija Fourierovog reda riješena je Dirichletovim teoremom.

**Teorem 1.0.1. (Dirichlet)** *Pretpostavimo da je*

- (a) *f funkcija, osim možda u konačno mnogo točaka na  $\langle -L, L \rangle$  (u tim točkama možena imati i više vrijednosti),*
- (b) *f je periodična s periodom  $2L$ ,*
- (c) *f i f' su po dijelovima neprekidne funkcije na  $\langle -L, L \rangle$ .*

Tada red (1.0.1) s koeficijentima (1.0.2) konvergira prema

- (1) *f(x) ako je x točka u kojoj je funkcija f neprekidna,*
- (2)  *$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ , ako u točki x funkcija ima prekid.*

Ako je funkcija  $f$  parna (neparna) onda postoje samo članovi  $a_n$  ( $b_n$ ) u Fourierovom redu.

Ako je funkcija  $f$  zadana smo na intervalu  $\langle 0, L \rangle$ , onda je možemo dopuniti do funkcije na intervalu  $\langle -L, L \rangle$  na dva načina – ili kao parnu funkciju, ili kao nepranu funkciju, a dalje po periodičnosti. Tako definirana parna (neparna) proširenja imat će samo članove  $a_n$  ( $b_n$ ).

Ako su  $a_n$  i  $b_n$  Fourierovi koeficijenti, onda vrijedi Parsevalov identitet

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Nadalje, za integrale Fourierovih redova vrijedi da se mogu integrirati član po član.

Ako iskoristimo Eulerovu formu kompleksnog broja

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi,$$

onda se Fourierov red može zapisati kao

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L},$$

pri čemu je

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx.$$

**Primjer 1.0.1.** *Nađite Fourierov red funkcije*

$$f(x) = \begin{cases} 3, & 0 < x < 5 \\ 0, & -5 < x < 0, \end{cases}$$

*a dalje po periodičkom proširenju.*

*Period ove funkcije, očito je 10. Prema tome imamo:*

$$a_n = \frac{1}{5} \int_{-5}^5 f(x) \cos \frac{n\pi x}{5} dx = \frac{3}{5} \int_0^5 \cos \frac{n\pi x}{5} dx.$$

*Sada razlikujemo dva slučaja  $n = 0$ , kad imamo*

$$a_0 = \frac{3}{5} \int_0^5 dx = \frac{3}{5} x \Big|_0^5 = 3.$$

Ako je  $n \neq 0$ , onda imamo

$$a_n = \frac{3}{5} \int_0^5 \cos \frac{n\pi x}{5} dx = \frac{3 \cdot 5}{5n\pi} \sin \frac{n\pi x}{5} \Big|_0^5 = 0.$$

S druge strane je

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{5} \int_{-5}^5 f(x) \sin \frac{n\pi x}{5} dx = \frac{3}{5} \int_0^5 \sin \frac{n\pi x}{5} dx \\ &= \frac{3 \cdot 5}{5n\pi} \left( -\cos \frac{n\pi x}{5} \right) \Big|_0^5 = \frac{3}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)). \end{aligned}$$

Ako je  $n$  paran broj, onda je  $n = 2k$ ,

$$b_{2k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

dok za neparne  $n$  vrijedi  $n = 2k + 1$ ,

$$b_{2k+1} = \frac{6}{(2k+1)\pi}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Prema tome, Fourierov red zadane funkcije je

$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi} \left( \sin \frac{\pi x}{5} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{5} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{5} + \dots \right).$$

**Primjer 1.0.2.** Nađite Fourierov red funkcije

$$f(x) = \begin{cases} 2, & 0 < x < 3 \\ -2, & -3 < x < 0. \end{cases}$$

Odmah je vidljivo da je funkcija neparna, pa treba tražiti samo koeficijente  $b_n$ , jer su  $a_n = 0$ .

**Primjer 1.0.3.** Nađite Fourierov red funkcije

$$f(x) = |x|, \quad \text{za } -1 < x < 1,$$

a dalje po periodičkom proširenju.

Odmah je vidljivo da je funkcija parna, pa treba tražiti samo koeficijente  $a_n$ , jer su  $b_n = 0$ .

**Primjer 1.0.4.** Zadana je funkcija

$$f(x) = x, \quad 0 < x < 2.$$

Nađite

- (a) sinusni red te funkcije,
- (b) kosinusni red te funkcije.