

LINEARNI PROSTORI

7. 4. 2000.

1. Pokažite da je matrica

$$A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & e^{i\beta} \sin \alpha \\ -e^{-i\beta} \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

unitarna za sve $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

2. Ispitajte ima li linearni sistem

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

samo trivijalno rješenje.

3. Nađite opće rješenje problema $y' = Ay$, gdje je A matrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} .$$

Koja je vrsta kritične točke u $P_0 = (0,0)$ (čvor, sedlo, središte ili spiralna točka)?

4. Kad se koristi metoda neodređenih koeficijenata za rješavanje nehomogenog problema

$$y' = A(t)y + g(t) \quad ?$$

Kako se dobiva opće rješenje takvog problema?

5. Napravite jedan korak metode inverznih iteracija za nalaženje svojstvenog vektora (za svojstvenu vrijednost najbližu 0) matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} , \quad \text{uz početni vektor} \quad x_0 = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 3 \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix} .$$

6. Nađite uvjetovanost matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ako je norma koja se koristi spektralna (2-norma), a $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $0 < \varepsilon \ll 1$. Da li je ta matrica dobro ili loše uvjetovana?

LINEARNI PROSTORI

26. 6. 2000.

1. Nađite sve matrice B s realnim elementima koje komutiraju s matricom A , dakle sve B za koje je $AB = BA$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} .$$

2. Može li se matrica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dijagonalizirati?

3. Metodom neodređenih koeficijenata nađite opće rješenje problema $y' = Ay + g$, gdje je A matrica

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} , \quad g = \begin{bmatrix} t + 1 \\ t - 1 \end{bmatrix} .$$

4. Što su kritične točke za problem

$$y' = A(t)y \quad ?$$

5. Pretpostavimo da trebate naći drugu po veličini svojstvenu vrijednost matrice reda 4. Možete li to napraviti metodom potencija s odgovarajućim pomakom (shiftom)? A metodom inverznih iteracija? Objasnite.

6. Zadan je linearni sistem $Ax = b$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 10 & 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} , \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix} .$$

Preformulirajte taj linearni sistem tako da se sigurno može riješiti Jacobijevom metodom. Nakon toga, napravite jedan korak metode, ako je početni vektor

$$x_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} .$$

LINEARNI PROSTORI

6. 7. 2000.

1. Što je algebarska, a što geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti?

2. Čini li skup vektora

$$S = \left\{ x \mid x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, x_1 = 1, x_2 = x_3, x_2, x_3 \in \mathbf{R} \right\}$$

vektorski prostor? Ako da, nađite mu dimenziju i neku bazu.

3. Metodom varijacije konstanti nađite opće rješenje problema $y' = Ay + g$, gdje je A matrica

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix}.$$

4. Diferencijalnu jednadžbu

$$y''' + 3ty'' + ty' + 2y + t - 1 = 0$$

napišite u obliku sistema diferencijalnih jednadžbi prvog reda.

5. Korištenjem Gaussovih eliminacija s parcijalnim pivotiranjem (linearni sistem s više desnih strana), nađite inverz matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. Ispitajte da li je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

pozitivno definitna.

LINEARNI PROSTORI

5. 9. 2000.

1. Ako je x zadani vektor s n redaka, a A zadana matrica, kojeg tipa mora biti matrica A , a kojeg tipa rezultat y , ako je

$$y = x^* A x \quad ?$$

2. Čini li skup vektora

$$S = \left\{ x \mid x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, x_1 = 2x_2, x_2 = x_3, x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R} \right\}$$

vektorski prostor? Ako da, nađite mu dimenziju i neku bazu.

3. Metodom dijagonalizacije nađite opće rješenje problema $y' = Ay + g$, gdje je A matrica

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} t+1 \\ -t \end{bmatrix}.$$

4. Kad kritičnu točku P zovemo stabilnom kritičnom točkom za sistem diferencijalnih jednačini?

5. Nađite uvjetovanost matrice

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

ako je norma koja se koristi euklidska norma. Da li je ta matrica dobro ili loše uvjetovana?

6. Zadan je linearni sistem $Ax = b$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 8 & 1 \\ 3 & 7 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 15 \\ 14 \\ 10 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Preformulirajte taj linearni sistem tako da se sigurno može riješiti Gauss-Seidelovom metodom.

LINEARNI PROSTORI

22. 9. 2000.

1. Ako je x zadani vektor s n redaka, a A zadana matrica, kojeg tipa mora biti matrica A , a kojeg tipa rezultat y , ako je

$$y = x^* A x \quad ?$$

2. Čini li skup vektora

$$S = \left\{ x \mid x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, x_1 = 2x_2, x_2 = x_3, x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R} \right\}$$

vektorski prostor? Ako da, nađite mu dimenziju i neku bazu.

3. Metodom dijagonalizacije nađite opće rješenje problema $y' = Ay + g$, gdje je A matrica

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} t+1 \\ -t \end{bmatrix}.$$

4. Kad kritičnu točku P zovemo stabilnom kritičnom točkom za sistem diferencijalnih jednačini?

5. Nađite uvjetovanost matrice

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

ako je norma koja se koristi euklidska norma. Da li je ta matrica dobro ili loše uvjetovana?

6. Zadan je linearni sistem $Ax = b$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 8 & 1 \\ 3 & 7 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 15 \\ 14 \\ 10 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Preformulirajte taj linearni sistem tako da se sigurno može riješiti Gauss-Seidelovom metodom.

LINEARNI PROSTORI

3. 10. 2000.

1. Matrica A zove se involutorna, ako je kvadratna i vrijedi $A^2 = I$. Ispitajte da li je matrica

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

involutorna.

2. Ovisno o parametru λ odredite rang matrice A , ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix} .$$

3. Opišite metodu dijagonalizacije za nalaženje općeg rješenja problema $y' = Ay + g$.
4. Ako je zadana diferencijalna jednačba višeg reda (uz odgovarajuće početne uvjete), može li se ona riješiti nekom od metoda za nalaženje općeg rješenja diferencijalnih jednačbi i kako?
5. Nađite uvjetovanost matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

ako je norma koja se koristi spektralna norma.

6. Nađite koeficijente a i b , ako točke (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, n$ aproksimiramo pravcem

$$y(x) = ax + b$$

po diskretnoj metodi najmanjih kvadrata, uz uvjet da na osi y odsjeca odsječak z_0 . (Uputa: Prvo iskoristite uvjet!)

LINEARNI PROSTORI

12. 1. 2001.

1. Ispitajte jesu li vektori

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

linearno zavisni.

2. Čini li skup vektora

$$S = \left\{ x \mid x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix}, \quad x_1, x_2 \in \mathbf{R} \right\}$$

vektorski prostor? Ako da, nađite mu dimenziju i neku bazu.

3. Nađite opće rješenje sistema diferencijalnih jednačbi

$$y' = Ay = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} y$$

a zatim i ono partikularno koje zadovoljava

$$y(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} .$$

Koja je vrsta kritične točke točka 0?

4. Ako kod rješavanja nehomogenog sistema diferencijalnih jednačbi

$$y' = Ay + g$$

reda 2, g ima član oblika $e^{\lambda t}$, takav da je λ jednostruka svojstvena vrijednost matrice A , kako treba pretpostaviti oblik partikularnog rješenja $y^{(p)}$.

5. Nađite faktorizaciju Choleskog matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

6. Opišite metodu inverznih iteracija za nalaženje neke svojstvene vrijednosti i jednog svojstvenog vektora matrice A . Može li se ta svojstvena vrijednost i svojstveni vektor naći i metodom potencija?

LINEARNI PROSTORI

22. 2. 2001.

1. Može li se matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dijagonalizirati?

2. Čini li skup vektora

$$S = \left\{ x \mid x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}, \quad x_1 - x_2 = 1 \in \mathbf{R} \right\}$$

vektorski prostor? Ako da, nađite mu dimenziju i neku bazu.

3. Metodom neodređenih koeficijenata nađite opće rješenje problema $y' = Ay + g$, gdje je A matrica

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}.$$

4. Ako kod rješavanja nehomogenog sistema diferencijalnih jednačbi

$$y' = Ay + g$$

reda 3, g ima član oblika $e^{\lambda t}$, takav da je λ dvostruka svojstvena vrijednost matrice A , kako treba pretpostaviti oblik partikularnog rješenja $y^{(p)}$.

5. Zadan je linearni sistem $Ax = b$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -1 & 0 \\ -1 & 10 & -1 \\ 0 & -1 & 10 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Nađite dvije iteracije Jacobijevom metodom, uzimajući početni vektor x_0 . Ocijenite grešku približnog rješenja x_2 .

6. Metodom inverznih iteracija obično se nalazi samo nekoliko (malo) svojstvenih vektora i svojstvenih vrijednosti matrice. Navedite barem jednu metodu kojom se uobičajeno nalaze sve svojstvene vrijednosti i svi svojstveni vektori simetrične matrice A .

LINEARNI PROSTORI

23. 3. 2001.

1. Može li se matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dijagonalizirati? Dokažite!

2. Ispitajte bez rješavanja linearnog sistema, ima li homogeni linearni sistem $Ax = b$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

samo trivijalno rješenje. Objasnite!

3. Diferencijalnu jednadžbu

$$y''' + 3(t-1)y'' + y' + (t+1)y + t^2 = 0$$

napišite u obliku sistema diferencijalnih jednadžbi prvog reda. Napišite to u vektorskoj formi, tj. nađite matricu $A(t)$ i vektor $g(t)$, tako da je $z' = A(t)z + g(t)$, (z , vektor).

4. Nađite opće rješenje problema $y' = Ay$, gdje je A matrica

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} .$$

Koja je vrsta kritične točke u $P_0 = (0,0)$ (čvor, sedlo, središte ili spiralna točka)?

5. Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nađite parametre a i b za funkciju oblika

$$y(x) = \ln(ax + b)$$

koja aproksimira skup podataka (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, n$. Uputa: linearizirajte funkciju.

6. Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{bmatrix} .$$

Nađite LR faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P , te matrice L i R tako da je $PA = LR$.

LINEARNI PROSTORI

25. 5. 2001.

1. Nađite sve matrice koje komutiraju s matricom

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix}, \quad d_1 \neq d_2 \neq \dots \neq d_n \quad .$$

2. Nađite jednu bazu vektorskog prostora vektora koji imaju 3 realne komponente, ako za takve vektore znamo da im je druga komponenta dvostuko veća od prve, a treća je 0. Koja je dimenzija tog vektorskog prostora?
3. Opišite metodu neodređenih koeficijenata za rješavanje sistema diferencijalnih jednačbi $y' = Ay + g$.
4. Nađite opće rješenje problema $y' = Ay + g$, gdje je A matrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} t \\ t - 1 \end{bmatrix} \quad .$$

5. Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 9 & 8 \end{bmatrix} \quad .$$

Nađite uvjetovanost matrice A korištenjem norme 1.

6. Zadan je linearni sistem $Ax = b$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad .$$

Preformulirajte taj linearni sistem tako da se sigurno može riješiti Jacobijevom metodom. Nakon toga, napravite jedan korak metode, ako je početni vektor

$$x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad .$$

LINEARNI PROSTORI

21. 6. 2001.

1. Nađite kompleksni broj a , tako da je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

normalna.

2. Kolika je dimenzija vektorskog prostora koji čine svi realni vektori

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad ?$$

3. Kad kritičnu točku P zovemo nestabilnom kritičnom točkom za sistem diferencijalnih jednažbi?

4. Nađite opće rješenje sistema diferencijalnih jednažbi

$$y' = Ay = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} y$$

a zatim i ono partikularno koje zadovoljava

$$y(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} .$$

5. Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} .$$

Nađite uvjetovanost matrice A korištenjem norme 2.

6. Zadan je linearni sistem $Ax = b$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Preformulirajte taj linearni sistem tako da se sigurno može riješiti Gauss-Seidelovom metodom. Nakon toga, napravite jedan korak metode, ako je početni vektor

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

LINEARNI PROSTORI

21. 9. 2001.

1. Može li se matrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

dijagonalizirati?

2. Ispitajte bez rješavanja linearnog sistema, ima li linearni sistem $Ax = 0$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

samo trivijalno rješenje. Objasnite!

3. Diferencijalnu jednadžbu

$$y''' + (t^2 - 1)y'' + 2ty' + (t - 1)y - t = 0$$

napišite u obliku sistema diferencijalnih jednadžbi prvog reda. Napišite to u vektorskoj formi, tj. nadjite matricu $A(t)$ i vektor $g(t)$, tako da je $z' = A(t)z + g(t)$, (z , vektor).

4. Metodom varijacije konstanti nađite opće rješenje problema $y' = Ay + g$, gdje je A matrica

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 2e^{4t} \\ 4e^{4t} \end{bmatrix}.$$

5. Napravite jedan korak metode inverznih iteracija za nalaženje svojstvenog vektora (za svojstvenu vrijednost najbližu 0) matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{uz početni vektor} \quad x_0 = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

6. Gaussovom metodom s parcijalnim pivotiranjem nađite rješenje linearnog sistema

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_3 & = & 1 \\ -4x_1 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ 2x_1 - 4x_3 + x_4 & = & 1 \end{array}.$$

LINEARNI PROSTORI

7. 2. 2002.

1. Matrica A zove se idempotentna, ako je kvadratna i vrijedi $A^2 = A$. Ispitajte da li je matrica

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

idempotentna.

2. Ovisno o parametru λ odredite rang matrice A , ako je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & \lambda & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix} .$$

3. Nađite opće rješenje problema $y' = Ay$, gdje je A matrica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{bmatrix} .$$

4. Opišite kako se metodom dijagonalizacije nalazi opće rješenje problema $y' = Ay + g$.

5. Ispitajte jesu li matrice A i B slične

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

6. Napravite jedan korak metode inverznih iteracija za nalaženje svojstvenog vektora (za svojstvenu vrijednost najbližu 0) matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} , \quad \text{uz početni vektor} \quad x_0 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} .$$

LINEARNI PROSTORI

21. 2. 2002.

1. Izračunajte determinantu

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} .$$

2. Izračunajte inverznu matricu zadanoj

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} .$$

3. Nađite rješenje problema $x'' + x' - 8x = e^t$, uz početne uvjete $x(0) = 1$, $x'(0) = -4$ svođenjem na sistem diferencijalnih jednačbi prvog reda. Uputa: diferencijalna jednačba se svodi na sistem diferencijalnih jednačbi prvog reda tako da se prva derivacija uzme za novu varijablu, recimo $x' = y$ i to je druga jednačba sistema. Više se derivacije napišu korištenjem derivacije nove varijable.

4. Opišite kako se metodom varijacije konstanti nalazi opće rješenje problema $y' = Ay + g$.

5. Ispitajte jesu li matrice A i B slične

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} .$$

6. Zadan je linearni sistem $Ax = b$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Preformulirajte taj linearni sistem tako da se sigurno može riješiti Jacobijevom metodom. Nakon toga, napravite jedan korak metode, ako je početni vektor

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} .$$

LINEARNI PROSTORI (30 sati)

7. 2. 2002.

1. Matrica A zove se idempotentna, ako je kvadratna i vrijedi $A^2 = A$. Ispitajte da li je matrica

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

idempotentna.

2. Ovisno o parametru λ odredite rang matrice A , ako je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & \lambda & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix} .$$

3. Nađite svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrice A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{bmatrix} .$$

4. Ispitajte bez rješavanja linearnog sistema, ima li homogeni linearni sistem $Ax = b$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

samo trivijalno rješenje. Objasnite!

5. Ispitajte jesu li matrice A i B slične

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

6. Nađite Frobeniusovu (euklidsku) normu matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} .$$

LINEARNI PROSTORI

22. 3. 2002.

1. Izračunajte determinantu

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

svođenjem na trokutastu formu.

2. Ispitajte može li se skup vektora

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dopuniti do baze vektorskog prostora svih vektora s 4 realne komponente. Ako ne može, zašto ne može, a ako može, s koliko još treba nadopuniti ovaj skup da se dobije baza.

3. Metodom dijagonalizacije nađite opće rješenje problema $y' = Ay + g$, gdje je A matrica

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} -t + 1 \\ t \end{bmatrix}.$$

4. Opišite kako biste našli rješenje sistem diferencijalnih jednačbi viših redova, ako su poznati svi potrebni početni uvjeti. Opis potkrijepite primjerom.
5. Napravite jedan korak metode inverznih iteracija za nalaženje svojstvenog vektora (za svojstvenu vrijednost najbližu 0) matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{uz početni vektor} \quad x_0 = \begin{bmatrix} \frac{5}{13} \\ \frac{12}{13} \\ -\frac{12}{13} \end{bmatrix}.$$

koliko je aproksimacija svojstvene vrijednosti daleko od prave?

6. Zadan je linearni sistem $Ax = b$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Preformulirajte taj linearni sistem tako da se sigurno može riješiti Gauss-Seidelovom metodom. Nakon toga, napravite jedan korak metode, ako je početni vektor

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

LINEARNI PROSTORI

24. 5. 2002.

1. Svođenjem na trokutastu formu, nađite

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} .$$

2. Ispitajte bez rješavanja linearnog sistema, ima li homogeni linearni sistem $Ax = 0$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

samo trivijalno rješenje. Objasnite!

3. Diferencijalnu jednadžbu

$$y''' + ty' - (t + 1)y - t^2 = 0$$

napišite u obliku sistema diferencijalnih jednadžbi prvog reda. Napišite to u vektorskoj formi, tj. nađite matricu $A(t)$ i vektor $g(t)$, tako da je $z' = A(t)z + g(t)$, (z , vektor).

4. Nađite opće rješenje problema $y' = Ay$, gdje je A matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

5. Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nađite parametre a i b za funkciju oblika

$$y(x) = e^{ax+b}$$

koja aproksimira skup podataka (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, n$. Uputa: linearizirajte funkciju.

6. Nađite spektralnu normu matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} .$$

LINEARNI PROSTORI

4. 7. 2002.

1. Nađite normu 1, 2 i ∞ za vektor x , ako je

$$x^T = [-2, \quad 3, \quad 1, \quad -4] \quad .$$

2. Uz koje je uvjete na λ skup vektora

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ \lambda \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

baza vektorskog prostora svih vektora koji imaju tri realne komponente?

3. Metodom varijacije konstanti nađite opće rješenje problema $y' = Ay + g$, gdje je A matrica

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} \quad .$$

4. Nađite inverz matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad .$$

5. Lovačko društvo "Lovac Luka" primijetilo je da se u njihovom lovištu broj zečeva eksponencijalno povećava po krivulji

$$\varphi(x) = ae^{bx},$$

gdje x označava broj godina protekao od prvog promatranja. Ako je opaženi broj zečeva

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} x_k & 0 & 2 & 5 & 7 & 10 \\ \hline f_k & 5 & 9 & 21 & 35 & 57 \end{array}$$

po metodi najmanjih kvadrata (korištenjem linearizacije) nađite parametre a i b . Ako je početna godina promatranja 1992. koliko zečeva, prema dobivenoj aproksimaciji, mogu očekivati u svom lovištu 2003. godine?

6. Zadan je linearni sistem $Ax = b$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \quad .$$

Preformulirajte taj linearni sistem tako da se sigurno može riješiti Jacobi-ijevom metodom.

LINEARNI PROSTORI

3. 9. 2002.

1. Izračunajte determinantu

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

svođenjem na trokutastu formu.

2. Ispitajte može li se skup vektora

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

dopuniti do baze vektorskog prostora svih vektora s 4 realne komponente. Ako ne može, zašto ne može, a ako može, s koliko još treba nadopuniti ovaj skup da se dobije baza.

3. Metodom varijacije parametara nađite opće rješenje problema $y' = Ay + g$, gdje je A matrica

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} e^t \\ 2e^t \end{bmatrix}.$$

4. Kako treba protpostaviti rješenje sustava diferencijalnih jednadžbi ako matrica nema bazu svojstvenih vektora. Objasnite to na primjeru matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Napravite jedan korak metode potencija iteracija za nalaženje svojstvenog vektora za apsolutno najveću svojstvenu vrijednost matrice

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \text{uz početni vektor} \quad x_0 = \begin{bmatrix} \frac{5}{13} \\ \frac{12}{13} \\ -\frac{12}{13} \end{bmatrix}.$$

koliko je aproksimacija svojstvene vrijednosti daleko od prave?

6. Nađite LR faktorizaciju matice A , gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

LINEARNI PROSTORI

6. 12. 2002.

1. Ispitajte može li se skup polinoma

$$\begin{aligned}p_1(x) &= 3x^3 - 2x^2 + x - 1, \\p_2(x) &= 2x^3 + x^2 - x + 1, \\p_3(x) &= 4x^3 - 5x^2 + 3x - 3\end{aligned}$$

dopuniti do baze vektorskog prostora svih polinoma stupnja manjeg ili jednakog 3? Ako ne može, zašto ne može, a ako može, s koliko polinoma treba nadopuniti ovaj skup da se dobije baza.

2. Ovisno o parametru λ odredite rang matrice A , ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & \lambda & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} .$$

3. Nađite opće rješenje diferencijalne jednačbe

$$x'' - 6x' + 9x = t .$$

Uputa: svedite na sustav diferencijalnih jednačbi.

4. Opišite vrste kritičnih točka sustava diferencijalnih jednačbi $y' = Ay$.

5. Nađite 2-normu matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} .$$

6. Ispitajte jesu li matrice A i B slične

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} .$$

LINEARNI PROSTORI

24. 1. 2003.

1. Ispitajte bez rješavanja linearnog sistema, ima li homogeni linearni sistem $Ax = b$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

samo trivijalno rješenje. Objasnite!

2. Nađite normu 1, 2 i ∞ za matricu A , ako je

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Nađite opće sustava diferencijalnih jednažbi

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_2 + \cos t - \sin t \\ y_2' &= -y_1 + \cos t + \sin t \quad . \end{aligned}$$

4. Zadana je diferencijalna jednažba $y' = Ay$, A reda 2. Ako su svojstvene vrijednosti matrice A $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -2$, koja je vrsta kritične točke u $(0, 0)$?

5. Zadan je linearni sistem $Ax = b$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Preformulirajte taj linearni sistem tako da se sigurno može riješiti Jacobijevom metodom. Nakon toga, napravite jedan korak metode, ako je početni vektor

$$x_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

6. Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nađite parabolu koja aproksimira podatke (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, n$ uz uvjet da prolazi točkom $T = (0, 1)$.

LINEARNI PROSTORI

11. 2. 2003.

1. Nadjite A^4 ako je

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} .$$

2. Nađite normu 2 za matricu A , ako je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

3. Nađite opće sustava diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 - \cos t + \sin t \\ y_2' &= y_1 + \cos t - \sin t \end{aligned} .$$

4. Zadana je diferencijalna jednadžba $y' = Ay$, A reda 2. Ako su svojstvene vrijednosti matrice A , $\lambda_1 = 4 + i$, $\lambda_2 = 4 - i$, što možete reći o vrsti kritične točke u $(0, 0)$?

5. Napravite jedan korak metode inverznih iteracija za nalaženje svojstvenog vektora (za svojstvenu vrijednost najbližu 0) matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} , \quad \text{uz početni vektor} \quad x_0 = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{bmatrix} .$$

6. Koja je prednost metode inverznih iteracija za nalaženje jedne svojstvene vrijednosti matrice A nad metodom potencija?

LINEARNI PROSTORI

25. 2. 2003.

1. Nađite opće rješenje sustava $Ax = b$ ovisnog o parametru λ , ako je

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

2. Za zadanu matricu

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2+i \\ 2-2i & 1 \end{bmatrix}$$

nađite dijagonalnu matricu Λ i matricu X , tako da je $\Lambda = X^{-1}AX$.

3. Metodom dijagonalizacije nađite opće rješenje problema $y' = Ay + g$, gdje je A matrica

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} , \quad g = \begin{bmatrix} t+1 \\ t \end{bmatrix} .$$

4. Diferencijalnu jednadžbu

$$y''' + 2(t-1)y' + ty - t^2 = 0$$

napišite u obliku sistema diferencijalnih jednadžbi prvog reda. Napišite to u vektorskoj formi, tj. nađite matricu $A(t)$ i vektor $g(t)$, tako da je $z' = A(t)z + g(t)$, (z , vektor).

5. Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nađite koeficijente a , b i c ako točke (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, n$ aproksimiramo parabolom

$$y(x) = ax^2 + bx + c,$$

uz uvjet da joj je tjeme u točki $(z_0, 0)$, a na osi y odsijeca odsječak z_0 , $z_0 \neq 0$.

6. Zadana je simetrična matrica. Kojom biste metodom najbrže našli svojstvene vrijednosti te matrice koje se nalaze u intervalu $[1, 2]$?

LINEARNI PROSTORI

25. 4. 2003.

1. Ispitajte može li se skup polinoma

$$\begin{aligned}p_1(x) &= 3x^3 - 2x^2 + x - 1, \\p_2(x) &= 2x^3 + x^2 - x + 1, \\p_3(x) &= x^3 - 2x^2 + 3x - 1\end{aligned}$$

dopuniti do baze vektorskog prostora svih polinoma stupnja manjeg ili jednakog 3? Ako ne može, zašto ne može, a ako može, s koliko polinoma treba nadopuniti ovaj skup da se dobije baza.

2. Ovisno o parametru λ odredite rang matrice A , ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

3. Nađite inverz matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

4. Metodom varijacije konstanti nađite opće rješenje problema $y' = Ay + g$, gdje je A matrica

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} , \quad g = \begin{bmatrix} e^t \\ e^t \end{bmatrix} .$$

5. Metodom najmanjih kvadrata (uz korištenje linearizacije) nađite parametre a i b funkcije

$$\varphi(x) = \log_2(ax + b)$$

koja aproksimira sljedeći skup podataka

$$\frac{x_k}{f_k} \begin{array}{c} \parallel 60 \mid 120 \mid 516 \mid 1000 \\ \parallel 6 \mid 7 \mid 9 \mid 10 \end{array} .$$

6. Koje se sve svojstvene vrijednosti mogu izračunati korištenjem metode potencija i "shiftovima", tj. primjenom metode potencija na matricu $A - \sigma I$.

LINEARNI PROSTORI

23. 5. 2003.

1. Izračunajte determinantu

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

svođenjem na trokutastu formu.

2. Nađite uvjete na realne parametre a , b i c tako da je matrica

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

normalna.

3. Može li se matrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

invertirati?

4. Nađite opće rješenje problema $y' = Ay$, gdje je A matrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} .$$

Koja je vrsta kritične točke u $P_0 = (0,0)$ (čvor, sedlo, središte ili spiralna točka)?

5. Napravite jedan korak metode inverznih iteracija za nalaženje svojstvenog vektora/svojstvene vrijednosti svojstvenu vrijednost matrice najbližu 1.5

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} , \quad \text{uz početni vektor} \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Koliko je aproksimacija svojstvene vrijednosti daleko od prave?

6. Nađite LR faktorizaciju (bez pivotiranja) matrice A , gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} .$$

LINEARNI PROSTORI

24. 6. 2003.

1. Ispitajte jesu li vektori

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

linearno zavisni.

2. Čini li skup vektora

$$S = \left\{ x \mid x = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix}, \quad x_1, x_2 \in \mathbf{R} \right\}$$

vektorski prostor? Ako da, nađite mu dimenziju i neku bazu.

3. Nađite opće rješenje sistema diferencijalnih jednažbi

$$y' = Ay = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} y$$

a zatim i ono partikularno koje zadovoljava

$$y(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Koja je vrsta kritične točke točka 0?

4. Ako kod rješavanja nehomogenog sistema diferencijalnih jednažbi

$$y' = Ay + g$$

reda 2, g ima član oblika $e^{\lambda t}$, takav da je λ jednostruka svojstvena vrijednost matrice A , kako treba pretpostaviti oblik partikularnog rješenja $y^{(p)}$.

5. Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = ax \ln x + bx + c \ln x$$

koja aproksimira podatke (x_i, y_i) , $x_i > 0$, $i = 0, \dots, n$ uz uvjet da prolazi točkama $T_1 = (1, 1)$ i $T_2 = (e, e)$.

6. Opišite metodu potencija za nalaženje neke jednog svojstvenog vektora matrice A . Prema kojem svojstvenom vektoru će metoda konvergirati? Što se može postići korištenjem pomaka (shift-a)?

LINEARNI PROSTORI

8. 7. 2003.

1. Izračunajte determinantu

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

svođenjem na trokutastu formu.

2. Ispitajte može li se skup vektora

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dopuniti do baze vektorskog prostora svih vektora s 5 realnih komponente. Ako ne može, zašto ne može, a ako može, s koliko još treba nadopuniti ovaj skup da se dobije baza.

3. Metodom neodređenih koeficijenata nađite opće rješenje problema $y' = Ay + g$, gdje je A matrica

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} t \\ t - 1 \end{bmatrix}.$$

4. Opišite vrste kritičnih točka sustava diferencijalnih jednadžbi $y' = Ay$.

5. Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 11 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 9 \\ 3 & 1 & -8 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Preuredite taj linearni sustav tako da se sigurno može riješiti Jacobijevom metodom.

6. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite pravac $\varphi(x) = ax + b$ koji aproksimira funkciju

$$f(x) = \ln x$$

na intervalu $[2, 3]$. (Uputa: neprekidna metoda znači da se minimizira integral, a ne suma! Integral s logaritamskom kao podintegralnom funkcijom integrira se parcijalnom integracijom.)

LINEARNI PROSTORI

16. 9. 2003.

1. Nađite parametre a i b tako da je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & a \\ b & 1/2 \end{bmatrix}$$

ortogonalna.

2. Čini li skup vektora

$$S = \{x \mid x = \begin{bmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix}, \quad x_1, x_2 \in \mathbf{R}\}$$

vektorski prostor? Ako da, nađite mu dimenziju i neku bazu.

3. Nađite opće rješenje sistema diferencijalnih jednažbi

$$y' = Ay = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} y$$

i odredite vrstu kritične točke u 0.

4. Nađite opće rješenje nehomogenog sustava diferencijalnih jednažbi

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_2 - 5 \sin t \\ y'_2 &= -4y_1 + 17 \cos t. \end{aligned}$$

5. Diskretnom metodom najmanjih kvadrata odredite parametar a za funkciju oblika

$$\varphi(x) = \frac{1}{(x+a)^2 + 1}$$

koja aproksimira sljedeći skup podataka

x_k	0	1	2	3
f_k	0.55	0.21	0.09	0.05

Uputa: koristite linearizaciju.

6. Opišite metodu inverznih iteracija za nalaženje jednog svojstvenog vektora matrice A . Prema kojem svojstvenom vektoru će metoda konvergirati? Što se može postići korištenjem pomaka (shift-a)?

LINEARNI PROSTORI

10. 2. 2004.

1. Može li se matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & i \\ 1-i & 1 & -2-i \\ -i & -2+i & 0 \end{bmatrix}$$

dijagonalizirati?

2. Čini li skup vektora

$$S = \left\{ x \mid x = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}, \quad x_1 - 2x_2 = 0 \in \mathbf{R} \right\}$$

vektorski prostor? Ako da, nađite mu dimenziju i neku bazu.

3. Nađite opće rješenje problema $y' = Ay + g$, gdje je A matrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} e^t \\ e^t \end{bmatrix}.$$

4. Uz koje uvjete postoji jedinstveno rješenje sustava diferencijalnih jednačbi

$$y'_i = f_i(t, y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, n \quad ?$$

5. Zadan je linearni sistem $Ax = b$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Nađite dvije iteracije Jacobijevom metodom, uzimajući početni vektor x_0 . Ocijenite grešku približnog rješenja x_2 . Hoće li Jacobijeva metoda konvergirati, a ako hoće, zašto?

6. Pri primjeni trodijagonalne QR metode za nalaženje svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora simetrične matrice u praksi se uvijek upotrebljava pomak (shift). Možete li reći zašto? Napišite kako se provodi QR metoda s pomakom (dva osnovna koraka).

LINEARNI PROSTORI

24. 2. 2004.

1. Matricu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

napišite kao zbroj jedne simetrične i jedne antisimetrične matrice.

2. Determinanta kvadratne matrice A jednaka je 1. Tvrdnja: matrica A je ortogonalna. Dokažite tvrdnju, ili primjerom pokažite da tvrdnja nije istinita.
3. Čine li vektorski prostor (uz zbrajanje polinoma i množenje polinoma skalarom kao operacije) svi polinomi stupnja manjeg ili jednakog 4 koji imaju netrivialne koeficijente samo uz parne potencije, tj. svi polinomi oblika

$$p(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 \quad ?$$

Ako čine vektorski prostor, koja mu je dimenzija?

4. Nađite opće rješenje problema $y' = Ay + g$, gdje je A matrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}.$$

5. Nađite uvjetovanost matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ako je norma koja se koristi u definiciji uvjetovanosti 1-norma.

6. Zbog čega se u praksi češće primjenjuju inverzne iteracije nego metoda potencija?

LINEARNI PROSTORI

2. 4. 2004.

1. Bez rješavanja linearnog sustava, ispitajte ima li homeogeni sustav $Ax = 0$ netrivialna rješenja, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} .$$

2. Matrice A i B imaju iste svojstvene vrijednosti. Tvrdnja: One su slične. Dokažite prethodnu tvrdnju, ili je opovrgnite primjerom.
3. Čine li vektorski prostor (uz zbrajanje matrica i množenje matrica skalarom kao operacije) sve dijagonalne matrice reda 4. Ako čine vektorski prostor, nađite mu dimenziju i jednu bazu.
4. Nađite opće rješenje problema $y' = Ay + g$, gdje je A matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} , \quad g = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix} .$$

5. Metodom najmanjih kvadrata nađite parametre a , b i c za funkciju oblika

$$\varphi(x) = a + b \sin x + c \cos x$$

koja prolazi točkom $(0, 1)$, a aproksimira skup podataka (x_k, f_k) , $k = 0, \dots, n$.

6. Ako startamo s proizvoljnim vektorom x_0 , hoće li niz iteracija $(x^{(m)})$ za rješavanje linearnog sustava $Ax = b$ dobivenih Gauss–Seidelovom metodom, konvergirati prema rješenju sustava, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} ?$$

Objasnite.

LINEARNI PROSTORI

14. 4. 2004.

1. Ispitajte je li matrica

$$A = \begin{bmatrix} e^{-i\beta} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & e^{i\beta} \cos \alpha \end{bmatrix}$$

unitarna za sve $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

2. Neka je D dijagonalna matrica reda n . Nađite kakvi moraju biti elementi te dijagonalne matrice, pa da ta dijagonalna matrica komutira sa svim punim matricama (s proizvoljnim elementima) reda n , tj. da vrijedi $AD = DA$.

3. Čini li skup vektora

$$S = \left\{ x \mid x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, x_1 = 0, x_2 = x_3, x_2, x_3 \in \mathbf{R} \right\}$$

vektorski prostor? Ako da, nađite mu dimenziju i neku bazu.

4. Nađite opće rješenje problema $y' = Ay$, gdje je A matrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} .$$

Koja je vrsta kritične točke u $P_0 = (0, 0)$ (čvor, sedlo, središte ili spiralna točka)?

5. Napravite jedan korak metode inverznih iteracija za nalaženje svojstvenog vektora koji pripada svojstvenoj vrijednosti najbližoj broju 1 za matricu

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} , \quad \text{uz početni vektor} \quad x_0 = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{bmatrix} .$$

Koliki morate staviti pomak (shift)?

6. Nađite uvjetovanost matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

redom u normama 1, 2 i ∞ .

LINEARNI PROSTORI

14. 5. 2004.

1. Može li se matrica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

dijagonalizirati? Objasnite.

2. Izračunajte determinantu

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

svođenjem na trokutastu formu.

3. Čini li skup vektora

$$S = \left\{ x \mid x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, x_1 = x_2, x_2 = 2x_3, x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R} \right\}$$

vektorski prostor? Ako da, nađite mu dimenziju i neku bazu.

4. Metodom neodređenih koeficijenata nađite opće rješenje problema $y' = Ay + g$, gdje je A matrica

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} -t \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5. Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -1 & 0 \\ -1 & 10 & -1 \\ 0 & -1 & 10 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

Nađite jednu iteraciju Jacobijevom metodom, uzimajući početni vektor x_0 . Ocijenite grešku približnog rješenja x_1 .

6. Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nađite pravac koji aproksimira podatke (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, n$ uz uvjet da prolazi točkom $T = (1, 0)$.

LINEARNI PROSTORI

17. 6. 2004.

1. Napišite matricu A kao zbroj jedne simetrične i jedne antisimetrične matrice, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Izračunajte A^8 ako je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Čini li skup polinoma oblika

$$p(x) = a_3x^3 + a_1x + a_0, \quad a_k \in \mathbf{R}$$

vektorski prostor (uz zbrajanje polinoma i množenje polinoma skalarom kao operacije)? Ako da, nađite mu jednu bazu i dimenziju.

4. Nađite opće rješenje sustava diferencijalnih jednačbi

$$y' = Ay = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} y$$

i odredite vrstu kritične točke u 0.

5. Diskretnom metodom najmanjih kvadrata odredite parametar a za funkciju oblika

$$\varphi(x) = \frac{1}{(x+1)^2 + a}$$

koja aproksimira podatke (x_k, f_k) , $k = 0, \dots, n$. Uputa: koristite linearizaciju.

6. Simetričnoj matrici želite (numerički) naći sve svojstvene vrijednosti. Opišite neku metodu kojom biste to napravili.

LINEARNI PROSTORI

21. 9. 2004.

1. Nađite rang matrice A ovisno o parametru λ :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & \lambda & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Može li se matrica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dijagonalizirati? Ako može, objasnite zašto.

3. Čini li skup polinoma oblika

$$p(x) = a_3x^3 + a_1x + 1, \quad a_k \in \mathbf{R}$$

vektorski prostor (uz zbrajanje polinoma i množenje polinoma skalarom kao operacije)? Ako da, nađite mu jednu bazu i dimenziju.

4. Nađite opće rješenje sustava diferencijalnih jednačini

$$y' = Ay = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} y$$

i odredite vrstu kritične točke u 0.

5. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata tražimo pravac oblika $\varphi(x) = x+a$ koji na intervalu $[0, 1]$ najbolje aproksimira funkciju

$$f(x) = x^2.$$

6. Ako matrica nije strogo dijagonalno dominantna, može li Jacobijeva metoda za iterativno rješavanje linearnih sustava (unatoč tome) konvergirati? Postoji li neki drugi kriterij vezan uz matricu iteracije R koji kaže kad će metoda konvergirati?

LINEARNI PROSTORI

1. 10. 2004.

1. Uz koje uvjete dijagonalna (kvadratna) matrica D reda n komutira sa svim kvadratnim matricama A reda n .
2. Pokažite da su sve matrice (s realnim elementima) oblika

$$H = I - 2vv^T,$$

gdje je I jedinična matrica reda n , a v vektor s n (realnih) komponentata, takav da je $\|v\|_2 = \sqrt{v^T v} = 1$, ortogonalne. Uputa: iskoristite da je $vv^T vv^T = v(v^T v)v^T$.

3. Čini li skup polinoma oblika

$$p(x) = a_2 x^2 + x + a_0, \quad a_k \in \mathbf{R}$$

vektorski prostor (uz zbrajanje polinoma i množenje polinoma skalarom kao operacije)? Ako da, nađite mu jednu bazu i dimenziju.

4. Metodom dijagonalizacije nađite rješenje sustava diferencijalnih jednačbi $y' = Ay + g(t)$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad g(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ e^{-t} \end{bmatrix}.$$

5. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata tražimo pravac oblika $\varphi(x) = ax + 1$ koji na intervalu $[0, 2]$ najbolje aproksimira funkciju

$$f(x) = x^2.$$

6. Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 1 & 0 \\ -1 & 9 & 0 & 11 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 9 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Preuredite taj linearni sustav tako da se sigurno može riješiti Gauss–Seidelovom metodom.

LINEARNI PROSTORI

19. 11. 2004.

1. Nađite normu 1, 2 i ∞ za matricu A , ako je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Neka je U kvadratna matrica reda n napisana u blok-formi s blokovima

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix},$$

pri čemu je blok U_{11} kvadratni, reda m , $m < n$. Koje relacije moraju zadovoljavati blokovi da bi U bila ortogonalna matrica?

3. Zadan je skup 5-torki

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_4 = -x_5\}.$$

Čine li sve takve 5-orke vektorski prostor? Ako da, nađite mu jednu bazu i dimenziju.

4. Metodom neodređenih koeficijenata nađite opće rješenje problema $y' = Ay + g$, gdje je A matrica

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} t \\ t - 1 \end{bmatrix}.$$

5. Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = ax^2 + x + c$$

koja prolazi točkom $(1, 1)$, a aproksimira skup podataka (x_k, f_k) , $k = 0, \dots, n$.

6. Za matricu A napravimo LR faktorizaciju s parcijalnim pivotiranjem, tj. nađemo matricu permutacije P , te L i R takve da vrijedi $PA = LR$. Mogu li tako dobivene matrice L i R biti jednake

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ & 2 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix}?$$

Objasnite – ako da zašto da, ako ne zašto ne.

LINEARNI PROSTORI

14. 1. 2005.

1. Nađite A^n , za proizvoljni $n \in \mathbf{N}$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Ispitajte bez rješavanja sustava, ima li linearni sustav $Ax = 0$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

samo trivijalno rješenje.

3. Zadan je skup 5-torki

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_1 + x_2 = 1, x_4 = 0, x_3 = x_5\}.$$

Čine li sve takve 5-orke vektorski prostor? Ako da, nađite mu jednu bazu i dimenziju.

4. Nađite opće rješenje problema $y' = Ay$, gdje je A matrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Koja je vrsta kritične točke u $P_0 = (0, 0)$ (čvor, sedlo, središte ili spiralna točka)?

5. Funkciju

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{za } x \geq 0, \\ -x & \text{za } x \leq 0 \end{cases}$$

na intervalu $[-1, 1]$ aproksimiramo po neprekidnoj metodi najmanjih kvadrata parabolom $\varphi(x) = ax^2 + c$. Nađite koeficijente a i c . (Uputa: neprekidna metoda znači da se minimizira integral, a ne suma! Nadalje, oprez pri integraciji $|x|$!)

6. Napravite jedan korak metode inverznih iteracija za nalaženje svojstvenog vektora (za svojstvenu vrijednost najbližu 5) matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{uz početni vektor} \quad x_0 = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

LINEARNI PROSTORI

1. 2. 2005.

1. Nađite sve matrice s kojima komutira matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Ispitajte jesu li matrice A i B slične

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Ovisno o parametru λ , odredite rang matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & \lambda + 3 \\ \lambda & 1 & 2 & -2 & 1 - \lambda \end{bmatrix}.$$

4. Metodom neodređenih koeficijenata nađite opće rješenje problema $y' = Ay + g$, gdje je A matrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}.$$

5. Sustav jednadžbi $Ax = b$ rješavamo nekom iterativnom metodom. Ako je iterativna metoda

$$x^{(m+1)} = Rx^{(m)} + c, \quad R = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.7 \\ 0.1 & 0.4 & 0.0 \\ 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix},$$

hoće li ta metoda konvergirati za bilo koji početni vektor $x^{(0)}$? Objasnite.

6. Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nađite parabolu koja prolazi točkom $A = (0, 1)$ i u točki A ima derivaciju jednaku 1, a aproksimira skup podataka (x_k, f_k) , $k = 0, \dots, n$.

LINEARNI PROSTORI

15. 2. 2005.

1. Nađite normu 1, 2 i ∞ za matricu A , ako je

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Nađite sve tzv. desne inverze matrice A , tj. ako je $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ nađite matrice $X \in \mathbf{R}^{n \times m}$ takve da je $AX = I_m$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Oprez: rješenje ne mora biti jedinstveno!

3. Zadan je skup 5-torki

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_1 - 2x_2 + x_4 = 0, x_4 = x_3 + x_5\}.$$

Čine li sve takve 5-orke vektorski prostor? Ako da, nađite mu jednu bazu i dimenziju.

4. Metodom dijagonalizacije nađite opće rješenje problema $y' = Ay + g$, gdje je A matrica

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5. Nađite LR faktorizaciju matrice A s parcijalnim pivotiranjem, preciznije, nađite matrice P , L i R takve da je $PA = LR$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

6. Kako se efikasno provodi QR metoda za dijagonalizaciju nesimetričnih matrica? Precizno opišite formu na koju se matrica svodi i kako se provodi sama QR metoda na takvoj matrici.

LINEARNI PROSTORI

1. 4. 2005.

1. Matrica A zove se idempotentna, ako je kvadratna i vrijedi $A^2 = A$. Ispitajte da li je matrica

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

idempotentna.

2. Ovisno o parametru λ odredite rang matrice A , ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & \lambda & 4 & 10 \\ 2 & 1 & -1 & 8 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Ispitajte bez rješavanja linearnog sustava, ima li homogeni linearni sustav $Ax = 0$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

samo trivijalno rješenje. Objasnite!

4. Nađite opće rješenje problema $y' = Ay$, gdje je A matrica

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}.$$

Koja je vrsta kritične točke u $(0, 0)$?

5. Ispitajte jesu li matrice A i B slične

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. Napravite jedan korak metode inverznih iteracija za nalaženje svojstvenog vektora (za svojstvenu vrijednost najbližu 0) matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{uz početni vektor} \quad x_0 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}.$$

LINEARNI PROSTORI

6. 5. 2005.

1. Ovisno o parametru λ odredite rang matrice A , ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

2. Nađite trag matrice (zbroj dijagonalanih elemenata), ako je matrica

$$A = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

3. Metodom dijagonalizacije nađite opće rješenje problema $y' = Ay + g$, gdje je A matrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} t \\ -t + 1 \end{bmatrix}.$$

4. Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nađite pravac koji prolazi točkom $(0, 1)$ i aproksimira sljedeći skup podataka $(-1, 0.5)$, $(0, 1.1)$, $(1, 1.4)$, $(2, 2.1)$.

5. Napravite jedan korak metode potencija za nalaženje svojstvenog vektora matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{uz početni vektor} \quad x_0 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte prema kojoj svojstvenoj vrijednosti će konvergirati aproksimacije svojstvene vrijednosti dobivene metodom potencija.

6. Koji se problem javlja i kako ga možemo riješiti ako je funkcija $\varphi(x)$ (kojom aproksimiramo) u metodi najmanjih kvadrata nelinearna?

LINEARNI PROSTORI

23. 6. 2005.

1. Ovisno o parametru λ odredite determinantu matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 6 & (\lambda + 1) \end{bmatrix}.$$

2. Čini li skup vektora

$$S = \left\{ x \mid x = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}, \quad x_1, x_2 \in \mathbf{R} \right\}$$

vektorski prostor? Ako da, nađite mu dimenziju i neku bazu.

3. Metodom neodređenih koeficijenata nađite opće rješenje problema $y' = Ay + g$, gdje je A matrica

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4. Kad kritičnu točku P zovemo stabilnom i privlačnom (atraktivnom) kritičnom točkom za sustav diferencijalnih jednadžbi?

5. Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Nađite uvjetovanost matrice A korištenjem norme 2.

6. Gausovim eliminacijama s parcijalnim pivotiranjem nađite rješenje linearnog sustava $Ax = b$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -4 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

LINEARNI PROSTORI

7. 7. 2005.

1. Ako za kvadratnu matricu vrijedi da je $A^2 = A$, izračunajte koje sve vrijednosti može poprimiti $\det A$.
2. Čini li skup polinoma stupnja manjeg ili jednakog 3, kojima je koeficijent uz prvu potenciju jednak 0, vektorski prostor? Ako da, nađite mu jednu bazu i dimenziju.
3. Ovisno o parametru λ odredite rang matrice A , ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda^2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda^2 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix} .$$

4. Metodom dijagonalizacije nađite opće rješenje problema $y' = Ay + g$, gdje je A matrica

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} , \quad g = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

5. Ispitajte jesu li matrice A i B slične

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} .$$

6. Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nađite pravac $\varphi(x) = ax + b$ koji aproksimira funkciju

$$f(x) = 10^x$$

u točkama s x koordinatama 1, 2, 3 i 4.

LINEARNI PROSTORI

13. 9. 2005.

1. Nađite sva linearnog sustava $Ax = b$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

2. Čini li skup 5-torki

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_1 + x_2 = x_3, x_4 - x_5 = 0, x_1 = 2x_2\}$$

vektorski prostor? Ako da, nađite mu jednu bazu i dimenziju.

3. Ovisno o parametru λ odredite determinantu matrice A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda^2 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda^2 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda \end{bmatrix}.$$

4. Nađite opće rješenje problema $y' = Ay + g$, gdje je A matrica

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} t+1 \\ t \end{bmatrix}.$$

5. Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nađite LR faktorizaciju matrice A (s pivotiranjem!), tj. nađite rastav $PA = LR$, gdje je P permutacija.

6. Nađite koeficijente a , b i c ako točke (x_k, y_k) , $k = 0, \dots, n$ aproksimiramo parabolom

$$\varphi(x) = ax^2 + bx + c$$

po diskretnoj metodi najmanjih kvadrata, uz uvjet da parabola prolazi točkama $(0, 1)$ i $(x_s, 0)$, pri čemu je x_s , ($x_s \neq 1$) aritmetička sredina x -koordinata točaka (x_k, y_k) , $k = 0, \dots, n$.

LINEARNI PROSTORI

20. 1. 2006.

1. U ovisnosti o λ nađite rang matrice A , ako je

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 2 & 0 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda + 1 & \lambda - 1 & \lambda & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Nađite sve tzv. lijeve inverze matrice A , tj. ako je $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ nađite matrice $X \in \mathbf{R}^{n \times m}$ takve da je $XA = I_n$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Zadan je skup 5-torki

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_1 - 2x_2 + x_4 = 1, x_4 = x_3 + x_5\}.$$

Čine li sve takve 5-orke vektorski prostor? Ako da, nađite mu jednu bazu i dimenziju.

4. Metodom dijagonalizacije nađite opće rješenje problema $y' = Ay + g$, gdje je A matrica

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}.$$

5. Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Nađite LR faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P , te matrice L i R tako da je $PA = LR$.

6. Metodom najmanjih kvadrata nađite pravac koji prolazi kroz ishodušte koordinatnog sustava i aproksimira podatke:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x_k & 1.0 & 2.0 & 3.0 & 4.0 \\ \hline y_k & 2.1 & 3.9 & 5.9 & 8.1 \end{array}.$$

LINEARNI PROSTORI

17. 2. 2006.

1. Neka je zadana kvadratna matrica A reda n . Elementi matrice B imaju sljedeća svojstva: elementi i -tog retka matrice B jednaki su i puta odgovarajući element i -tog retka matrice A , tj. ako je a_i i -ti redak od A , onda je $b_i = i \cdot a_i$. Odredite $\det B$ u terminima $\det A$.
2. Matrica A je nilpotentna ako je $A^n = 0$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Njen indeks nilpotentnosti je n . Ispitajte je li matrica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

nilpotentna, a ako je, koji joj je indeks nilpotentnosti.

3. Zadan je skup četvorki

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + 2x_2 + x_4 = 0, x_4 = x_3\}.$$

Čine li sve takve četvorke vektorski prostor? Ako da, nađite mu jednu bazu i dimenziju.

4. Nađite opće rješenje problema $y' = Ay$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Koja vrsta kritične točke je u $(0, 0)$?

5. Poznata je LR faktorizacija (s pivotiranjem) matrice $PA = LR$, gdje su

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ & 4 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}.$$

Korištenjem te faktorizacije nađite rješenje sustava $Ax = b$, ako je

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

6. Nađite linearni sustav koji treba riješiti (ne morate ga riješiti) da biste linearnom metodom najmanjih kvadrata našli funkciju oblika

$$\varphi(x) = (ax^2 + bx + c)^3$$

koja aproksimira skup podataka (x_k, f_k) , $k = 0, \dots, n$. Uputa: linearizirajte funkciju.

LINEARNI PROSTORI

13. 3. 2006.

1. Ispitajte može li se skup polinoma

$$p_1(x) = 4x^3 + 2x^2 + x - 1,$$

$$p_2(x) = x^3 + x^2 - x + 1,$$

$$p_3(x) = 2x^3 + 3x - 3$$

dopuniti do baze vektorskog prostora svih polinoma stupnja manjeg ili jednakog 3? Ako ne može, zašto ne može, a ako može, s koliko polinoma treba nadopuniti ovaj skup da se dobije baza.

2. Ovisno o parametru λ odredite rang matrice A , ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Nađite inverz matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Metodom varijacije konstanti nađite opće rješenje problema $y' = Ay + g$, gdje je A matrica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} e^t \\ e^t \end{bmatrix}.$$

5. Metodom najmanjih kvadrata (uz korištenje linearizacije) nađite parametre a i b funkcije

$$\varphi(x) = \log_{10}(ax + b)$$

koja aproksimira sljedeći skup podataka

$$\frac{x_k}{f_k} \left\| \begin{array}{c|c|c|c} 4 & 50 & 500 & 4999 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right.$$

6. Koja je prednost korištenja metode inverznih iteracija sa shiftovima obzirom na metodu potencija sa shiftovima?

LINEARNI PROSTORI

9. 5. 2006.

1. Sve linearne kombinacije polinoma

$$\begin{aligned}p_1(x) &= x^3 + x - 1, \\p_2(x) &= x^3 + x + 1,\end{aligned}$$

(linearne kombinacije polinoma: $p(x) = \alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x)$, $\alpha_i \in \mathbf{R}$) čine jedan vektorski prostor. Koja je dimenzija tog vektorskog prostora. Nađite mu jednu bazu.

2. Ovisno o parametru λ odredite determinantu matrice A , ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda & -1 \\ 1 & 1 & \lambda & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 - 1 \end{bmatrix}.$$

3. Nađite sve svojstvene vrijednosti matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Metodom dijagonalizacije nađite opće rješenje problema $y' = Ay + g$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} e^t \\ e^t \end{bmatrix}.$$

5. Nađite koeficijente a , b i c ako točke (x_k, y_k) , $k = 0, \dots, n$ aproksimiramo parabolom

$$\varphi(x) = ax^2 + bx + c$$

po diskretnoj metodi najmanjih kvadrata, uz uvjet da parabola prolazi točkama $(0, 1)$ i $(1, 1)$.

6. Opišite metodu inverznih iteracija za nalaženje jednog svojstvenog vektora matrice A . Prema kojem svojstvenom vektoru će metoda konvergirati? Što se može postići korištenjem pomaka (shift-a)?

LINEARNI PROSTORI

6. 7. 2005.

1. Nađite sva linearnog sustava $Ax = b$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

2. Čini li skup 5-torki

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_1 - x_2 = 2x_3, x_1 - x_4 = 0\}$$

vektorski prostor? Ako da, nađite mu jednu bazu i dimenziju.

3. Ovisno o parametru λ odredite singularnost matrice A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda^2 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda^2 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda \end{bmatrix}.$$

4. Nađite opće rješenje problema $y' = Ay + g$, gdje je A matrica

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}.$$

5. Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nađite uvjetovanost matrice A u normi 1.

6. Nađite koeficijente a , b i c ako točke (x_k, y_k) , $x_k, y_k > 0$, $k = 0, \dots, n$ aproksimiramo funkcijom

$$\varphi(x) = (a \ln x + b)^2$$

po diskretnoj metodi najmanjih kvadrata, uz uvjet da funkcija prolazi točkom $(1, 1)$. Uputa: linearizirajte problem.

LINEARNI PROSTORI

11. 9. 2006.

1. Ako za kvadratne matrice A i B vrijedi da je $A^2B = B^2A$, izračunajte koje sve vrijednosti mogu poprimiti $\det A$ i $\det B$. Oprez: dijeljenje s nulom je nezdravo!

2. Svi vektori oblika

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ 1 \\ 3x_1 \end{bmatrix}$$

leže u vektorskom prostoru dimenzije 4 (tj. \mathbf{R}^4 , vektorskom prostoru svih vektora sa 4 komponente). Nađite potprostor (od \mathbf{R}^4) najmanje dimenzije u kojem sigurno leže svi takvi x . Za taj potprostor nađite jednu bazu i dimenziju.

3. Ovisno o parametru λ odredite rang matrice A , ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2\lambda & \lambda^2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Nađite opće rješenje problema $y' = Ay + g$, gdje je A matrica

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5. Nađite ∞ -normu matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

6. Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nađite pravac $\varphi(x) = ax + b$ koji aproksimira funkciju

$$f(x) = 10^{-x}$$

u točkama s x koordinatama $-4, -2, -1$ i 0 .

LINEARNI PROSTORI

21. 9. 2006.

1. Ako je A kvadratna matrica koja zadovoljava jednadžbu $A^3 + A^2 = 0$, mora li A uvijek biti singularna matrica? Pokažite.

2. Svi vektori oblika

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ x_3 \\ 2x_4 \end{bmatrix}$$

leže u vektorskom prostoru dimenzije 4 (tj. \mathbf{R}^4 , vektorskom prostoru svih vektora sa 4 komponente). Nađite potprostor (od \mathbf{R}^4) najmanje dimenzije u kojem sigurno leže svi takvi x . Za taj potprostor nađite jednu bazu i dimenziju.

3. Korištenjem svođenja na trokutastu formu izračunajte determinantu matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Nađite opće rješenje problema $y' = Ay + g$, gdje je A matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5. Diferencijalnu jednadžbu

$$y''' + 2y' + xy = 0$$

s početnim uvjetima $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 3$ napišite u obliku sustava diferencijalnih jednadžbi prvog reda.

6. Napravite jedan korak metode inverznih iteracija za nalaženje svojstvenog vektora (za svojstvenu vrijednost najbližu 5) matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{uz početni vektor} \quad x_0 = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

LINEARNI PROSTORI

2. 10. 2006.

1. Bez rješavanja linearnog sustava $Ax = 0$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix},$$

ispitajte ima li on samo trivijalno rješenje.

2. Svi vektori oblika

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

leže u vektorskom prostoru dimenzije 4 (tj. \mathbf{R}^4 , vektorskom prostoru svih vektora sa 4 komponente). Nađite potprostor (od \mathbf{R}^4) najmanje dimenzije u kojem sigurno leže svi takvi x . Za taj potprostor nađite jednu bazu i dimenziju.

3. Može li se matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dijagonalizirati?

4. Nađite opće rješenje problema $y' = Ay$, gdje je A matrica

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Koja je vrsta kritične točke u $P_0 = (0, 0)$ (čvor, sedlo, središte ili spiralna točka)?

5. Pretpostavimo da trebate naći treću po veličini svojstvenu vrijednost matrice reda 5. Možete li to napraviti metodom potencija s odgovarajućim pomakom (shiftom)? A metodom inverznih iteracija? Objasnite.

6. Nađite uvjetovanost matrice

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 & 0 \\ 1 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ako je norma koja se koristi spektralna (2-norma), a $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $0 < \varepsilon \ll 1$. Da li je ta matrica dobro ili loše uvjetovana?

LINEARNI PROSTORI

5. 5. 2007.

1. Izračunajte A^{16} ako je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Matrica A ima 15 redaka i 12 stupaca i rang jednak 10. Može li za takvu matricu linearni sustav $Ax = b$ imati jedinstveno rješenje? Objasnite. Uputa: koristite Kronecker–Cappelijev teorem o broju rješenja linearnog sustava.

3. Svi vektori oblika

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ 3x_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

leže u vektorskom prostoru dimenzije 4 (tj. \mathbf{R}^4 , vektorskom prostoru svih vektora sa 4 komponente). Nađite potprostor (od \mathbf{R}^4) najmanje dimenzije u kojem sigurno leže svi takvi x . Za taj potprostor nađite jednu bazu i dimenziju.

4. Nađite opće rješenje problema $y' = Ay$, gdje je A matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 3 & 1 \\ & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

5. Zadani su podaci (x_k, f_k) , $k = 0, \dots, n$. Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nađite parabolu

$$\varphi(x) = ax^2 + bx + c$$

koja aproksimira te podatke, a prolazi točkama $(0, -1)$ i $(2, 0)$.

6. Opišite metodu inverznih iteracija (s pomakom) za nalaženje svojstvenog vektora i pripadne svojstvene vrijednosti matrice A . Prema kojoj će svojstvenoj vrijednosti metoda konvergirati?

LINEARNI PROSTORI

21. 9. 2007.

1. Izračunajte determinantu svođenjem na trokutastu formu

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

2. Izračunajte inverznu matricu zadanoj

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

3. Nađite rješenje problema $x'' + x' - 8x = e^t$, uz početne uvjete $x(0) = 4$, $x'(0) = -1$ svođenjem na sistem diferencijalnih jednažbi prvog reda. Uputa: diferencijalna jednažba se svodi na sistem diferencijalnih jednažbi prvog reda tako da se prva derivacija uzme za novu varijablu, recimo $x' = y$ i to je druga jednažba sistema. Više se derivacije napišu korištenjem derivacije nove varijable.

4. Opišite kako se metodom varijacije konstanti nalazi opće rješenje problema $y' = Ay + g$.

5. Ispitajte jesu li matrice A i B slične

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

6. Nađite linearni sustav koji treba riješiti (ne morate ga riješiti) da biste linearnom metodom najmanjih kvadrata našli funkciju oblika

$$\varphi(x) = (ax^5 + b)^7$$

koja aproksimira skup podataka (x_k, f_k) , $k = 0, \dots, n$. Uputa: linearizirajte funkciju.