Deset (ne sasvim) lakih dokaza

ZVONIMIR ŠIKIĆ, Zagreb

U *Poučku* br. 17, str. 76., objavili smo deset (ne sasvim) lakih teorema koje ste, vjerujemo, (ipak) dokazali. Usporedite vaše dokaze s našima. Vjerujemo da će se većina, u biti, pokazati istima.

(1) Trokuti ΔABC i ΔPBQ, te ΔADC i ΔSDR, međusobno su slični (imaju po jedan zajednički kut i po dvije proporcionalne stranice, s faktorom proporcionalnosti 1/2). Dakle,

$PQ \parallel AC$ i $\overline{PQ} = \overline{AC}/2$

$SR \parallel AC$ i $\overline{SR} = \overline{AC}/2.$

Otud odmah slijedi

$PQ \parallel SR$ i $\overline{PQ} = \overline{SR},$

što znači da je $PQRS$ paralelogram.

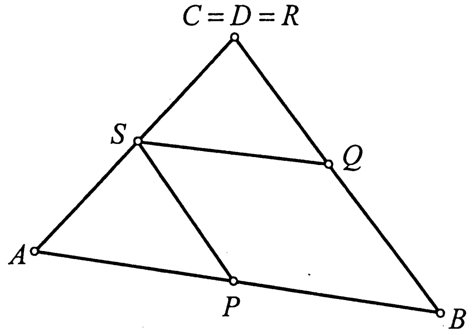
Često ćete naići i na vektorski dokaz Varignonovog teorema:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AB}/2 + \overrightarrow{BC}/2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})/2 = \overrightarrow{AC}/2 =$$

$$= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})/2 = \overrightarrow{AD}/2 + \overrightarrow{DC}/2 = \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DR} = \overrightarrow{SR}.$$

Dakle, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$, što znači da je $PQRS$ paralelogram.

Uočite da redukcijom četverokuta $ABCD$ na trokut ABC (tj. identifikacijom $C = D$) Varignonov teorem postaje teorem o srednjici trokuta: srednjica $\overline{PQ}$ trokuta paralelna je sa stranicom $\overline{AC}$ i ima pola njezine duljine.



Slika 8.

(2) Obrat ćemo dokazati vektorski:

$$\overline{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{BQ} + 2\overrightarrow{RD} + 2\overrightarrow{DS} =$$

$$= 2(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ}) + 2(\overrightarrow{RD} + \overrightarrow{DS}) = 2\overrightarrow{PQ} + 2\overrightarrow{RS} = 2(\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{SR}) = \vec{0}.$$

Naime, u paralelogramu $PQRS$ vrijedi $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$. Dakle, $A = A'$.

(3) Kao i u prethodnom dokazu, lako nalazimo da je $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{PQ} + 2\overrightarrow{RS}$. No, to znači da $\overline{AA'}$ ovisi samo o početnom četverokutu $PQRS$.

(4) Pretpostavimo da su kevijane $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ i $\overline{CC'}$ konkurentne. Tada vrijedi:

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} = \frac{ABA'}{AA'C} = \frac{OBA'}{OA'C} = \frac{ABA' - OBA'}{AA'C - OA'C} = \frac{OBA}{OAC}.$$

Na isti način nalazimo:

$$\frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = \frac{OCB}{OBA} \quad \text{i} \quad \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = \frac{OAC}{OCB}.$$

Dakle,

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = \frac{OBA}{OAC} \frac{OCB}{OBA} \frac{OAC}{OCB} = 1.$$

Da bismo dokazali obrat, pretpostavimo da vrijedi

(i) $\dfrac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \dfrac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \dfrac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = 1$

i definirajmo točku C'' na sljedeći način,

$AA' \times BB' = O$ i $OC \times AB = C''$.

Tada su AA', BB' i CC'' konkurentni pa po već dokazanom vrijedi

(ii) $\dfrac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \dfrac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \dfrac{\overline{AC''}}{\overline{C''B}} = 1.$

Uspoređujući (i) s (ii) nalazimo:

$$\frac{\overline{AC''}}{\overline{C''B}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}}, \text{ tj. } C' = C''.$$

Dakle, AA', BB' i CC' su konkurentni.

(5) Ako su A', B' i C' nožišta visina onda je

$\overline{BA'} = \overline{BA} \cos \beta$, $\overline{A'C} = \overline{AC} \cos \gamma$

$\overline{CB'} = \overline{CB} \cos \gamma$, $\overline{B'A} = \overline{BA} \cos \alpha$

$\overline{A'C} = \overline{AC} \cos \alpha$, $\overline{C'B} = \overline{CB} \cos \beta$.

Otud slijedi

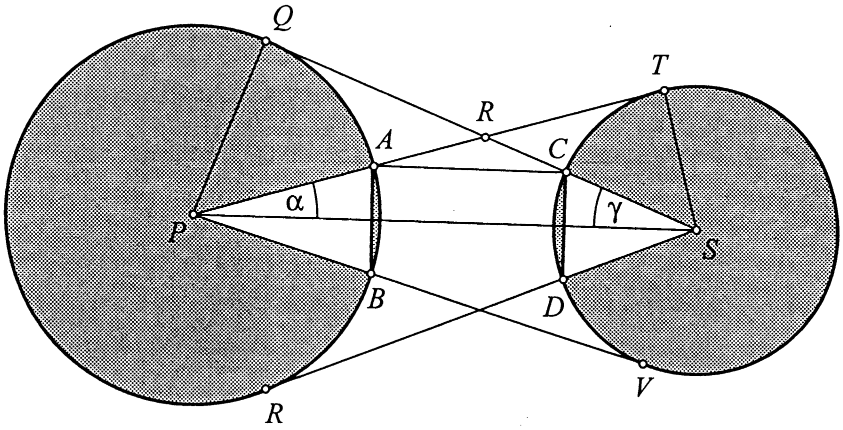
$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = \frac{\overline{BA}\cos\beta}{\overline{AC}\cos\gamma} \frac{\overline{CB}\cos\gamma}{\overline{BA}\cos\alpha} \frac{\overline{AC}\cos\alpha}{\overline{CB}\cos\beta} = 1,$$

što prema Cevinu teoremu znači da su visine $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ i $\overline{CC'}$ konkurentne.

(6) Uz pomoć trigonometrije dokaz je vrlo jednostavan.

$$\overline{AB} = 2\,\overline{PQ} \sin \alpha = 2\,\overline{PQ} \frac{\overline{ST}}{\overline{PS}} = 2\,\overline{ST} \frac{\overline{PQ}}{\overline{PS}} = 2\,\overline{ST} \sin \gamma = \overline{CD}$$

(Naravno, $AB \perp PS \perp CD$, odakle odmah slijedi da je $ABCD$ pravokutnik.)



Slika 9.

Dokaz se bez trigonometrije može provesti na sljedeći način. Trokuti ΔPQR i ΔSTR su slični (pravokutni trokuti sa zajedničkim šiljastim kutom u R). Zbog $\overline{PQ} = \overline{PA}$ i $\overline{ST} = \overline{SC}$ vrijedi

$$\frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}}=\frac{\overline{SR}}{\overline{ST}},\quad \frac{\overline{PR}}{\overline{PA}}=\frac{\overline{SR}}{\overline{SC}},\quad \frac{\overline{PR}}{\overline{PR}-\overline{PA}}=\frac{\overline{SR}}{\overline{SR}-\overline{SC}},\quad \frac{\overline{PR}}{\overline{AR}}=\frac{\overline{SR}}{\overline{CR}}.$$

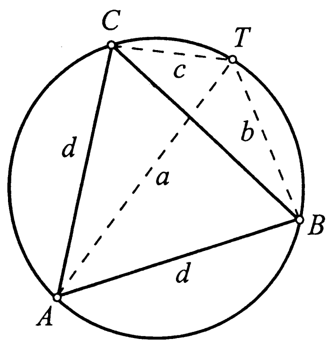
Dakle, trokuti ΔARC i ΔPRS su slični. Odavde slijedi $\overline{PS} \,||\, \overline{AC}$. Na isti način možemo dokazati $\overline{PS} \,||\, \overline{BD}$. Dakle, $\overline{AC} \,||\, \overline{BD}$. Uzimajući u obzir da je $AB \perp PS \perp CD$, odmah slijedi da je $ABCD$ pravokutnik, dakle i da je $\overline{AB}=\overline{CD}$.

(7) Uz pomoć kosinusova poučka primijenjenog na ΔATB i ΔATC odmah nalazimo

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 60° = a^2 + b^2 - ab$$

$$d^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos 60° = a^2 + c^2 - ac.$$

Naime, $\angle ATB$ i $\angle ACB = 60°$ obodni su kutevi nad istim lukom, kao što su to i $\angle ATC$ i $\angle ABC = 60°$.



Slika 10.

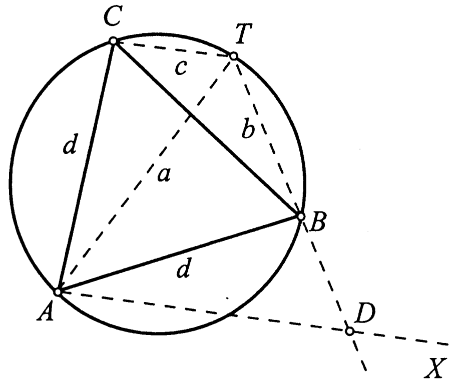
Oduzimanjem gornjih jednadžbi nalazimo

$b^2 - c^2 = ab - ac, \quad (b+c)(b-c) = a(b-c), \quad b + c = a,$

tj. $\overline{BT} + \overline{CT} = \overline{AT}$, što smo i trebali dokazati.

Uočite da gornji dokaz vrijedi samo za $b \neq c$, jer samo tada možemo dijeliti s $b - c \neq 0$. Ako je $b = c$, trokuti ΔATC i ΔATB su pravokutni pa odmah slijedi $b = c = a \sin 30°$, tj. $a = 2b = 2c$.

Alternativni dokaz koristi se konstrukcijom trokuta TAD, koji dobijemo tako da krak TX kuta TAX od 60° presiječemo s TB u točki D (vidi sliku 11.).

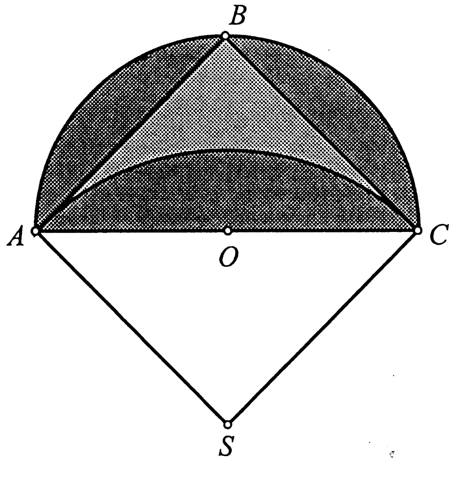


Slika 11.

Taj je trokut jednakostraničan (kutovi u T i A imaju po 60°) i to sa stranicom a. Dakle, $\overline{TD} = a$. Osim toga trokuti ΔCAT i ΔBAD su kongruentni ($\overline{AT} = \overline{AD} = a$, $\overline{AC} = \overline{AB} = d$, $\angle CAT = \angle BAD$), što znači da je $\overline{BD} = \overline{CT} = c$. Dakle, $a = \overline{TD} = \overline{TB} + \overline{BD} = b + c$.

Inače, Van Schootenov teorem neposredna je posljedica Ptolemejeva teorema prema kojem je $ad = cd + bd$, tj. $a = b + c$.

(8) Pitagorin teorem ne vrijedi samo za kvadrate, nego i za bilo koje druge slične likove nad katetama i hipotenuzom. Promotrimo stoga kružne odsječke nad hipotenuzom $\overline{AC}$ i katetama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$.

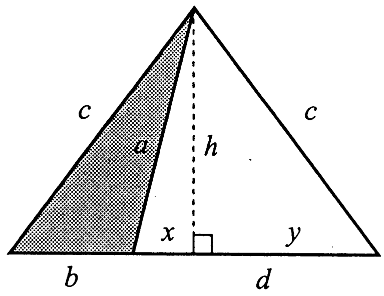


Slika 12.

Prvi od njih jednak je zbroju druga dva, odakle odmah slijedi Hipokratov teorem o lunama.

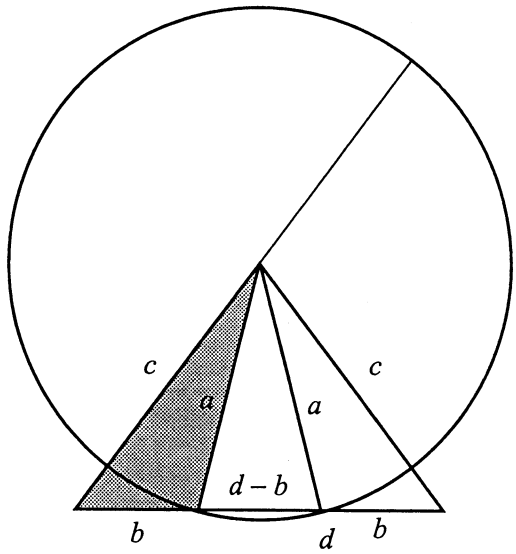
(9) Iz $c^2 = h^2 + y^2$ i $a^2 = h^2 + x^2$ odmah slijedi

$$c^2 - a^2 = y^2 - x^2 = (y+x)(y-x) = bd, \quad c^2 = a^2 + bd.$$



Slika 13.

Bez poziva na Pitagorin teorem možemo postupiti ovako. Konstruirajmo kružnicu radijusa a sa središtem u vrhu našeg jednakokračnog trokuta.

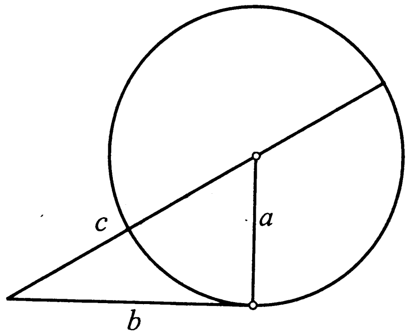


Slika 14.

Tada vrijedi

$$(c-a)(c+a) = b(b+d-b), \quad c^2 = a^2 + db.$$

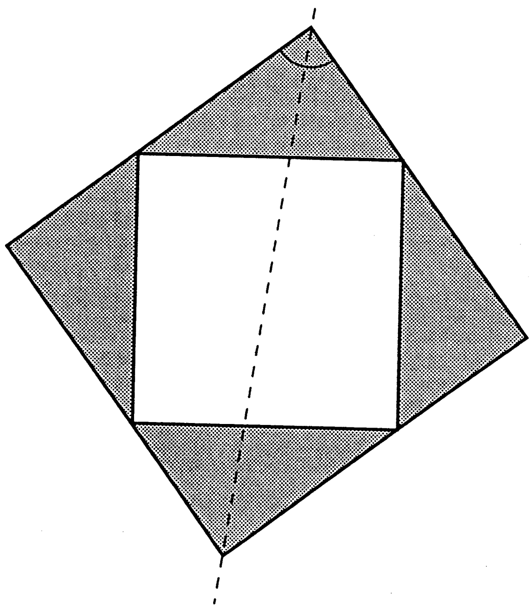
Specijalni slučaj ovoga dokaza je sljedeći dokaz Pitagorina teorema.



Slika 15.

$(c-a)(c+a)=b^2,\ c^2=a^2+b^2$

(10) Nakon „uokvirenja" je očito da dijagonala vanjskoga kvadrata dijeli vanjski i unutarnji kvadrat na dva jednaka dijela.



Slika 16.