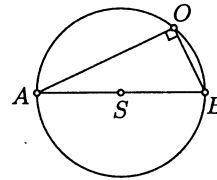


POOPĆENJA TALESOVOG POUČKA

Zvonimir Šikić, Zagreb

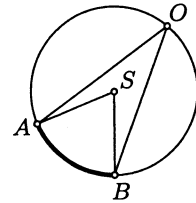
Talesov poučak tvrdi da je obodni kut nad promjerom kružnice uvijek pravi.

$$\angle AOB = 90^\circ$$



Prvo poopćenje ovog starog poučka jest poučak o obodnom i središnjem kutu. On tvrdi da je svaki obodni kut nad kružnim lukom jednak polovici središnjeg kuta nad tim istim lukom:

$$\angle AOB = \frac{1}{2} \angle ASB.$$

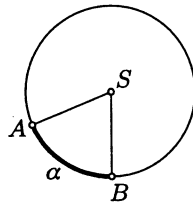


Dokaz ovog poopćenja dobro je poznat i možete ga naći u svom udžbeniku [1] na str. 227.

Prije nego poopćimo i taj poučak, izrazit ćemo ga na nešto drukčiji način. Sjetimo se najprije da je kutna mjera kružnoga luka \widehat{AB} , koju ćemo kraće označiti s α , zapravo mjera središnjega kuta $\angle ASB$ (vidi [1] str. 220):

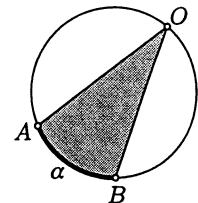
$$\alpha = \angle ASB.$$

Zato, poučak o obodnom i središnjem kutu možemo izraziti i ovako:



Svaki obodni kut nad zadanim kružnim lukom ima pola kutne mjere toga luka:

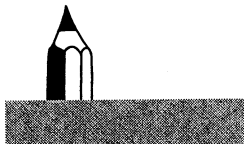
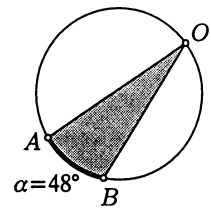
$$\angle AOB = \frac{\alpha}{2}.$$

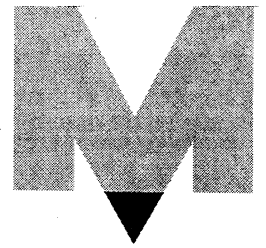


Razmotrimo sada nekoliko zadataka.

Zadatak 1. Na kružnici je odabrana točka O i u njoj vršni kut koji ćemo kratko označiti s $\angle O$. Taj kut iz kružnice isjeća luk kutne mjere 48° . Koliki je $\angle O$?

Rješenje: Iz poučka o obodnom kutu odmah slijedi da je $\angle O = \frac{\alpha}{2} = 24^\circ$.

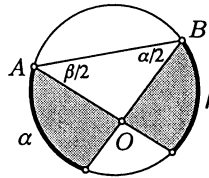
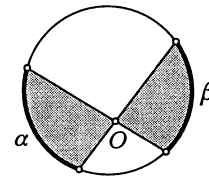




Rješavanje sličnih zadataka 2. i 3. odvest će nas prema daljnjem poopćenju našega poučka.

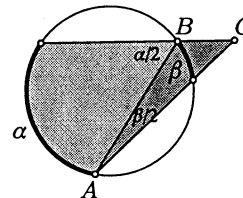
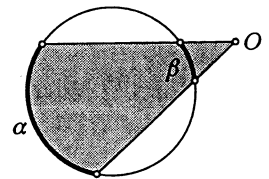
Zadatak 2. Unutar kružnice odabrana je točka O i u njoj vršni kutovi koje ćemo kratko označiti s $\angle O$. Ti kutovi iz kružnice isjecaju lukove s kutnim mjerama α i β . Kako možemo izračunati $\angle O$ ako znamo iznose α i β ?

Rješenje: Povucimo spojnicu AB i uočimo trokut AOB . Iz poučka o obodnom kutu slijedi da je $\angle A = \frac{\beta}{2}$ i $\angle B = \frac{\alpha}{2}$. Budući da je $\angle O$ vanjski kut trokuta AOB , kojemu su $\frac{\alpha}{2}$ i $\frac{\beta}{2}$ suprotni unutarnji kutovi, slijedi da je $\angle O = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$.



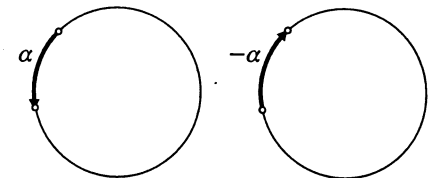
Zadatak 3. Izvan kružnice odabrana je točka O i u njoj vršni kut koji ćemo kratko označiti s $\angle O$. Taj kut iz kružnice isjeća lukove s kutnim mjerama α i β . Kako možemo izračunati $\angle O$ ako znamo iznose α i β ?

Rješenje: Povucimo spojnicu \overline{AB} i opet uočimo trokut AOB . Sada je $\frac{\alpha}{2}$ vanjski kut toga trokuta, a $\frac{\beta}{2}$ i $\angle O$ su njemu suprotni unutarnji kutovi. Dakle, $\frac{\alpha}{2} = \angle O + \frac{\beta}{2}$, tj. $\angle O = \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$.



Uvođenjem orijentiranih kutova, koji su pozitivni ako se kružnica obilazi u smjeru obrnutom od kazaljke na satu, a negativni ako se obilazi u suprotnom smjeru, stvari postaju još jednostavnije.

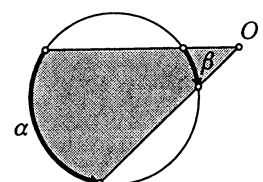
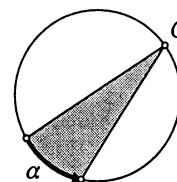
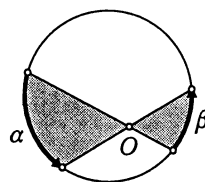
Naime, tada možemo za svaki položaj točke O reći da vrijedi $\angle O = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$, i to je naše konačno poopćenje Talesovog poučka.



Ako $\angle O$ iz kružnice isjeća orijentirane lukove α i β , onda je

$$\angle O = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$$

(Primijetite da jedan od lukova može imati 0° , kao na srednjoj slici gdje je $\beta = 0^\circ$.)



[1] L. Krnić, Z. Šikić: Matematika 7, udžbenik za 7. razred osnovne škole, Profil, 2001.

