

AKSIOMATIZACIJA PRIRODNIH BROJEVA

ZVONIMIR ŠIKIĆ, Zagreb

1. Izgleda da, prije ili kasnije, sva matematička znanja postaju predmetom aksiomatske metode.

Često se smatra da tek time ta znanja i postaju matematička. Aksiomatika ih organizira u deduktivni sustav, u kojem matematičke tvrdnje logički slijede iz sigurnog i trivijalno istinitog temelja, tj. iz sigurnih i trivijalno istinitih aksioma. Tek deduktivno dobivena matematička znanja imaju onu sigurnost koja ih čini matematičkima.

Pri tom postoje dvije pretpostavke. Prva je trivijalno uviđanje istinitosti aksioma neposrednom intuicijom predmeta koji se razmatra. Druga je intuicija općih zakona mišljenja tzv. logička intuicija, po kojoj je neposredno jasno da slijedom zaključaka iz istinitih aksioma dobivamo istinite posljedice. Druga pretpostavka je pretpostavka svake deduktivne znanosti. Prva pretpostavka je pretpostavka sadržajne aksiomatike. Ta aksiomatika ne smatra svojim zadatkom uspostavljanje veza između proizvoljno odabranih aksioma i njihovih posljedica, kako to smatra postulacijska aksiomatika. Ona aksiome smatra istinitim tvrdnjama iz kojih izvodi istinite tvrdnje. Kao tipičan primjer sadržajne aksiomatike stoljećima se spominje Euklidova geometrija. Istinitost Euklidovih aksioma neposredno je i trivijalno jasna, a njegovi nas zaključci od tih aksioma sigurno vode prema geometrijskim istinama. Novija težnja, da se svi ili većina matematičkih aksiomatskih sustava smatra postulacijskim, proizvod je novog shvaćanja čiste matematike.¹

Počeli smo ovaj članak s konstatacijom da prije ili kasnije, sva matematička znanja postaju predmetom aksiomatske metode. Je li baš sasvim nevažno da se s geometrijom to dogodilo dva tisućljeća ranije nego s aritmetikom? Je li to samo nevažna povijesna činjenica, ili ta činjenica baca neko svjetlo na aksiomatsku metodu?

Izgleda da su razlozi kasne aksiomatizacije aritmetike prilično jasni i da bar djelomično pobijaju prethodni opis aksiomatske metode. Naime, pojam prirodnog broja i upotreba aritmetičkih operacija toliko su jasni da nije bilo nikakve potrebe da se još jasnije ekspliciraju upotrebom aksioma. Intuicija prirodnog broja dovoljno je čvrsta osnova aritmetike. Intuicija prostora (zor) bila je naprotiv teško po'juljana učenjem Elejaca,² koji su je doveli u pitanje *dokazujući* nemogućnost djeljivosti prostora, nemogućnost protežnosti i nemogućnost mnoštva. Još je veći udar došao s *dokazom* nesumjerljivosti stranice i dijagonale kvadrata. Grčka misao je

¹ O novom shvaćanju čiste matematike usp. [Š1] i [Š2].

² Usp. [S].

prihvatila logičku argumentaciju, tj. dokazivanje, kao vrhovnu arbitražu u pitanjima znanosti. Prihvaćajući kritiku intuicije prostora u širem okviru kritike opažanja, ona je u toj intuiciji nadredila deduktivnu geometriju kojom vlada logičko argumentiranje. U tom kontekstu aksiomi nisu sigurno i trivijalno istiniti. Naime, iako vjeruju svojim osnovnim prostornim intuicijama, grčki geometri moraju odgovoriti na izazov (navodnog) logičkog pobijanja ovih intuicija. Zato oni te intuicije ugrađuju u deduktivni sustav geometrije kao aksiome, koje tek trebaju iskušati i opravdati tako što će iz njih *deducirati* intuitivno prihvatljiv i *logički konzistentan* sustav geometrije. Tek u okviru ovoga sustava aksiomi se potvrđuju zadobijajući sigurnost višeg, logičkog reda.

Kako je aritmetika ipak aksiomatizirana? Zar je polovicom 19. st. poljuljana sigurnost intuitivnog poimanja prirodnog broja? Nije! Podrijetlo aksiomatike ne iscrpljuje sve njezine mogućnosti i ciljeve. Aksiomatska metoda, jednom nastala, pokazala se prikladnim sredstvom za ispitivanje logičkih odnosa bilo kojeg znanja, varljivog ili ne. Naravno, aksiomatska metoda s takvim užim ciljem, prestaje biti nezaobilaznim zahtjevom osiguravanja samih temelja znanosti. Njena primjena ovisit će više o tehničkom razvoju same aksiomatske metode, a manje o zahtjevima predmeta na koji se ona primjenjuje. To će biti tako naročito tamo gdje je intuicija samog predmeta dovoljno čvrsta osnova znanja o njemu, a tako jest u aritmetici. Tu će se aksiomatizacija svesti na izdvajanje osnovnih aritmetičkih pojmova dovoljnih za izgradnju deduktivnog sustava aritmetike i na samu tu izgradnju, što kratko možemo nazvati logičkim oblikovanjem aritmetike. Takva je aksiomatizacija provedena u toku druge polovice 19. stoljeća, a poznata je kao Peanova aksiomatizacija prirodnih brojeva.³

2. Dva su izvora Peanove aksiomatizacije prirodnih brojeva. On sam kaže da je aksiome preuzeo od Dedekinda⁴, a da se izgrađujući deduktivni sustav aritmetike (koji je utemeljen tim aksiomima) obilato služio Grassmannovim radom.⁵

Grassmannov pristup je tipična primjena aksiomatske metode kao prikladnog sredstva za ispitivanje logičkih odnosa unutar neke teorije, u ovom slučaju unutar aritmetike. Grassmann je izdvojio osnovne aritmetičke pojmove dovoljne za izgradnju deduktivnog sustava aritmetike i izgradio osnovne elemente toga sustava. (Tema njegova rada su zapravo cijeli brojevi, ali je lako uočiti kako se njegova metoda može prilagoditi izgradnji teorije prirodnih brojeva.) Međutim, Grassmannova prezentacija nije aksiomatska u doslovnom smislu riječi. H. Wang, ipak je pokazao kako se ona bez ikakvih teškoća može „čitati” kao prava aksiomatizacija (usp. [W]). Mi ćemo je ovdje prikazati u toj Wangovoj rekonstrukciji.

Osnovni (nedefinirani) pojmovi kojima Grassmann zasniva aritmetiku cijelih brojeva su:

- (I) cijeli broj i i istaknuti cijeli broj 1 ,
- (II) biti pozitivan,
- (III) binarna relacija $=$, binarne operacije $+$ i \cdot i unarna operacija $-$ (unarna operacija $-$ primjenjuje se samo na istaknuti broj 1 , usp. (IV), a općenito se definira usp. (V)).

³ Prvi je put nalazimo u [P].

⁴ Točnije, iz njegovog eseja [D].

⁵ Točnije, radom [G].

Istaknuti cijeli broj 0, svojstvo „biti negativan” i relacija „biti veći od” pojmovi su koji se definiraju na slijedeći način:

$$(IV) 0 = 1 + (-1)$$

$$(V) a - b \text{ je broj za koji vrijedi } b + (a - b) = a \text{ (posebno, } -a = 0 - a)$$

$$(VI) a > b \text{ znači da je } a - b \text{ pozitivan.}$$

Grassmannovi aksiomi su:⁶

$$(1) a = (a + 1) + -1 \quad a = (a + (-1)) + 1$$

$$(2) a + (b + 1) = (a + b) + 1$$

$$(3) a \cdot 0 = 0$$

$$(4) \text{ Ako je } b = 0 \text{ ili je } b \text{ pozitivan, tada je } a \cdot (b + 1) = a \cdot b + a.$$

$$(5) 1 \text{ je pozitivan broj.}$$

$$(6) \text{ Ako je } a \text{ pozitivan, onda je } a + 1 \text{ pozitivan.}$$

$$(7) \text{ Ako je } b \text{ pozitivan, onda je } a \cdot (-b) = -(a \cdot b).$$

$$(8) \text{ Ako } 1 \text{ ima svojstvo } S \text{ i ako za svaki } b \text{ vrijedi: } b + 1 \text{ ima svojstvo } S \text{ ako } b \text{ ima svojstvo } S \text{ i } b + (-1) \text{ ima svojstvo } S \text{ ako } b \text{ ima svojstvo } S, \text{ tada svaki } a \text{ ima svojstvo } S.$$

$$(9) \text{ Ako } 1 \text{ ima svojstvo } S \text{ i ako za svaki } b \text{ vrijedi: } b + 1 \text{ ima svojstvo } S \text{ ako } b \text{ ima svojstvo } S, \text{ tada svaki pozitivni } a \text{ ima svojstvo } S.$$

Lako ćete uočiti da su aksiomi (1) i (2) rekurzivna pravila za zbrajanje, dok su aksiomi (3) i (4) rekurzivna pravila za množenje. (Ta se pravila prvi puta pojavljuju kod Grassmanna.) Aksiom (9) je aksiom potpune indukcije, dok je aksiom (8) aksiom potpune indukcije za cijele brojeve.

Grassmann je koristeći se svojim aksiomima dokazao ove tvrdnje:

$$(10) a + (b + c) = (a + b) + c$$

asocijativnost zbrajanja

$$(11) a + b = b + a$$

komutativnost zbrajanja

$$(12) a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

asocijativnost množenja

$$(13) a \cdot b = b \cdot a$$

komutativnost množenja

$$(14) a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

distributivnost množenja u odnosu prema zbrajanju

$$(15) a + 0 = a$$

neutralnost nule u odnosu prema zbrajanju

$$(16) a \cdot 1 = a$$

neutralnost jedinice u odnosu prema množenju

$$(17) a + (-a) = 0$$

invertibilnost zbrajanja

$$(18) \text{ Ako je } c \neq 0 \text{ i } c \cdot a = c \cdot b, \text{ tada je } a = b.$$

⁶ Naravno, to su **aksiomi** u Wangovoj rekonstrukciji.

- (19) Ako je a pozitivan broj i ako je b pozitivan broj, tada je i $a + b$ pozitivan broj.
- (20) Ako je a pozitivan broj i ako je b pozitivan broj, tada je i $a \cdot b$ pozitivan broj.
- (21) Ili je a pozitivan broj, ili je $-a$ pozitivan broj, ili je $a = 0$.

Odmah uočavamo da su tvrdnje (9)–(21) suvremena algebarska aksiomatizacija dobro uređenog područja cijelih,⁷ koja do izomorfizma karakterizira cijele brojeve. Grassmann je bio prvi koji je osnovna svojstva ove strukture izveo iz rekursivnih pravila za zbrajanje i množenje koristeći se indukcijom. Možemo reći da je Grassmann preteča suvremene algebarske karakterizacije cijelih brojeva.

Peanova aksiomatizacija ide korak dalje. On deduktivni sustav aritmetike temelji na samo tri osnovna pojma:

- (I) prirodan broj,
- (II) sljedbenik i
- (III) istaknuti prirodni broj 1 .

Ostale aritmetičke pojmove (npr. zbrajanje i množenje) on može definirati, a njihova najvažnija svojstva (npr. Grassmannova rekursivna pravila) dokazati pomoću ovih tzv. Peanovih aksioma:

- (P1) 1 je prirodni broj.
- (P2) Sljedbenik svakog prirodnog broja je prirodni broj.
- (P3) Nikoja dva prirodna broja nemaju istog sljedbenika.
- (P4) 1 nije sljedbenik nijednog prirodnog broja.
- (P5) Svako svojstvo koje pripada prirodnom broju 1 , i sljedbeniku svakog prirodnog broja koji ima to svojstvo, pripada svim prirodnim brojevima.

Međutim, rekli smo da je Peano svoje aksiome preuzeo od Dedekinda (Grassmannovim radom koristio se izgrađujući deduktivni sustav aritmetike nakon što je dokazao Grassmannove aksiome).

Što je Peano preuzeo od Dedekinda? Relevantni Dedekindov rad je „Was sind und was sollen die Zahlen“ iz 1888. godine (usp. [D]), u kojem on uvodi pojam lanca kao pojam koji je temelj aritmetike:

Neki sistem (u današnjoj terminologiji skup) je lanac, u odnosu na neko preslikavanje, ako se taj sistem tim preslikavanjem preslikava u samog sebe. Lanac generiran nekim elementom presjek je svih lanaca koji sadrže taj istaknuti element. Sistem prirodnih brojeva \mathbf{N} definira se kao lanac generiran istaknutim elementom 1 , u odnosu na neko slično (danas kažemo injektivno) preslikavanje s , koje nijedan element sistema \mathbf{N} ne preslikava u istaknuti element 1 .

Drugim riječima, Dedekind kao temelje aritmetike postavlja ova četiri uvjeta, koja mora zadovoljavati sistem prirodnih brojeva N (usp. [D] str. 54):

$$\alpha. s(\mathbf{N}) \subseteq \mathbf{N}$$

(\mathbf{N} je lanac u odnosu na preslikavanje s .)

$$\beta. \mathbf{N} = \bigcap \{M : 1 \in M \ \& \ s(M) \subseteq M\}$$

(\mathbf{N} je lanac generiran istaknutim elementom 1 .)

⁷ Za uređeno područje cijelih (tj. uređenu integralnu domenu) kažemo da je dobro uređeno ako mu je podskup pozitivnih elemenata dobro uređen.

$$\gamma. 1 \notin s(\mathbf{N})$$

(Istaknuti element 1 nije slika nijednog elementa sistema \mathbf{N} .)

$$\delta. s(m) = s(n) \rightarrow m = n$$

(Preslikavanje s je slično.)

S obzirom da je β definicija sistema \mathbf{N} , vidimo da su Dedekindovi osnovni (nedefinirani) pojmovi: preslikavanje s , istaknuti element 1 i elementarni pojmovi teorije skupova. Sve ostale aritmetičke pojmove $+$, \cdot , $>$ itd. Dedekind je definirao pomoću ovih osnovnih pojmova i dokazao njihova najvažnija svojstva (npr. Grassmannova pravila za $+$ i \cdot , tranzitivnost, irefektivnost i povezanost od $>$ itd.). Budući da je α trivijalna posljedica od β , možemo reći da je Dedekind pokazao kako se u okviru teorije skupova može definirati sistem prirodnih brojeva (usp. β), pod pretpostavkom postojanja nekog preslikavanja s koje je slično (usp. δ) i koje u odnosu na neki istaknuti objekt 1 ima svojstvo γ . U tom smislu, Dedekind nije samo aksiomatizirao aritmetiku nego ju je i reducirao na teoriju skupova. To je uostalom i bila njegova osnovna nakana. On i nije posebno isticao da su svojstva α , β , γ i δ aksiomi aritmetike. Međutim, odmah uočavamo da je α upravo Peanov aksiom P2, da je γ Peanov aksiom P4, δ Peanov aksiom P3, kao i to da Peanovi aksiomi P1 i P5 trivijalno slijede iz β . Što se tiče zadnje tvrdnje usporedite

$$\beta. \mathbf{N} = \cap \{M : 1 \in M \ \& \ s(M) \subseteq M\}$$

s ovom jednostavnom preformulacijom Peanovog aksioma P5

$$\mathbf{N} \subseteq \cap \{M : 1 \in M \ \& \ s(M) \subseteq M\}.$$

Napomena:

Sretna je okolnost da je do danas sačuvano autentično Dedekindovo svjedočanstvo o tome kako je došao do svojih aksioma. Riječ je o Dedekindovom pismu Kefersteinu iz 1890. ([DK]). Iz pisma saznajemo da je Dedekind najprije uočio da iz uvjeta

$$1 \in \mathbf{N}, \ s(\mathbf{N}) \subseteq \mathbf{N}, \ s \text{ je sličnost i } 1 \notin s(\mathbf{N})$$

lako slijedi da *nizom* primjena operacije s , polazeći od broja 1, dobivamo sve prirodne brojeve. Veliki i osnovni problem njegove analize bilo je nalaženje onog uvjeta koji bi, bez poziva na aritmetičku intuiciju *niza* brojeva, opisao naše razumjevanje spomenutog *niza* primjena operacije s . Taj uvjet je uvjet β a Dedekind ga je, kako izvještava u pismu, pronašao nakon dugih razmišljanja.

Tako je nastala poznata aksiomatizacija prirodnih brojeva koju je preuzeo Peano i koju bismo trebali točnije zvati Dedekindovom ili barem Dedekind-Peanovom, kada bi nam to naše dugogodišnje navike dozvoljavale. O mnogim manje-više trivijalnim preformulacijama te aksiomatizacije nećemo govoriti. Spominjemo samo jednu, onu u kojoj je osnovni pojam 1 eliminiran (kao osnovni pojam). Ta aksiomatizacija ima svega dva osnovna pojma; prirodni broj i funkciju sljedbenika, a njeni su aksiomi

$$s1. (\exists ! m) (m \in \mathbf{N} \setminus s(\mathbf{N}))$$

$$s2. s(m) = s(n) \rightarrow m = n$$

$$s3. (\mathbf{N} \setminus s(\mathbf{N}) \subseteq M \ \& \ s(M) \subseteq M) \rightarrow \mathbf{N} \subseteq M$$

Ta u biti Dedekind-Peanova aksiomatizacija ima funkciju sljedbenika s kao jedini⁸ nedefinirani pojam.

Drugi tip aksiomatizacije, koji ćemo sada prikazati, uzima uređaj prirodnih brojeva za svoj osnovni pojam. Od Cantorova uvođenja teorije ordinala i dobro uređenih skupova (u [C]) poznato je da prirodni brojevi čine početni segment ordinala određen drugim graničnim ordinalom. Iz te Cantorove perspektive moguće je i definirati prirodne brojeve u okviru teorije skupova, kako je to učinio von Neumann.⁹ Kao u Dedekindovom slučaju, i u Cantor-von Neumannovoj definiciji prirodnih brojeva implicite je sadržana jedna njihova aksiomatizacija. Njen osnovni pojam je relacija $>$, a aksiomi su joj

- $>$ 1. $(\forall n) (\exists m) (m > n)$,
- $>$ 2. $(\exists ! m) (m \in \mathbf{N} \setminus \triangleright (\mathbf{N}))$,
- $>$ 3. relacija $>$ je dobar uređaj,

gdje je $\triangleright (n) = \{m : m \triangleright n\}$ i $m \triangleright n \leftrightarrow m > n \ \& \ \neg (\exists k) (m > k \ \& \ k > n)$.

Napomena:

Iako čitatelj nije naišao na tu aksiomatizaciju prirodnih brojeva, pretpostavimo da će lako provjeriti da ona to jest (ako je upoznat s teorijom dobro uređenih skupova). Uočite da aksiom $>$ 2. postulira postojanje točno jednog graničnog broja tj. točno jednog broja bez neposrednog prethodnika.

Prvi tip aksiomatizacije zvat ćemo s -aksiomatizacijom, a drugi tip $>$ -aksiomatizacijom. Prvi tip ima neposrednog *sljedbenika* kao osnovni nedefinirani pojam, dok drugi tip ima općeg *sljedbenika* kao osnovni nedefinirani pojam. Dakle oba tipa imaju kao osnovni nedefinirani pojam pojam sljedbenika, pa možemo očekivati da im bar neki aksiomi (koji ih implicitno određuju) budu zajednički. Rješavajući ovaj problem u [Š3] pokazali smo da prirodne brojeve možemo aksiomatizirati koristeći se relacijom sljedbenika (bilo neposrednog, bilo općeg) kao osnovnim pojmom kojim ravnaju ova tri zajednička aksioma:

- (z₁) Svaki broj ima sljedbenika.
- (z₂) Samo jedan broj je granični.
- (z₃) Svaki skup brojeva ima minimum.

Nadalje, s -aksiomatizaciju prirodnih brojeva dobivamo dodavanjem aksioma

- (s₄) Sljedbenik je funkcijska relacija.¹⁰

i razumjevanjem ε -aksioma kao s -aksioma. S druge strane, $>$ -aksiomatizaciju prirodnih brojeva dobivamo dodavanjem aksioma

- ($>$ 4) Sljedbenik je povezana relacija.

i razumjevanjem ε -aksioma kao $>$ -aksioma.

Uočite da su ove aksiomatizacije izuzetno reducirane u odnosu na ranije opisanu Dedekind-Peanovu i Cantor-von Neumannovu. Mi za našeg neposrednog

⁸ \mathbf{N} je univerzum aksiomatizacije pa ga kao takvog ne trebamo smatrati osnovnim pojmom.

⁹ Zanimljivo je da to Cantor nije učinio. Za njega su prirodni brojevi kardinalni brojevi konačnih skupova.

¹⁰ Ovu aksiomatizaciju nalazimo u [DV]. Već je tu na drugačiji način dokazana zavisnost injektivnosti.

sljedbenika s ne zahtijevamo injektivnost (možemo je dokazati), a za našeg općeg sljedbenika $>$ ne zahtijevamo da je uređaj (i to možemo dokazati). Točniju eksplicijaciju i sve relevantne dokaze možete naći u [Š3].

LITERATURA

- [C] Cantor G., *Grundlegen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, 1883.
- [D] Dedekind R., *Was sind und was sollen die Zahlen*, 1888. (Šta su i čemu služe brojevi, Mat. inst. Beograd 1976)
- [DK] Dedekind R., *Pismo H. Kefersteinu od 9. 2. 1890*, pohranjeno u *Niedersächsische Staats und Universitätsbibliothek (Cod. Ms Dedekind 13)*.
- [DV] Devide V., *Ein Axiomensystem für die natürlichen Zahlen*, Arch. d. Math. Vol. VI, 1955.
- [G] Grassmann H., *Lehrbuch der Arithmetik*, 1861.
- [P] Peano G., *Arithmetices principia*, Torino 1889.
- [S] Szabo A., *The beginnings of Greek mathematics*, Reidel, 1978.
- [Š1] Šikić Z., *O razlici čiste i primijenjene matematike u svijetlu matematičkog postojanja*, Matematički vidici 3, Mat. inst. Beograd 1979.
- [Š2] Šikić Z., *Formalna logika i aritmetika*, u knjizi Brojevi, Školska knjiga, Zagreb 1985.
- [W] Wang H., *The axiomatization of arithmetic*, Journal of Symbolic Logic, 22, 1957.
- [Š3] Šikić Z., *Axiomatizations of natural numbers*, pripremljeno za tisak.
-