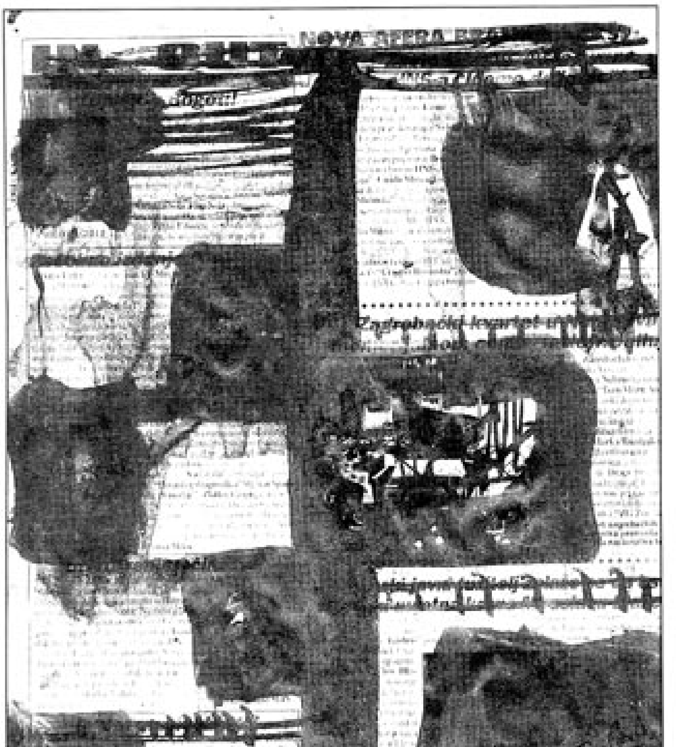
ALAN MATHISON TURING I POJAM IZRAČUNLJIVOSTI

ZVONIMIR ŠIKIĆ
(Sveučilište u Zagrebu)

UDK 51.01
Izvorni znanstveni članak
Primljeno 17. srpnja 1998.



I.

Gotovo istovremeno, 1936. godine, pojavilo se nekoliko nezavisnih definicija naizgled nejasnoga pojma izračunljivosti, u radovima Emila L. Posta, Alonza Churcha, Stephena C. Kleenea i Alana M. Turinga (/P/, /C/, /K/ i /T/). Sve te definicije kasnije su se pokazale ekvivalentnima. Church, Kleene i Turing iskoristili su svoje definicije kako bi dokazali da postoje precizno definirani matematički problemi koji nisu rješivi, svodeći ih na izračunavanje precizno definiranih matematičkih funkcija koje nisu izračunljive. Church i Turing dokazali su da je slavni i u to vrijeme intenzivno rješavani Hilbertov *Entscheidungsproblem* jedan takav problem, pa se stoga svi koji ga pokušavaju riješiti bave uzaludnim poslom.

Što je motiviralo matematičke logičare ranih tridesetih godina da tragaju za definicijom izračunljivosti? Potpuno je jasno da su osnovne aritmetičke funkcije +, –, · i :, kao i sve funkcije koje nastaju njihovim kombiniranjem, izračunljive. Postupak njihova izračunavanja jedan je od temelja elementarnog obrazovanja već nekoliko tisuća godina. Skoro je jednako stara i ideja o računskom stroju. Štoviše, Leibniz je pred više od 300 godina sanjao o računskom stroju opće namjene (u vezi s njegovom temeljnom idejom o redukciji svake argumentacije, čak i svakog razmišljanja na računanje). Zamislivši pred više od 150 godina svoj »analitički stroj« (*Analytic Engine*), koji programiran bušenim karticama može računati bolje od svakog čovjeka, Babbage je prvi navijestio kako bi se Leibnizov san mogao ostvariti. Babbage je također shvatio da je svako računanje zapravo kombinacija i *iteracija* jednostavnih aritmetičkih operacija, te da broj iteracija treba kontrolirati testiranjem određenih uvjeta. On je čak ustvrdio da se svaki zamislivi račun u načelu može obaviti strojem koji izvodi osnovne računske operacije, kombinira ih i uvjetno iterira. Danas znamo da je bio u pravu.

Iako njegov rad nije bio potpuno zaboravljen, njegov teorijski značaj nikada nije bio velik, jer je najčešće bio zamagljen pitanjima *hardwarea*, koja je Babbage razmatrao ne odvajajući ih od pitanja *softwarea*. U svakom slučaju, sa sigurnošću se može reći da matematički logičari, kojih je rad bio značajan za otkrića iz 1936. (Dedekind, Frege, Hilbert, Gödel, Herbrand...) nisu poznavali Babbageove ideje.

Matematički, logički i filozofski značaj iteracije kao izvora prirodnih brojeva i računanja s njima potpuno su razumjeli Dedekind i Frege (usp. /Š11/ str. 113 – 127). Dedekind je 1888. dao logičko opravdanje iterativnih definicija ili kako ih on zove induktivnih definicija. Uskoro će se one zvati rekurzivnima, a za rekurzivno definirane funkcije ustalit će se naziv rekurzivne funkcije. (Iako je upotreba rekurzija u računanju stara bar koliko i Euklidov algoritam, naziv se koristi tek od dvadesetih godina.) Hilbert je 1926. proširio upotrebu termina rekurzija na ono što danas zovemo transfinitnim rekurzijama, potaknut činjenicom da je Ackerman 1925. godine dokazao kako jedna konkretna transfinitno rekurzivna funkcija, nije rekurzivna u užem smislu, iako je izračunljiva. Tek se 1934. pojavio termin primitivno rekurzivna funkcija, za rekurzivne funkcije u osnovnome neproširenom smislu. Njihovu konačnu definiciju i teoriju dao je Gödel 1931. godine, u svome epohalnom radu o nepotpunosti, tada još pod nazivom rekurzivnih funkcija.

Dakle, početkom tridesetih godina unutar skupa transfinitno rekurzivnih funkcija, koji obuhvaća sve funkcije, kako izračunljive tako i neizračunljive, jasno se isticao skup primitivno rekurzivnih funkcija koje su izračunljive, ali ne uključuju sve izračunljive funkcije. Prirodno se nametnulo pitanje proširenja skupa primitivno rekurzivnih funkcija na preostale izračunljive funkcije. Herbrand u pismu upućenom Gödelu 1931. godine predlaže definiciju jednog takva proširenja, koju Gödel modificira i tako 1934. dolazi do definicije Herbrand-Gödelovih rekurzivnih funkcija. Riječ je o skupu izračunljivih funkcija koji proširuje skup primitivno rekurzivnih funkcija. Obuhvaća li on sve izračunljive funkcije, nije u tom trenutku bilo jasno. Sam Gödel nije vjerovao da bi to moglo biti istinito, iako danas znamo da jest.

Svi dosada spomenuti pristupi pojmu izračunljivosti imaju motivaciju koju bismo mogli nazvati *pozitivnom*. Babbage želi strojno računati što više matematički zanimljivih funkcija. Dedekind i Frege žele logički definirati prirodne brojeve i računske operacije s njima (usp. /Š1/ str. 113 – 127 i /Š1/ str. 45 – 48). Hilbert i njegova škola traže konkretni računski (tzv. finitni) temelj svoje metamatematike, s pomoću koje žele opravdati standardnu transfinitnu matematiku, i što je taj temelj uži, to je opravdanje, ako se do njega dođe, bolje (usp. /Š2/ str. 49 – 58). Herbrand želi revitalizirati Hilbertov program, nakon što je on gotovo uništen Gödelovim teoremima o nepotpunosti iz 1931. (usp. /Š3/ i /Š1/ str. 155 – 170), tako što će proširiti finitni temelj metamatematike na način koji predlaže u spomenutom pismu Gödelu iz 1931. godine. Sam je Gödel za izvod svojih slavnih teorema o nepotpunosti trebao dokazati da su osnovni pojmovi i relacije formalizirane aritmetike odlučivi, tj. da su njima odgovarajuće funkcije izračunljive. U tu je svrhu definirao primitivno rekurzivne funkcije, razvio njihovu teoriju i dokazao da su spomenuti pojmovi, relacije i njima odgovarajuće funkcije čak primitivno rekurzivne (usp. /Š3/).

U okviru takvih razmatranja moglo se pojaviti i pitanje skupa svih izračunljivih funkcija, ali ono nije presudno za ta razmatranja. Da bismo se bavili bilo kojim od gore spomenutih problema, nije potrebno znati što su *sve* izračunljive funkcije. To je potrebno ako je naš pristup izračunljivosti *negativno* motiviran, tj. ako želimo dokazati da neka funkcija *nije* izračunljiva, odnosno da njoj odgovarajući problem nije rješiv. Upravo je takva motivacija dovela do značajnih otkrića objavljenih 1936. godine.

Klasični je problem toga tipa problem rješivosti diofantskih jednadžbi. U Hilbertovoj formulaciji iz 1900. godine, otkada se problem zove deseti Hilbertov problem, on glasi ovako: *Nađi postupak kojim će se u konačnom broju koraka moći odlučiti ima li viševarijabilni polinom s cjelobrojnim koeficijentima cjelobrojne nultočke.*

Budući da se polinomi s cjelobrojnim koeficijentima mogu kodirati prirodnim brojevima, npr. tako da se efektivno poredaju u niz

$$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \ldots$$

problem se zapravo svodi na izračunavanje funkcije:

$$H(n) = \begin{cases} 1 \text{ ako } P_n \text{ ima cjelobrojnih nultočaka} \\ 0 \text{ ako } P_n \text{ nema cjelobrojnih nultočaka} \end{cases}$$

Riješiti deseti Hilbertov problem zapravo znači naći postupak za izračunavanje funkcije $H(n)$. Naravno, ako mislimo da takav postupak ne postoji (dakle, ako smo negativno motivirani), to moramo dokazati tako da dokažemo da funkcija $H(n)$ nije izračunljiva. Ali tada moramo znati što znači da je funkcija izračunljiva.

Njemački izraz za problem odlučivanja – *Entscheidungsproblem* – uobičajio se početkom stoljeća za specifični problem odlučivanja logičke valjanosti propozicija, ili njemu ekvivalentni problem logičkoga slijeda. Budući da se propozicije određene logičke forme mogu kodirati prirodnim brojevima, npr. tako da se efektivno poredaju u niz

$$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, \ldots$$

Entscheidungsproblem (za tu logičku formu) svodi se na izračunavanje funkcije:

$$V(n) = \begin{cases} 1 \text{ ako je } p_n \text{ valjana propozicija} \\ 0 \text{ ako } p_n \text{ nije valjana propozicija} \end{cases}$$

Ekvivalentni problem, za logički slijed, svodi se na izračunavanje funkcije dviju varijabli:

$$S(m, n) = \begin{cases} 1 \text{ ako iz } p_m \text{ logički slijedi } p_n \\ 0 \text{ ako iz } p_m \text{ logički ne slijedi } p_n \end{cases}$$

Za neke je logičke forme *Entscheidungsproblem* pozitivno riješen. Naprimjer, standardni račun s tablicama istinosnih vrijednosti zapravo je postupak za izračunavanje funkcija V i S za istinosno-funkcionalne logičke forme. Löwenheimova analiza monadskih formi logike 1. i 2. reda iz 1915. godine sadrži postupke za izračunavanje funkcija V i S za te forme. Do još jednostavnijeg postupka, za iste logičke forme, došao je Skolem 1919. i nezavisno Behmann 1922. Međutim, *Entscheidungsproblem* za poliadske logičke forme (dakle za logiku relacija, a ne samo svojstava) bio je početkom tridesetih godina jedan od osnovnih još uvijek neriješenih logičkih problema. Njegovo pozitivno rješenje omogućilo bi, prema Löwenheimu 1915. i Behmannu 1922., rutinsko rješavanje matematičkih problema, s obzirom na tada već standardne formalizacije klasične matematike u okviru logike poliadskih formi, tj. u okviru kvantifikacijske logike svojstava i relacija (usp. /Š1/ str. 111 – 170). (To je, naravno, samo teorijski točno, budući da nađeni postupak odlučivanja možda zahtijeva praktički neraspoloživo vrijeme, prostor, energiju, ...)

Hilbert i njegova škola očekivali su pozitivno rješenje jer su s jedne strane bili ohrabreni parcijalnim rezultatima Löwenheima i Behmanna, dok su s druge čvrsto vjerovali u rješivost svih matematičkih problema. Hilbert je 5. 9. 1930. na kraju svojeg predavanja u Königsbergu samouvjereno izjavio: »(...) ein unlösbares Problem überhaupt nicht gibt. Statt der törichten Ignorabimus heisse ich im Gegenteil unsere Lösung: Wir müssen wissen, Wir werden wissen.«

Zadnja rečenica uklesana je u nadgrobnu ploču njegova groba (što potiče dodatna razmišljanja). Naravno, Hilbert je znao za negativna »rješenja« klasičnih problema duplikacije kocke, kvadrature kruga i rješivosti jednadžbi stupnja većeg od četiri. No u svim tim slučajevima ustanovljeno je odsustvo unaprijed jasno limitiranog postupka: nemogućnost konstrukcije *ravnalom i šestarom* u prva dva slučaja i nemogućnost rješavanja jednadžbi pomoću *radikala* u trećem slučaju. U slučaju *Entscheidungsproblema* nema takvih ograničenja. Dopušten je *bilo koji* postupak; a kako je uopće moguće zamisliti odsustvo *bilo kojeg* postupka.

II.

Ipak, bilo je onih koji su mogli zamisliti baš to, dakle onih koji su prema našoj osnovnoj podjeli negativno motivirani. Brouwer je početkom stoljeća odbacio zakon isključenja trećeg (*tertium non datur*), koji, gledano konstruktivistički, počiva na pretpostavci o nepostojanju nerješivih matematičkih problema. Za Brouwera, nasuprot Hilbertu, bilo je nedvojbeno da su mnogi matematički problemi nerješivi. Post je dvadesetih godina egzaktno došao do istoga zaključka, iako je to objavio tek 1936. (usp. gore). Von Neumann je 1927. iznio mišljenje da je *Entscheidungsproblem* za poliadske forme nerješiv, zato što bi njegovim rješenjem matematika postala rutinska djelatnost, što je smatrao apsurdnim. (Ranije smo primijetili da to nije sasvim točno; usp. gore.) Isto je mišljenje 1928. iznio i Hardy. Ipak, sve su to bili osjećaji, uvjerenja i slutnje, osim kod Posta. Nažalost, njegovi su egzaktni rezultati izašli u javnost tek 1936.

Konačna prevaga na negativnu stranu došla je s Gödelovim rezultatima o nepotpunosti iz 1931. godine (usp. /Š3/). Povijesna je ironija da je Gödel znanstvenu javnost upoznao s tim rezultatima 4. 9. 1930., na istome onom skupu u Königsbergu na kojem je Hilbert dan kasnije – 5. 9. 1930. – izrekao svoje »Wir müssen wissen, Wir werden wissen«. Naime, iz Gödelovih rezultata slijedi da za postupak koji rješava *Entscheidungsproblem* za poliadske forme nije moguće, ni u jednome formalnom sustavu aritmetike, dokazati da to čini korektno. To je zapravo značilo da je odlučivost *Entscheidungsproblema* gotovo nevjerojatna. Naravno, trebalo je vremena da se shvate sve posljedice Gödelovih teorema. Razdoblje od 4. 9. do 5. 9. 1930. svakako nije bilo dovoljno Hilbertu, pa možda ni samom Gödelu. Herbrand je 1931. bio jedan od prvih koji je shvatio da »Gödelovi rezultati (...) impliciraju lažnost jedne široko rasprostranjene ideje [o mogućnosti pozitivnog rješenja *Entscheidungsproblema*]«. Uskoro su to razumjeli Church, Kleene, Turing i mnogi drugi matematičari. Sazrelo je vrijeme da se pokuša definirati klasa izračunljivih funkcija, koja će konačno omogućiti da se dokaže *nerješivost Entscheidungsproblema.*

Već smo spomenuli klasu Herbrand-Gödelovih rekurzivnih funkcija, za koje sam Gödel nije bio siguran da obuhvaćaju sve izračunljive funkcije. Znanstvenoj ih je javnosti predstavio u svibnju 1934. na jednom predavanju u Princetonu, kojem su prisustvovali Church i njegov student Kleene. Church je nekoliko godina ranije formulirao svoj λ-račun, koji danas gledamo kao univerzalni programski jezik višega reda, a tada je predložen kao univerzalni logički temelj klasične matematike. (Izgleda da se u prvoj polovici stoljeća svaki veliki logičar morao dokazati stvaranjem bar jednoga sveobuhvatnoga logičkog sustava te vrste.) Kleene je upravo u to vrijeme radio na svojoj disertaciji posvećenoj λ-računu i polako je otkrivao zapanjujuću snagu njegovih definicija. Sve je bliža bila misao da je svaka izračunljiva funkcija λ-definabilna. Kada je Kleene još dokazao da je klasa Herbrand–Gödelovih rekurzivnih funkcija identična klasi λ-definabilnih funkcija, on i Church bili su sigurni. Herbrand–Gödelove rekurzivne funkcije, a to znači i λ-definabilne funkcije, obuhvaćaju sve izračunljive funkcije. Church je tu tezu objavio 1936. u /C/ (ona se naziva Churchovom tezom od 1952. kada ju je Kleene tako nazvao u svojem *Introduction to metamathematics*). Iste godine Kleene je formulirao svoj pojam μ-rekurzivne funkcije (to je ono što danas zovemo rekurzivnim funkcijama) i dokazao njegovu ekvivalentnost s λ-definabilnim i Herbrand–Gödelovim funkcijama. Bilo je nedvojbeno da je pojam izračunljivosti konačno jasno formuliran. Saznavši za ove rezultate i Post je napokon objavio prikaz svoje opće teorije formalnih sustava iz 1920-ih, koja je zapravo teorija izračunljivosti, a za koju se također pokazalo da je ekvivalentna Churchovoj, Herbrand–Gödelovoj i Kleenejevoj teoriji.

Sve spomenute definicije izračunljivosti bile su od strane svojih autora iskorištene za dokazivanje nerješivosti nekih fundamentalnih matematičkih problema. Church je 1933. održao predavanje o Richardovu paradoksu, u kojem je pokazao kako se metodom dijagonalizacije po zadanoj klasi funkcija može dokazati da neka funkcija ne pripada toj klasi. Tu je metodu 1936. (u /C/) primijenio na novodefiniranu klasu izračunljivih funkcija i tako je konačno dokazao nerješivost *Entscheidungsproblema*.

Korektnost ovoga te sličnih Kleenejevih i Postovih rezultata nije upitna. Ipak, nešto slobodnijoj interpretaciji tog rezultata, u obliku: *Nema **postupka** kojim bi se riješio Entscheidungsproblem*, treba prići oprezníje. Naime, λ-račun, Postovi formalni sustavi, Kleenejeve rekurzivne funkcije i druge ekvivalentne teorije definiraju klasu izračunljivih funkcija, a time i klasu (efektivnih) postupaka. Ono što je Church dokazao 1936., jest to da *Entscheidungsproblem* nije rješiv postupcima te klase, *a pored toga postavio je tezu da su postupci te klase zapravo svi mogući postupci*. Argumenti za tu dodatnu Churchovu tezu bili su jaki, ali za mnoge ne i konačni (Gödel naprimjer nije bio potpuno uvjeren). Ponovimo još jednom koji su to argumenti.

(1) Svi poznati postupci obuhvaćeni su Churchovom klasom izračunljivih funkcija!

(2) Klase postupaka definirane na vrlo različite načine i s vrlo različitim početnim motivacijama (λ-definabilnost, Herbrand–Gödelova rekurzivnost, Postovi formalni sustavi itd.) zapravo su iste!

(3) Dijagonalizacija, kojom se obično dokazuje da funkcija ne pripada nekoj klasi, ne može se efektivno provesti po Churchovoj klasi izračunljivih funkcija!

U čemu je problem? Zašto Gödel nije bio potpuno uvjeren? Vjerojatno zato što se do klase svih mogućih postupaka (svih mogućih izračunljivih funkcija) nije došlo direktnom analizom pojma postupka (pojma izračunljivosti), nego indirektnim, zapravo implicitnim putem. Nedostajala je direktna analiza koja bi eksplicitno obrazložila sveobuhvatnost Churchove klase izračunljivih funkcija. Takvu analizu nisu ponudili ni Church ni Kleene. Nju nalazimo tek kod Turinga.

III.

Alan Mathison Turing rođen je u Londonu 1912. godine u obitelji koja je bila tipični predstavnik engleske više srednje klase (usp. /H/). Otac mu je bio službenik engleske kolonijalne administracije u Indiji, a majka kćer glavnoga inženjera željezničke pruge kroz Madras. Roditelji su mu se 1913. godine vratili u Indiju ostavivši jednogodišnjeg Alana i njegova četiri godine starijeg brata na brigu jednomu umirovljenom pukovniku i njegovoj ženi u St Leonardu u Sussexu. (U to su se doba engleski pripadnici više srednje klase s lakoćom odvajali od svoje djece, koristeći se kolonijama dok djeca nisu navršila 8 godina, a zatim sustavom *boarding school* od njihove 8. do 18. godine.)

Alan Turing bio je normalno dijete, na koje je ovo rano iskustvo djelovalo poražavajuće. Teško mucajući, izolirao se u oklop vlastite samodovoljnosti, koju je s vremenom razvio do ekscentričnosti, odbacujući društvenu maskeradu dobroga odgoja kao alternativni i uobičajeni okvir dječje patnje. U *boarding school* bio je raščupano dijete s prstima prljavim od tinte, koje se nije uklapalo. Bio je sramežljiv, bio je usamljen, a mucanje je samo pogoršavalo čitavu stvar. Mladi Turing nije obećavao gotovo ništa. Imao je velikih teškoća s učenjem čitanja i pisanja, dok jednoga dana nije odlučio da želi čitati, pa je jednostavno sam svladao to umijeće za tri tjedna. S 11 godina razvio je pravu strast za organsku kemiju ostajući dječje nevino, gotovo radosno nezainteresiran za sve ostale predmete (npr. u to vrijeme još nije znao pismeno dijeliti). Mladi Turing s 11 godina nije bio sasvim spreman za neku od prestižnih *public schools*.

Srećom, Turingovi su se u to vrijeme vratili iz Indije u ne baš sjajnoj financijskoj situaciji, što je značilo da nisu bili u stanju poslati svoje sinove u neku od prestižnih *public schools*. Tu društvenu sramotu trebalo je izbjeći pod svaku cijenu pa su se Turingovi preselili u Bretanju (čime su dodatno izbjegli plaćanje poreza). Alan je uživao u Francuskoj i u poduci koja nije ujedno značila i odvajanje od obitelji. Njegove uspavane sposobnosti napokon su probuđene, pa su ga s 13 godina uspjeli upisati u Sherborne, relativno prestižnu školu u Dorsetu.

Kada je trinaestogodišnji Alan (krenuvši iz Francuske u svoju novu školu potpuno sam) uplovio u Southampton, dočekao ga je opći štrajk, koji je počeo baš tog dana. Engleska je mirovala, sav je promet bio prekinut. S karakterističnom snalažljivošću mladi je Turing kupio kartu južne Engleske, sjeo na bicikl i nakon gotovo 100 km vožnje stigao u Sherborne kao školski junak. Ipak, raščupani i još k tome mucavi čudaci nisu materijal od kojeg se prave *public school heroes*. Turing je krenuo svojim već uobičajenim, usamljeničkim, putem. Umjesto grupnih sportova, koji su etos svake *public school*, odabrao je trčanje na duge pruge. U Sherborneu je otkrio i svoj duboki interes za matematiku, ali ne kroz predavanja svojih nastavnika, nego kroz vlastiti samostalni studij. Uskoro je čitao o teoriji relativnosti i kriptografiji, iako katkada nije znao ni elementarne stvari iz redovnog programa.

Matematika ga je povezala s nešto starijim dječakom Christopherom Marcomom, najboljim matematičarem u školi. Postali su najbolji prijatelji, no za Turinga se veza razvila u nešto više od prijateljstva. Turing se zaljubio. Otkriće vlastite homoseksualnosti potpuno ga je zbunilo i još više zatvorilo. (U to je doba homoseksualnost bila krivično djelo, zbog kojeg se završavalo u zatvoru.) Iako Christopheru nikada nije otkrio pravu prirodu svojih osjećaja, ta je veza ostala jedna od najdragocjenijih u cijelom Turingovu životu. Rana Christopherova smrt, pri kraju njihova zajedničkog školovanja u Sherborneu, još je jedno traumatsko iskustvo Turingove mladosti.

Nakon uspješnog završetka školovanja u Sherborneu Turing je dobio matematičku stipendiju na King's College u Cambridgeu, gdje je postao brucoš u listopadu 1931. godine. Ranih tridesetih godina Cambridge je bio jedna od vodećih matematičkih i prirodoznanstvenih institucija u svijetu. Tu su bili Dirac, Eddington, Hardy, Whitehead i Russell. Mnogi bjegunci iz Hitlerove Njemačke zaustavljali su se u Cambridgeu na svojem putu za Ameriku. Tako je Turing kao student slušao Schrödingerova predavanja, te kompletne kursove kvantne mehanike i diferencijalnih jednadžbi, koje su držali Born i Courant. Turing je diplomirao 1934., a zahvaljujući svojemu uspješnom radu u teoriji vjerojatnosti, 1935. izabran je (uz preporuku Hardya i Eddingtona) za člana King's Collegea.

Te iste godine odslušao je Newmanova predavanja iz matematičke logike, susrevši se po prvi put s Gödelovim rezultatima iz 1931. godine. U tim predavanjima Turing je prvi put uopće čuo za *Entscheidungsproblem*, da bi na Newmanovo zaprepaštenje gotovo odmah došao do (negativnog) rješenja tog problema. To mu je omogućila njegova lucidna i izravna analiza pojma izračunljivosti. Moglo bi se reći da je Turing uspio u svojoj analizi baš zahvaljujući činjenici da nije poznavao radove glavnih autoriteta u području kojega se tako zdušno prihvatio. Krenuo je od samih početaka, izravno u analizu pojma izračunljivosti, neopterećen tuđim idejama.

IV.

U svojoj analizi pojma izračunljivosti Turing razmatra izračunljive funkcije s pozitivnim cjelobrojnim argumentima, kojih su vrijednosti 0 i 1. On, za razliku od svih svojih suvremenika, ne polazi od pitanja *Što je izračunljiva funkcija?*, nego od pitanja *Što je računanje?*. Njega zanima koji su uopće mogući postupci pomoću kojih se provodi računanje. Da bi odgovorio na to pitanje, Turing analizira postupke računara, tj. apstraktnoga ljudskog bića koje računa. Najprije uočava da ništa ne gubi pretpostavkom da se račun provodi na potencijalno beskonačnoj traci podijeljenoj na kvadratiće, u koje se upisuje po najviše jedan simbol. (Lako je dokazati da se svaki račun u dvodimenzionalnom ili višedimenzionalnom »prostoru kvadratića« može provesti i u jednodimenzionalnome, te da se upisivanje konačnog broja simbola u jedan kvadratić uvijek može reducirati na upisivanje samo jednog kvadratića, podjelom tog kvadratića na konačno mnogo manjih kvadratića.) Razmatrajući osjetilna i misaona ograničenja apstraktnoga ljudskog računara, Turing dolazi do zaključka da postupci koje računar uopće može koristiti tijekom računanja, imaju sljedeća ograničenja:

(1) Postoji konačna gornja ograda na broj simbola koji se mogu upisivati u kvadratiće.

(2) Postoji konačna gornja ograda na broj kvadratića koje računar može uzeti u razmatranje dok u pojedinom trenutku odlučuje što mu je sljedeći korak.

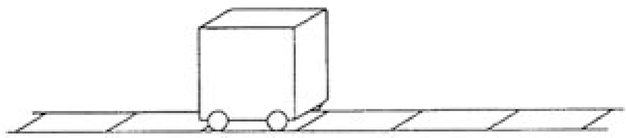
(3) Računar u svakom koraku mijenja sadržaj najviše jednog kvadratića i pritom postoji konačna gornja ograda na udaljenost tog kvadratića od onih kojih je sadržaj uzet u razmatranje (usp. (2)) pri odluci za taj korak.

(4) Postoji konačna gornja ograda na broj računarovih »mentalnih stanja« koja (zajedno sa sadržajem trenutno razmatranih kvadratića; usp. (2)) određuju njegovu sljedeću akciju i njegovo sljedeće mentalno stanje.

Polazeći od ovih ograničenja *Turing je dokazao da se svako računanje, koje provodi apstraktni ljudski računar, može simulirati odgovarajućim Turingovim strojem*, koji je općenito definiran na sljedeći način.

Računanje se provodi na potencijalno beskonačnoj traci podijeljenoj u kvadratiće. Svi kvadratići, osim njih konačno mnogo, prazni su kako početno, tako i u svakome, daljnjem koraku računanja. Ako kvadratić nije prazan, onda je na njemu ispisan točno jedan od konačno mnogo *simbola* $S_1, \ldots, S_n$. Uobičajeno je o praznom kvadratiću misliti kao o kvadratiću na kojem je ispisan »prazni« simbol S_0.

U svakom koraku računanja stroj se nalazi na točno jednom od kvadratića (»promatra« točno jedan kvadratić).



U svakom koraku računanja stroj može izvesti jednu od $n + 4$ akcije:

(1) Zaustaviti se.
(2) Pomaknuti se desno (R).
(3) Pomaknuti se lijevo (L).
(4) Ispisati S_0 na promatranom kvadratiću.
(5) Ispisati S_1 na promatranom kvadratiću.
.
.
.
($n + 4$) Ispisati S_n na promatranom kvadratiću.

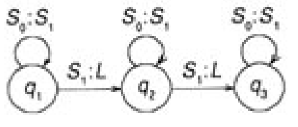
U svakom koraku računanja stroj se nalazi u točno jednom od konačno mnogo (»mentalnih«) *stanja* $q_1, \ldots, q_m$. Biti u jednom od stanja može značiti: imati određeni položaj zupčanika, imati određenu voltažu na određenim mjestima, itd. To nije bitno, jer Turingov stroj nije konkretni stroj, nego je apstraktni stroj.

Turingov stroj zadan je skupom instrukcija koje određuju koju će akciju stroj izvesti kada u stanju q_i promatra simbol S_j, te u koje će stanje potom prijeći. Skup takvih instrukcija može se zadati tablicom, dijagramom toka, nizom četvorki, ili na neki drugi način. Evo jednog primjera:

TABLICA

	S_0	S_1
q_1	S_1q_1	Lq_2
q_2	S_1q_2	Lq_3
q_3	S_1q_3	

DIJAGRAM TOKA



NIZ ČETVORKI

$q_1S_0S_1q_1q_1S_1Lq_2q_2S_0S_1q_2q_2S_1Lq_3q_3S_0S_1q_3$

Ovako zadani Turingov stroj, polazeći s nekoga početnog kvadratića iz početnog stanja q_1, te od nekoga početnog ispisa trake, transformirat će taj ispis u jednom nizu koraka koji će se završiti kada stroj dođe do simbola i stanja za koje nema instrukcije o radu. Jedan takav niz koraka, za gore zadani stroj i početnu konfiguraciju ...00100... izgleda ovako:

...0000100...
1
...0000100...
2
...0001100...
2
...0001100...
3
...0011100...
3

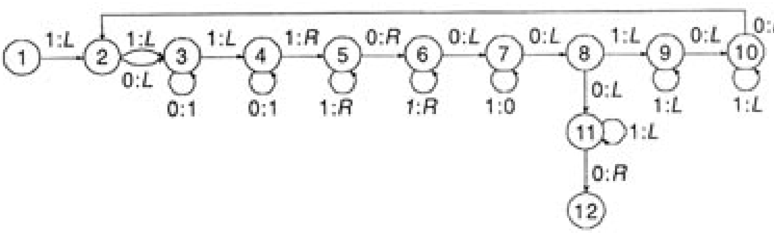
Traka je prikazana nizom simbola 0 i 1, umjesto simbola S_0 i S_1. Broj ispod trake označava stanje u kojem se stroj nalazi (1 označava q_1, 2 označava q_2 itd.). Mjesto na kojem je označeno stanje, ujedno je i mjesto koje stroj promatra u danom trenutku. Stroj završava s radom (zaustavlja se) u zadnjem ispisanom koraku, jer u stanju q_3 promatra simbol S_1, za što nema instrukcije o radu (vidi gornju tablicu, dijagram ili niz).

Za Turingov stroj reći ćemo da računa funkciju f(*n*) ako polazeći od konfiguracije

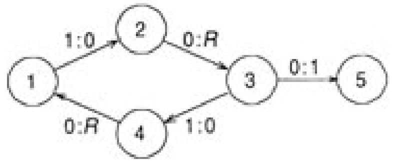
$$\ldots 00\overbrace{1\ldots\ldots1}^{n\ jedinica}00\ldots$$
1

završava rad s konfiguracijom koja sadrži f(*n*) jedinica. U tom smislu gore zadani Turingov stroj računa funkciju f(*n*) = *n* + 2.

Kao još jedan primjer možemo navesti Turingov stroj koji računa funkciju f(*n*) = 2*n*:



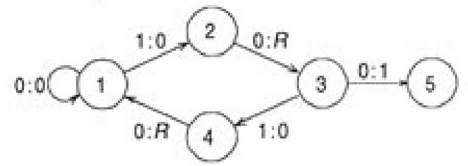
Sljedeći Turingov stroj:



računa funkciju:

$$f(n) = \begin{cases} 1 \text{ ako je } n \text{ neparan} \\ 0 \text{ ako je } n \text{ paran} \end{cases}$$

Važno je uočiti da Turingov stroj ne mora uvijek završiti s radom. Ako stroj primijenjen na neke argumente ne završava s radom, onda taj stroj računa parcijalnu funkciju koja za te argumente nije definirana. Naprimjer, sljedeći Turingov stroj:



računa funkciju:

$$f(n) = \begin{cases} 1 \text{ ako je } n \text{ neparan} \\ \infty \text{ ako je } n \text{ paran} \end{cases}$$

gdje ∞ znači nedefinirano.

Turingova analiza pojma izračunljivosti paradigma je filozofske analize. Ona otkriva da jedan na prvi pogled nejasan pojam ima jednoznačni smisao, te da ga je moguće sasvim precizno definirati. Nakon Turingove analize o izračunljivosti se više ne može raspravljati pozivom na poštapalicu »sve ovisi o tome što pod tim mislite«. To je, uz mnoge druge, uočio i Gödel u /G/: »(…) with this concept one has for the first time succeeded in giving an *absolute* definition of an interesting epistemological notion (…).«

Churchova teza za mnoge nije bila evidentna istina, nego samo plauzibilna hipoteza. Turingovu analizu i definiciju izračunljivosti (Turingovu tezu) više nitko ne dovodi u pitanje. Naravno, time je i Churchova teza postala evidentnom, budući da je dokazivo ekvivalentna Turingovoj (kao što je Turing odmah i dokazao). Čak je i Church u prikazu Turingova rada ustvrdio da Turingov pojam izračunljivosti: »(...) has the advantage of making the identification with effectivness in the ordinary sense evident immediately (...).«

Zapravo, Turingovu analizu možemo promatrati kao dio općeg kretanja, započetog već u 17. stoljeću, prema fizikalnom tumačenju ljudskog mišljenja i ponašanja. Kao desetogodišnjak Turing se istinski oduševio knjigom s naslovom *Natural Wonders Every Child Should Know*, u kojoj je ljudsko tijelo, uključujući i mozak, opisano kao stroj (usp. /H/). Kao zreo čovjek Turing je bio uvjeren da su misaoni procesi, u krajnjoj analizi, posljedice fizikalnih procesa. Ovo uvjerenje nužno ne isključuje dodatnu mogućnost nefizikalnih utjecaja (Turing nije bio dogmatik), no istraživački program koji proizlazi iz jednog takva uvjerenja svakako će pokušati naći ona objašnjenja kojima nisu potrebne takve dodatne pretpostavke. Mnogi *a priori* odbacuju takve pokušaje. Gödel je naprimjer vjerovao da istinsko objašnjenje matematičkog mišljenja mora biti nefizikalno. On je smatrao da naše mišljenje o apstraktnim objektima ne podliježe Turingovim ograničenjima, koja se odnose samo na računanje s potencijalno konkretnim objektima. To su i danas otvorena pitanja, oko kojih se suprotstavljaju pobornici teze o mogućnosti umjetne inteligencije i njezini oponenti.

V.

Nema sumnje da je Turingov rad iz 1936. utjecao i na praktični razvoj programabilnoga digitalnog računala opće namjene. Univerzalni Turingov stroj, koji može simulirati rad bilo kojega Turingova stroja, tako da ovaj (npr. u obliku niza četvorki; usp. gore) postaje program za rad univerzalnoga stroja, zapravo je teorijski prototip programabilnoga digitalnog računala opće namjene (tzv. von Neumannove arhitekture). Naravno, izvori iz kojih se razvilo takvo računalo mnogobrojni su, ali sa sigurnošću možemo reći da je Turing stvorio *teoriju* takvih računala prije stvaranja ijednoga konkretnog računala te vrste. (Turing je konstruirao svoj univerzalni stroj u /T/. Dijagonalizacijom po univerzalnom stroju dokazao je nerješivost *Entscheidungsproblema* i drugih sličnih problema. Obrazloženje ideje dijagonalizacije i njezinu uporabu u dokazima nerješivosti možete naći u /Š1/ str. 104 – 109 i puno detaljnije u /Š4/.)

Sam je Turing 1936. otišao u Princeton, gdje je pod Churchovim vodstvom (prilično frustriran i nezadovoljan) radio na svojem doktoratu. Tu se našao među »besmrtnima«. Na *Institute of Advanced Studies* bili su Einstein, Gödel, von Neumann i ostali. Nažalost, u to vrijeme jedino je von Neumann shvatio značaj mladoga usamljenog Engleza, koji je stvorio čitavo novo područje: *computability*. Von Neumann je jasno razumio teorijske i praktične mogućnosti novog područja. Ipak, nezadovoljan svojim boravkom u Americi, depresivan, gotovo na rubu samoubojstva, Turing odbija von Neumannovu ponudu da s njim surađuje na Institutu i vraća se u Cambridge. Uskoro njegovu akademsku karijeru prekida rat. Poslan je u Bletchley Park, sto kilometara sjeverno od Londona, gdje je preuzeo vodstvo nad kontraobavještajnom grupom koja je trebala razbiti najznačajniji obavještajni sustav nacističke Njemačke.

Vojska nije bila spremna za Turinga, koji se razvio u pravoga, Cambridgeskog ekscentrika (vrsta koju samo korak dijeli od kliničkog ekscentrika). Bio je raščupan, neuredan, hlače je umjesto remenom vezao jednom starom školskom kravatom, a odustao je i od brijanja (kada bi se porezao, što nije bilo rijetko, onesvijestio bi ga pogled na vlastitu krv). Glas mu je poprimio najviše moguće tonove mucajućeg *upper-class english* izgovora, s čestim provalama nervoznog smijeha (za koji mnogi tvrde da je podsjećao na njištanje). Kada bi se izgubio u vlastitim mislima, što je bilo često, imao je sklonost da intenzitet svojih misli poprati jednako intenzivnim skvičanjem i kriještanjem. Njegovo društveno ophođenje bilo je jednako uznemirujuće. Potpuno je ignorirao ljude kojih intelekt nije cijenio, što je naravno uključivalo kompletno vojno vodstvo Bletchley Parka (koje mu je inače bilo nadređeno). Obično je radio više dana i noći bez prestanka, poslije čega bi ga zapanjeni dežurni časnik nalazio kako spava na svojem stolu usred radnog vremena. Turing se naprosto nije mogao podvrći vojnoj stezi. Sve je pogoršavala i činjenica da svoj posao nije uzimao ozbiljno. Ono što je radio (ili što *bi trebao* raditi, kako ga je često upozoravao zapovjedni časnik), bilo je zaista ozbiljno.

Bilo je to mnogo ozbiljnije no što je shvaćala i sama vojska. Turingov je rad u Bletchleyu gotovo sigurno promijenio tijek Drugoga svjetskog rata. Naime, 1938. mladi poljski inženjer Robert Lewinski pojavio se u britanskom veleposlanstvu u Varšavi, tvrdeći da je radio u njemačkoj tvornici za proizvodnju strojeva za šifriranje i dešifriranje poruka, te da je uspio zapamtiti sve detalje toga stroja. Britanci su otprije čuli za taj tajanstveni stroj, poznat pod imenom *Enigma*, kojim se njemačka komanda služila za slanje šifriranih poruka u područja ratnih djelovanja. Zapovjednici njemačkih podmornica koristili su ih za javljanje svojih položaja, što je omogućavalo njihovo brzo prestrojavanje prema najbližim savezničkim konvojima i njihovo izuzetno efikasno uništavanje. Konvoji spasa u jednom su se trenutku toliko prorijedili da je Britanija ostala na jednotjednoj rezervi hrane. Podatci Roberta Lewinskog bili su prevrijedni. Odmah je organiziran njegov bijeg u Francusku, gdje je pod njegovim nadzorom *Enigma* konačno rekonstruirana.

Enigma je zapravo bila zapanjujuće jednostavan stroj, no njezin je sustav šifriranja ipak bio neprobojan. Sustav se sastojao od dva stroja. Stroj pošiljatelj postavljao se u jedan od ključeva i potom bi poruka jednostavno bila utipkana u stroj. Poruka je automatski bila »izmiješana« pomoću tri ili više rotora, u skladu s odabranim ključem, i odaslana prema stroju primatelju. Taj stroj, postavljen u isti ključ, primio bi »izmiješanu« poruku i rekonstruirao je. Tisuće poruka slano je svaka 24 sata, a ključ se mijenjao tri puta dnevno. Zahvaljujući Lewinskom grupa u Bletchleyu točno je znala kako *Enigma* radi. No to nije bilo dovoljno. Svaki put kada je slovo upisano u *Enigmu*, njezini su se rotori još jednom zavrtjeli (u skladu s ključem). To je značilo da su ista slova, čak u istoj riječi, nakon »miješanja« pretvorena u različita slova. Bez ključa, koji je određivao rad rotora, razbijanje šifre činilo se nemogućim, a mogućih ključeva uz upotrebu tri rotora bilo je 10^{18} (za *top secret* poruke, koje je slala *Luftwaffe*, koristile su se *Enigme* s deset rotora).

Turing je odmah shvatio da je problem dešifriranja *Enigmine* poruke *rješiv* problem. Turingov stroj s odgovarajućim instrukcijama *u načelu* može dešifrirati svaku *Enigminu* poruku. Naravno, *u načelu* može značiti sto ili tisuću godina rada, što je praktično neupotrebljivo. Turingova grupa trebala je skratiti to vrijeme na praktično upotrebljivo. Turingov stroj za dešifriranje, *Colosus*, prošao je kroz 10 verzija dok nije došao do praktično upotrebljive verzije. Prvi *Colosus*, s 2400 vakumiranih cijevi, proradio je u prosincu 1943. i mogao je procesirati 25 000 znakova u sekundi. To nije bilo dovoljno. Njemačke podmornice i dalje su potapale savezničke konvoje, jer je dešifriranje *Enigminih* poruka trajalo po nekoliko dana. S razvojem novih verzija *Colosusa* taj je period smanjen na sate, a zatim i na minute. Na kraju je položaj svake njemačke podmornice u Atlantiku bio otkrivan u roku od nekoliko minuta i gubitak brodova u savezničkim konvojima drastično je smanjen. Britanija, a to je bio mostobran Europe, spašena je. Nijemci su odmah uočili da se nešto zbiva, ali nijednoga trenutka nisu sumnjali u neprobojnost *Enigme*, pa su je nastavili koristiti do kraja rata. Smatrali su da Britancima ključeve odaju izdajice iz njihovih redova. Umjesto stručnjaka koji bi usavršili *Enigmu*, u posao je uključen Gestapo, koji je počeo hapsiti osumnjičene i nije to prestao činiti do kraja rata. Cijelo to vrijeme njemačke su komunikacije saveznicima bile otvorena knjiga.

Turingov rad bio je od takva značaja da je u jednom trenutku poslan u Ameriku da se s von Neumannom priključi radu na ENIAC-u (*Electronic Numerical Integrator and Calculator*). ENIAC je, sa svojih 19 000 cijevi, bio još kolosalniji od *Colosusa*, ali on je proradio tek poslije rata. Godine 1945. Turing se uključio u rad novoosnovanog *National Physical Laboratory*, gdje je vodio projekt izgradnje ACE-a (*Automatic Computing Engine*). Turingov projekt ACE-a bio je generaciju ispred ENIAC-a, no nažalost nije ga pratila odgovarajuća novčana podrška. Turing nije znao pristupiti znanstvenim fondovima i redovito je bio odbijan. Pratila ga je fama lošeg suradnika, a znanstvena ga politika nije uzimala ozbiljno. (Kada se jednom, u Whitehallu, trebao sastati s dužnosnicima koji raspoređuju znanstvene fondove, pretrčao je 15 kilometara s jednog na drugi kraj Londona, umjesto da se koristi javnim prijevozom. Tko je god vidio kraj maratona i tko se god susreo sa znanstvenim birokratima, može lako pretpostaviti koji je dojam Turing ostavio na dužnosnike i kolika su mu sredstva odobrena.) Na kraju je 1947. napustio projekt ACE-a i nije sasvim jasno je li dao ostavku ili je dobio otkaz.

Nakon godine provedene u Cambridgeu prihvatio je mjesto jednog od direktora kompjutorskog laboratorija Sveučilišta u Manchesteru, gdje se upravo stvarala MADAM (*Manchester Automatic Digital Machine*). Bilo je to prvo programabilno digitalno računalo koje je funkcioniralo (prva djelatna realizacija univerzalnoga Turingova stroja). To nije bilo samo prvo djelatno računalo te vrste, nego vjerojatno i prvo računalo koje je korišteno u jednome inženjerskom pothvatu velikih razmjera; u proračunu konstrukcije morskoga kanala St Lawrence (jednog od inženjerskih čuda 20. stoljeća). Sam Turing koristio je MADAM u druge svrhe. Učio ju je igrati šah i pisati ljubavna pisma. Suradnici su s priličnim čuđenjem gledali svojeg direktora kako s MADAM satima igra šah, a još ih je više zapanjila njegova nova ljubavna korespondencija. Evo jednog od povijesnih primjera:

»Darling Sweetheart,

You are my avid fellow feeling. My affection curiously cling to your passionate wish.

My liking yearns to your heart. You are my wistful sympathy: my tender liking.

Yours beautifully,

M.U.C.«

MADAM se ovaj put potpisala kao MUC (*Manchester University Computer*), što s obzirom na Turingovu homoseksualnost možemo tumačiti kao freudovsku omašku.

Ukratko, Turing se počeo baviti umjetnom inteligencijom (AI) gotovo cijelo desetljeće prije njezina službenog nastanka u 1956. godini. Svoje je ideje iznio u još jednom epohalnom radu (uz onaj iz 1936.). To je *Computing Machinery and Intelligence* iz 1950. U njemu Turing obrazlaže kako se strojevi mogu naučiti da samostalno misle i predlaže slavni *Turingov test* za provjeru njihove uspješnosti. No to je tema za novi članak, kao što je to i treći njegov epohalni doprinos iz 1952.: *The Chemical Basis of Morphogenesis*. Tu se Turing počeo baviti područjem koje (za razliku od AI) još ni danas nije nastalo, nego tek pomalo nastaje. (Između ta dva epohalna rada Turing je 1951. postao *Fellow of the Royal Society*, sa svega 39 godina.)

VI.

Nažalost, priča o Alanu Mathisonu Turingu sadrži i tragičan završetak. Jednog vikenda na pragu 1952. godine Alan je ostavio svojeg prijatelja Arnolda Murraya samog u kući, da bi, na svoje zaprepaštenje, po povratku ustanovio da je pokraden. Otuđeno je svega par sitnica, no Turing je bio užasno povrijeđen i slučaj je prijavio policiji. To se pokazalo kobnim. Policija je odmah uočila homoseksualnu stranu cijeloga slučaja i Turing je u veljači 1952. uhićen pod optužbom za *gross indecency*. Suđenje nije dobilo velik publicitet (objavljen je tek manji članak u *News of the World* pod naslovom *Accused has powerfull Brain*), što se vjerojatno može zahvaliti višim vlastima. To je bilo najmanje što su mogli učiniti za čovjeka koji je odigrao jednu od glavnih uloga u ne tako davnoj ratnoj pobjedi. Na kraju je Turing priznao »krivnju«, ali je zatvor mogao izbjeći samo pod uvjetom da pristane na hormonalnu »terapiju«, koja bi ga »izliječila« od homoseksualnosti. Taj neprimjereni tretman imao je groteskne posljedice, između ostalog rast prsiju i pojavu ostalih ženskih karakteristika. Uz sve to njegov rad na problemima postavljenim u *The Chemical Basis of Morphogenesis* vrtio se u nepreglednim računima bez izgleda za rješenjem. Turing se još jednom upleo u labirint depresije i suicidalnih misli.

No ovoga puta samoubojstvo je bilo sasvim blizu. Turingov rad bio je besplodan, njegov seksualni identitet gubio se pod utjecajem lijekova, sve je vodilo neumitnom završetku. U kasnu večer 7. lipnja 1954. Turing je pojeo jabuku otrovanu cijanidom ■

LITERATURA:

/C/ Church, A., *A note on Entscheidungsproblem*, »Journal of Symbolic Logic«, 1, 1936, str. 40 – 41.

/G/ Gödel, K., *Remarks before the Princeton bicentennial conference problems in mathematics*, 1946. Prvi put objavljeno u knjizi Davis, M., *The undecidable: Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems and Computable functions*, Raven Press, 1965.

/H/ Hodges, A., *Alan Turing: the enigma*, Burnett Books, 1983.

/K/ Kleene, S. C., *General recursive functions of natural numbers*, »Mathematische Annalen« 112, 1936, str. 727 – 742.

/P/ Post, E. L., *Finite combinatory processes*, »Journal of Symbolic Logic«, 1, 1936, str. 103 – 105.

/Š1/ Šikić, Z., *Kako je stvarana novovjekovna matematika*, Školska knjiga, 1989.

/Š2/ Šikić, Z., *Filozofija matematike*, Školska knjiga, 1995.

/Š3/ Šikić, Z., *Gödelovi teoremi*, »Rugjer«, 5, 1996, str. 30 – 35.

/Š4/ Šikić, Z., *The diagonal argument – a study of cases*, »International studies in the philosophy of science«, vol. 6, no. 3, 1992, str. 191 – 203.

/T/ Turing, A. M., *On computable numbers with an application on the Entscheidungsproblem*, »Proceedings of London Mathematical Society«, 42, 2, 1936/1937, str. 230 – 265.