BROJEVI I BROJKE

ZVONIMIR ŠIKIĆ, Zagreb

Spomenem li u svojem tekstu neku stvar, upotrijebit ću njeno ime. Upotrijebljeno ime gotovo se uvijek razlikuje od stvari koju spominjem. (Na stranicama naših knjiga ne prostiru se krajolici koje knjige opisuju niti iz njih iskaču ljudi o kojima one pričaju.) Sjetimo se, uostalom, da u različitim jezicima upotrebljavamo različita imena za iste stvari.

Kako je sa svim stvarima, tako je i s brojevima. Spomenem li u svojem tekstu neki broj, upotrijebit ću njegovo ime, tj. brojku. Upotrijebljeno ime, brojka, uvijek se razlikuje od broja koji spominjem brojkom. Sjetimo se da u raznim sustavima zapisivanja brojeva upotrebljavamo različite brojke kao zapise istog broja. (npr. VI = 6). Uskoro ćemo opisati neke od tih sustava.

Prije toga uočimo još jednu analogiju s pisanim jezicima. Svaki pisani jezik ima neki konačni broj osnovnih znakova od kojih su građene sve riječi, rečenice, ... toga jezika. Ti osnovni znakovi čine abecedu pisanog jezika. Isto tako svaki sustav zapisivanja brojeva ima neki konačni broj osnovnih znakova od kojih su građene sve brojke. Ti su osnovni znakovi znamenke tog sustava, koje su i same imena najjednostavnijih brojeva u tom sustavu. (Uočite da u pisanim jezicima ossnovni znak, slovo, ne mora označavati ništa. Ipak se često smatra da slovo označava samo sebe jer ljudi, čini se, teško prihvaćaju znakove koji sami za sebe ne označavaju ništa?!)

Od starijih sustava zapisivanja brojeva podsjetit ćemo na egipatski i rimski. U egipatskom sustavu nalazimo ove znamenke:

𓏺, 𓎆, 𓍢, ... Svaka od tih znamenki ujedno je i brojka koja označava određeni broj; kazat ćemo da je taj broj vrijednost te znamenke. Želimo li napisati koje brojeve označavaju te znamenke, moramo upotrijebiti njihova imena. Naravno, upotrijebit ćemo njihova imena u čitaocu dobro poznatom indo-arapskom dekadskom sustavu. Dakle, vrijednosti su egipatskih znamenki:

𓏺 = 1, 𓎆 = 10, 𓍢 = 100, ...

Svaka druga brojka nastaje konačnim nizanjem tih znamenki i označava broj koji je zbroj vrijednosti nanizanih znamenki. Dakle,

𓍢𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺 = 123, 𓍢𓍢𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆 𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺 = 258 itd.

Redoslijed nizanja znamenki nije bitan u tom sustavu, tj. sustav nije ni apsolutno ni relativno pozicioni. Na primjer:

 = 123, ali i  = 123 itd.

Odmah uočavamo da su zapisi u tom sustavu glomazni i vrlo nespretni za rad s većim brojevima. Ipak, uočite da je u tom sustavu izuzetno jednostavno zbrajanje i oduzimanje:

S druge strane, nije uopće jasno kako bi se u tom sustavu množilo ili dijelilo.

U rimskom sustavu nalazimo ove znamenke:

$$\mathrm{I},\ \mathrm{V},\ \mathrm{X},\ \mathrm{L},\ \mathrm{C},\ \mathrm{D}\ \text{ i }\ \mathrm{M},$$

čije su vrijednosti:

$$\mathrm{I}=1,\quad \mathrm{V}=5,\quad \mathrm{X}=10,\quad \mathrm{L}=50,\quad \mathrm{C}=100,\quad \mathrm{D}=500\ \text{ i }\ \mathrm{M}=1000.$$

Osim znamenki, najznačajnije su brojke rimskog sustava ove jednostavne kombinacije znamenki:

$$\mathrm{IV},\ \mathrm{IX},\ \mathrm{XL},\ \mathrm{XC},\ \mathrm{CD},\ \text{ i }\ \mathrm{CM},$$

čije se vrijednosti dobivaju oduzimanjem vrijednosti lijeve znamenke od vrijednosti desne znamenke. Dakle,

$$\mathrm{IV}=4,\quad \mathrm{IX}=9,\quad \mathrm{XL}=40,\quad \mathrm{XC}=90,\quad \mathrm{CD}=400\ \text{ i }\ \mathrm{CM}=900.$$

Nazovemo li tih šest jednostavnih brojki poluznamenkama, onda možemo reći da svaka brojka rimskoga sustava nastaje konačnim nizanjem znamenki i poluznamenki, i to uvijek počevši od onih veće vrijednosti prema onima manje vrijednosti (uz ograničenje da poluznamenke s istom lijevom znamenkom, kao ni više od tri iste znamenke, nikada ne slijede jedna drugu). Vrijednost teko dobivene brojke jest zbroj vrijednosti nanizanih znamenki i poluznamenki. Dakle,

$$\mathrm{MDCCCLXXXVIII}=1888,\qquad \mathrm{MCMLXXXVI}=1986\ \text{itd.}$$

Doprinos koji znamenka u nekoj brojci daje ukupnoj vrijednosti brojke ovisi o njenoj relativnoj poziciji spram drugih znamenki, a ne o njenoj apsolutno određenoj poziciji unutar brojke (npr. o tome da je 1. zdesna, 2. zdesna i sl.). Na primjer, promotrite doprinos znamenke X u ovim brojkama:

$$\mathrm{XC}\qquad \mathrm{MXVI}\qquad \mathrm{CIX}$$

Kazat ćemo da je rimski sustav relativno pozicioni. Uočite, međutim, da je sva „relativnost" rimskog sustava sadržana u određivanju vrijednosti poluznamenki. Da umjesto tih kombinacija znamenki uvedemo posebne znamenke, rimski se sustav ne bi bitno razlikovao od egipatskog sustava (tj. ne bi bio ni relativno ni apsolutno pozicioni). U vezi s tim recimo da je i u rimskom sustavu prilično lako zbrajati i oduzimati, ali nije odmah jasno kako bismo trebali množiti i dijeliti.

Mi se danas koristimo indo-arapskim dekadskim sustavom zapisivanja brojeva. Taj su sustav u Evropu donijeli Arapi, preuzevši ga od Indijaca i odatle mu ime. Kao što znamo, znamenke su tog sustava 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9. To je apsolutno pozicioni sustav, tj. doprinos koji znamenka u nekoj brojci daje ukupnoj vrijednosti brojke ovisi o apsolutnoj poziciji te znamenke u brojci (tj. o tome koja je ona po redu zdesna), a ne o njenoj relativnoj poziciji (tj. o tome koje su znamenke oko nje). Primijetimo da je apsolutno fiksiranje pozicije omogućeno upotrebom nule, koja je strana i egipatskom i rimskom sustavu. Ukratko, doprinos prve znamenke zdesna jest njena vrijednost, doprinos druge znamenke zdesna jest njena vrijednost pomnožena sa 10, doprinos treće znamenke zdesna jest njena vrijednost pomnožena sa 10^2 itd. Na primjer, ako je konačni niz $a_4a_3a_2a_1a_0$ brojka u indo-arapskom dekadskom sustavu (tj. ako su a_i znamenke toga sustava), onda je

$$a_4a_3a_2a_1a_0 = a_4 \cdot 10^4 + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Kao što znamo, taj je sustav s vremenom proširen tako da omogući zapisivanje brojeva koji nisu cijeli. Naime, u proširenom je sustavu, npr.:

$$0 \cdot b_1b_2b_3b_4 = b_1 \cdot \frac{1}{10} + b_2 \cdot \frac{1}{10^2} + b_3 \cdot \frac{1}{10^3} + b_4 \cdot \frac{1}{10^4}.$$

Doprinos prve znamenke desno od decimalne točke jest vrijednost te znamenke podijeljena sa 10, doprinos druge znamenke desno od decimalne točke jest vrijednost te znamenke podijeljena sa 10^2 itd. Naravno, zapisu $a_4a_3a_2a_1a_0 \cdot b_1b_2b_3b_4$, na primjer, dajemo ovo značenje:

$$a_4a_3a_2a_1a_0 \cdot b_1b_2b_3b_4 = a_4a_3a_2a_1a_0 + 0 \cdot b_1b_2b_3b_4.$$

Dakle, u tako proširenom indo-arapskom dekadskom sustavu mogu se, osim prirodnih brojeva, zapisati i mnogi racionalni brojevi.

Prije nego što nastavimo opisivati ostale sustave, upozorit ćemo na neke vrlo česte zabune koje nastaju zbog brkanja vrsta brojeva s načinima zapisivanja brojeva. U knjigama često nalazimo ovakve naslove: „Rimski brojevi", „Decimalni brojevi", „Razlomci" (shvaćeni kao brojevi) i sl. Međutim, postoje li rimski brojevi? Ne postoje! Postoje samo rimski zapisi brojeva, tj. rimske brojke. Ipak, terminu rimski brojevi možemo dati ovaj smisao: rimski su brojevi oni brojevi koje možemo zapisati rimskim brojkama. Ali u tom su slučaju rimski brojevi naprosto prirodni brojevi, pa zato taj termin nije potreban (ni poželjan). Na isti način možemo kazati da ne postoje decimalni brojevi (postoje samo decimalne brojke), osim ako i sada pod decimalnim brojevima ne mislimo na one brojeve koje možemo zapisati decimalnim brojkama. Taj je termin potreban, za razliku od termina rimski brojevi, jer ne postoji nijedan drugi termin koji bi označio tu vrstu brojeva. Zato prihvaćamo da su decimalni brojevi oni brojevi koje možemo zapisati decimalnim brojkama. Ni razlomke ne možemo smatrati brojevima (oni su zapisi brojeva), osim ako ne smatramo da su razlomci upravo oni brojevi koje možemo zapisati razlomcima. No tako shvaćeni razlomci jesu racionalni brojevi, pa je upotreba termina razlomci za tu vrstu brojeva nepotrebna i nepoželjna. Sličnom analizom možemo pokazati da je nepotrebno govoriti o periodičkim i neperiodičkim decimalnim brojevima; prvi su racionalni brojevi, a drugi su iracionalni brojevi. Vratimo se sada sustavima zapisivanja brojeva.

U indo-arapskom dekadskom sustavu, koji je apsolutno pozicioni, doprinos znamenke vrijednosti brojke dobivamo pomnoživši tu znamenku odgovarajućom potencijom broja 10. Broj 10 zovemo bazom toga sustava. Naravno, lako je zamisliti neograničeni broj jednako koncipiranih sustava u kojima je baza neki broj različit od 10. I te ćemo sustave, po analogiji, zvati indo-arapski sustavi, navodeći odgovarajuću bazu. Na primjer, u indo-arapskom sustavu s bazom 7, kojemu su znamenke 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 i koji ćemo zvati septimalni:

$$231_{(7)} = 2 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7^1 + 1 = 120.$$

Razmotrimo odmah i obrnuti problem: kako prirodni broj zadan indo-arapskim dekadskim zapisom možemo zapisati u indo-arapskom sustavu s bazom 7. To ćemo pokazati na primjeru. Broj 625 zapisati u indo-arapskom sustavu s bazom 7 znači naći takve znamenke a_i ($Q_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) da bude:

$$625 = \ldots + a_3 \cdot 7^3 + a_2 \cdot 7^2 + a_1 \cdot 7 + a_0.$$

Podijelivši tu jednadžbu sa 7, dobivamo ostatak r_0 koji je jednak prvoj znamenki a_0 i kvocijent:

$$q_0 = \ldots + a_3 \cdot 7^2 + a_2 \cdot 7 + a_1.$$

Podijelivši tu jednadžbu sa 7, dobivamo ostatak r_1 koji je jednak drugoj znamenki a_1 i kvocijent:

$$q_1 = \ldots + a_3 \cdot 7 + a_2.$$

Nastavimo li taj postupak, nalazimo sve tražene znamenke. Dakle, znamenke septimalnog zapisa ostaci su koje dobivamo uzastopnim dijeljenjem zadanog broja dobivenih kvocijenata s bazom 7. To možemo „šablonski" izvesti ovako:

$$\begin{array}{llll}
625 : 7 = & 89 : 7 = & 12 : 7 = & 1 : 7 = 0, \text{ tj. } 625 = 1552_{(7)} \\
65 & 19 & 5 & 1 \\
2 & 5 & \downarrow & \downarrow \\
\downarrow & \downarrow & & \\
a_0 & a_1 & a_2 & a_3
\end{array}$$

Naravno, ako broj treba prikazati u nekoj drugoj bazi, dijelit ćemo po istoj „šabloni" s tom drugom bazom. Na primjer, zapis broja 384 u indo-arapskom sustavu s bazom 5 nalazimo ovako (uočite da je posljednje dijeljenje u prethodnom primjeru nepotrebno, pa ga sada ne izvodimo):

$$\begin{array}{lll}
384 : 5 = & 76 : 5 = & 15 : 5 = 3, \text{ tj. } 384 = 3014_{(5)} \\
34 & 26 & \quad\;\; 0 \\
4 & 1 &
\end{array}$$

Analogno dekadskom sustavu, i svaki se drugi indo-arapski sustav može proširiti tako da omogući zapisivanje necijelih brojeva. Na primjer, u septimalnom sustavu (sustav s bazom 7):

$$0 \cdot b_1 b_2 b_3 b_{4(7)} = b_1 \cdot \frac{1}{7} + b_2 \cdot \frac{1}{7^2} + b_3 \cdot \frac{1}{7^3} + b_4 \cdot \frac{1}{7^4},$$

$$a_3 a_2 a_1 a_0 \cdot b_1 b_2 b_3 b_{4(7)} = a_3 a_2 a_1 a_{0(7)} + 0 \cdot b_1 b_2 b_3 b_{4(7)}.$$

Dakle,

$$0.15_{(7)} = 1 \cdot \frac{1}{7} + 5 \cdot \frac{1}{7^2} = \frac{12}{49} \qquad 2 \cdot 15_{(7)} = 2_{(7)} + 0.15_{(7)} = 2 + \frac{12}{49}.$$

Uočite da je $0.15_{(7)}$ racionalni broj, koji nije decimalni broj. Naravno, on se, kao svaki racionalni broj, može prikazati beskonačnim periodičkim decimalnim razvojem, i o tome ćemo sada reći nešto više.

U vezi sa svakim (proširenim) indo-arapskim sustavom možemo govoriti o brojevima odgovarajućeg tipa. Na primjer, septimalni brojevi ili brojevi tipa (7) jesu oni brojevi koji se mogu zapisati u (proširenom) indo-arapskom sustavu bazom 7. Već smo vidjeli da ima brojeva koji se neće moći zapisati u uobičajenom dekadskom sustavu (usp. gore $0.15_{(7)}$), nego će u tom sustavu imati beskonačni periodički razvoj. Vrijedi i obratno, neki se decimalni brojevi neće moći zapisati u (proširenom) indo-arapskom sustavu s bazom 7, nego će u njemu imati beskonačni periodički razvoj. Evo primjera. Naći razvoj decimalnog broja 0.75 u indo-arapskom sustavu s bazom 7 znači naći takve znamenke b_i ($b_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$) da bude:

$$0.75 = b_1 \cdot \frac{1}{7} + b_2 \cdot \frac{1}{7^2} + b_3 \cdot \frac{1}{7^3} + b_4 \cdot \frac{1}{7^4} + \ldots$$

Pomnožimo li tu jednadžbu sa 7, dobivamo umnožak:

$$5.25 = b_1 + b_2 \cdot \frac{1}{7} + b_3 \cdot \frac{1}{7^2} + b_4 \cdot \frac{1}{7^3} + \ldots,$$

kojemu je cijeli dio prva znamenka b_1, dok mu je ostatak:

$$0.25 = b_2 \cdot \frac{1}{7} + b_3 \cdot \frac{1}{7^2} + b_4 \cdot \frac{1}{7^3} + \ldots$$

Pomnoživši tu jednadžbu sa 7, dobivamo na isti način drugu znamenku b_2 kao cijeli dio umnoška i ostatak iz kojega određujemo b_3 itd. Dakle, znamenke „šablonski" dobivamo ovako:

$$\begin{array}{rl} & 0.75 \cdot 7 \\ \hline b_1 \leftarrow & 5.25 \cdot 7 \\ \hline b_2 \leftarrow & 1.75 \cdot 7 \\ \hline b_3 \leftarrow & 5.25 \cdot 7 \\ & \vdots \end{array}$$

Budući da će se znamenke periodički ponavljati, vidimo da je $0.75 = 0.\dot{5}\dot{1}_{(7)}$.

U nekoj drugoj bazi postupak je isti, samo se množi s tom drugom bazom. Razvijmo, na primjer, 0.27 u indo-arapskom sustavu s bazom 5.

$$\begin{array}{rl} & 0.27 \cdot 5 \\ b_1 \leftarrow & \overline{1.35 \cdot 5} \\ b_2 \leftarrow & \overline{1.75 \cdot 5} \\ b_3 \leftarrow & \overline{3.75 \cdot 5} \\ b_4 \leftarrow & \overline{3.75 \cdot 5} \\ & \vdots \end{array}$$

Budući da će se znamenke periodički ponavljati, vidimo da je $0.27 = 0.11\dot{3}_{(5)}$.

Naravno, lako je naći decimalni broj koji ima (konačan) prikaz u indo-arapskom sustavu s bazom 5, odnosno takav decimalni broj koji je tipa (5), tj. kvintalan. Takav je, na primjer, 0.2:

$$\begin{array}{rl} & 0.2 \cdot 5 \\ b_1 \leftarrow & \overline{1.0} \end{array}, \qquad \text{tj.} \qquad 0.2 = 0.1_{(5)}.$$

Dakle, ima decimalnih brojeva koji su kvintalni brojevi (npr. 0.2), ali i decimalnih brojeva koji nisu kvintalni (npr. 0.27). Vidjeli smo, također, da neki decimalni brojevi nisu septimalni (npr. 0.75), pa će se čitatelj, možda, upitati ima li decimalnih brojeva koji jesu septimalni. To pitanje prepuštamo čitaocu jer se ovdje njime nećemo baviti. Uostalom, predlažemo čitaocu da pokuša ispitati ovaj opći problem:

Što možemo kazati o odnosu klase brojeva tipa (n) i klase brojeva tipa (m), ovisno o odnosu brojeva n i m?

Dat ćemo samo krajnji rezultat takvog ispitivanja.

Teorem. *Ako klasu pozitivnih brojeva tipa (n) koji su manji od 1 označimo sa $[n]$, onda vrijedi:*

(1) *Ako su p i q relativno prosti brojevi, onda je $[p] \cap [q] = \emptyset$.*

(2) *Ako p i q nisu relativno prosti brojevi i ako im je m najveća zajednička mjera, onda je $[p] \cap [q] = [m]$.*

Toliko o zapisivanju brojeva u raznim sustavima i o vrstama brojeva vezanima za te sustave.

Sada ćemo nešto reći o računskim operacijama i njihovoj vezi sa sustavima zapisivanja brojeva. Budući da brojeve možemo spominjati samo tako da upotrebljavamo njihova imena (brojke), onda s njima možemo i računati samo tako da se koristimo njihovim imenima, brojkama. Naravno, računski algoritmi (npr. pismeno zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje) s jedne strane ovise o svojstvima samih brojeva, a s druge strane ovise o svojstvima brojki, tj. o sustavu zapisivanja brojeva. To možemo ilustrirati na svima poznatim primjerima pismenog zbrajanja i množenja u indo-arapskom dekadskom sustavu. Komutativnost i asocijativnost zbrajanja brojeva u načelu omogućuje slobodno grupiranje parcijalnih suma, dok koncepcija zapisivanja brojeva u indo-arapskom dekadskom sustavu diktira odabir pojedinih grupa: jedinice zbrajamo s jedinicama, desetice s deseticama, stotice sa stoticama itd. Slično, distributivnost množenja u načelu omogućuje svođenje složenijeg množenja na više jednostavnijih množenja, dok koncepcija zapisivanja brojeva u indo-arapskom dekadskom sustavu diktira najjednostavniju primjenu distributivnosti: $27 \cdot 5 = (20 + 7) \cdot 5 = 20 \cdot 5 + 7 \cdot 5$, a ne, npr., $27 \cdot 5 = (15 + 12) \cdot 5 = 15 \cdot 5 + 12 \cdot 5$. Podemo li korak dalje u našoj analizi, možemo vidjeti što je u našim osnovnim računskim algoritmima vezano za opću „indo-arapsku" koncepciju apsolutno pozicionog sustava, a što je vezano za odabir baze 10. Za bazu 10 vezane su tablice zbrajanja i množenja, koje svi znamo napamet (i koje su ujedno tablice oduzimanja i dijeljenja). Sami algoritmi za izvođenje osnovnih računskih operacija bit će jednaki u svim indo-arapskim sustavima. Pogledajmo, uostalom, kako Petko zbraja, oduzima, množi i dijeli u indo-arapskom sustavu s bazom 5. On se služi ovim tablicama zbrajanja (oduzimanja) i množenja (dijeljenja):

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

·	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

$$\begin{array}{r} 423 \\ +\ 302 \\ \hline 1230 \end{array}$$

Riječima: $3 + 2 = 10$. Pišem 0, pamtim 1. $2 + 0 = 2$ i 1 što pamtim je 3. Pišem 3. $4 + 3 = 12$. Pišem 12.

$$\begin{array}{r} 423 \\ -\ 131 \\ \hline 242 \end{array}$$

Riječima: 1 do 3 je 2 (vidi strelicu u tablici zbrajanja). Pišem 2. 3 do 12 je 4. Pamtim 1. 1 i 1 što pamtim je 2; 2 do 4 je 2. Pišem 2.

$$\begin{array}{r} 32 \cdot 24 \\ \hline 114 \\ 233 \\ \hline 1423 \end{array}$$

Riječima: $2 \cdot 2 = 4$, pišem 4. $2 \cdot 3 = 11$, pišem 11. $4 \cdot 2 = 13$, pišem 3 udesno i pamtim 1. $4 \cdot 3 = 22$ i 1 što pamtim je 23. Pišem 23. Zbrajam i dobivam 1423.

$$\begin{array}{l} 324 : 4 = 42 \\ 14 \\ 1 \end{array}$$

Riječima: 4 u 32 ide 4 puta (vidi strelicu u tablici množanja). Pišem 4. $4 \cdot 4 = 31$, do 32 ostaje 1. Pišem 1, spuštam 4. 4 u 14 ide 2 puta. Pišem 2. $4 \cdot 2 = 13$, do 14 ostaje 1. 4 u 1 ne ide.

Dakle, $324 : 4 = 42$, uz ostatak 1.

Ukratko, pismena zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja funkcioniraju u bilo kojem indo-arapskom sustavu zapisivanja brojeva (neovisno o odabiru baze) uz primjenu odgovarajućih tablica zbrajanja i množenja.

Pogledajmo sada kako izvodimo računske operacije u sustavima koji nisu apsolutno pozicioni, na primjer u rimskom sustavu. Sa zbrajanjem i oduzimanjem, kako smo uočili na samom početku članka, nema problema. Teškoće počinju s množenjem, a pri dijeljenju su zaista velike. Pokazat ćemo kako se može množiti u rimskom sustavu, a dijeljenjem se nećemo baviti. (Rimljanin koji je znao dijeliti bio je, u svoje vrijeme, matematički prilično obrazovan.)

Množenje se može svesti na uzastopna zbrajanja, koja se u rimskom sustavu lako izvode. Evo primjera (s desne strane prikazujemo postupak u indo-arapskom dekadskom zapisu, radi lakšeg praćenja):

XCIII · XXVII		93 · 27	
XCIII	(I puta)	93	(2^0 puta)
+XCIII		+93	
CLXXXVI	(II puta)	186	(2^1 puta)
+CLXXXVI		+186	
CCCLXXII	(IV puta)	372	(2^2 puta)
+CCCLXXII		+372	
DCCXLIV	(VIII puta)	744	(2^3 puta)
+DCCXLIV		+744	
MCDLXXXVIII	(XVI puta)	1488	(2^4 puta)
DCCXLIV	(VIII puta)	744	(2^3 puta)
CLXXXVI	(II puta)	186	(2^1 puta)
+XCIII	(I puta)	+ 93	(2^0 puta)
MMDXI	(XXVII puta)	2511	(27 puta)

Najprije udvostručimo broj 93, zatim udvostručimo dobiveni rezultat, itd., dok ne dobijemo umnožak $93 \cdot 16$. Slijedećim udvostručavanjem dobili bismo $93 \cdot 32$, što prelazi traženi umnožak $93 \cdot 27$. Zato dalje ne udvostručujemo, nego dobivene umnoške zbrajamo udvostručavanjem, tako da dobijemo traženi umnožak $93 \cdot 27$. Dakle, traženi umnožak nalazimo ovako:

$$93 \cdot 27 = 93 \cdot (16 + 8 + 2 + 1), \text{ tj.}$$

$$93 \cdot 27 = 93 \cdot (2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0), \text{ tj.}$$

$$93 \cdot 27 = 93 \cdot (1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0), \text{ tj.}$$

$$93 \cdot 27 = 93 \cdot 11011_{(2)}.$$

Drugim riječima, prikaz drugog faktora u binarnom sustavu ($27 = 11011_{(2)}$) određuje koje ćemo umnoške dobivene udvostručavanjem na kraju zbrojiti: one kojima odgovara znamenka 1 u binarnom zapisu drugog faktora. Međutim, sjetimo se kako određujemo znamenke nekog broja u binarnom zapisu:

$$27 : 2 = 13 : 2 = 6 : 2 = 3 : 2 = 1$$

$$1 \qquad 1 \qquad 0 \qquad 1$$

Znamenke su, redom, ostaci pri uzastopnom dijeljenju s bazom 2. Naravno, ostatak će biti 1 samo onda ako je djeljenik neparni broj. To da zbrajamo one umnoške prvog faktora dobivene udvostručavanjem kojima odgovara znamenka 1 u binarnom zapisu drugog faktora znači, dakle, da zbrajamo one umnoške prvog faktora dobivene udvostručavanjem kojima odgovara neparni broj dobiven uzastopnim prepolavljanjem drugog faktora. Dakle, množenje možemo „šablonski" izvesti ovako:

93	27
186	13
744	3
1488	1
2511	

Zbrajamo samo one umnoške prvog faktora kojima odgovara neparni broj dobiven uzastopnim prepolavljanjem drugog faktora.

Evo još jednog primjera (množimo $93 \cdot 24$):

$$\begin{array}{rr}
93 & 24 \\
186 & 12 \\
372 & 6 \\
744 & 3 \\
1488 & 1 \\
\hline
2232 &
\end{array}$$

To se množenje zove rusko množenje i ono je, vidjeli smo, pogodno ako množimo koristeći se rimskim brojkama. O dijeljenju rimskim brojkama nećemo posebno govoriti, ograničit ćemo se samo na jednu opću napomenu. Prouči li čitalac dobro standardnu tehniku pismenog dijeljenja, uočit će da ona zahtijeva: 1. približnu procjenu kvocijenta, koja je uvijek oblika $q_i \cdot 10^n$ ($q_i = 0, \ldots, 9$) i koju izvodimo napamet; 2. množenje približnog kvocijenta s djeliteljem (tj. množenje jednoznamenkastim brojem q_i); 3. oduzimanje dobivenog umnoška od djeljenika; 4. zbrajanje približnih kvocijenata (koje se zbog specifičnog odabira približnih kvocijenata svodi na prosto nizanje znamenki q_i). Dakle, dijeljenje se svodi na procjenu, množenje, oduzimanje i zbrajanje, tj. na operacije koje znamo obavljati s rimskim brojkama, pa je u načelu jasno kako ćemo dijeliti u rimskom sustavu. Naravno, teži je problem pronaći takav sistematski odabir približnih kvocijenata koji potrebna množenja i zbrajanja čini trivijalnima. Pismeno dijeljenje u indo-arapskim sustavima jednostavno je zbog jednostavnosti takvog sistematskog odabira, a u rimskom sustavu je mnogo složenije. Toliko o računskim operacijama.

Upozorimo još na jednu metodički važnu činjenicu. Svatko će od nas lako prihvatiti da broj nije isto što i brojka. Ipak, isključivom upotrebom jednog jedinog sustava zapisivanja brojeva psihološki nužno poistovjećujemo brojke tog sustava s brojevima. Zato nijedna eksplikacija razlike broj-brojka koja nije vezana uz poznavanje više različitih sustava zapisivanja brojeva nije uspješna. Evo, uostalom, primjera koji to potvrđuje.

Iako je svjestan da broj nije brojka, svaki će nastavnik matematike kazati: Broj je djeljiv sa 2 ako je njegova posljednja znamenka djeljiva sa 2. Inzistira li na točnoj formulaciji: Broj je djeljiv sa 2 ako je vrijednost njegove posljednje znamenke u standardnom (indo-arapskom dekadskom) zapisu djeljiva sa 2, učenici, roditelji i kolege s pravom će ga smatrati besposlenom cjepidlakom. Zašto s pravom? Ne zato što njegova formulacija nije točna, nego zato što nije motivirana i, što je najgore, nije u funkciji stjecanja nikakvog novog znanja; ona je tu **samo zato** da bi bila točna. Međutim, razmotrimo li razne sustave zapisivanja brojeva i prvu (netočnu) formulaciju postavimo u opreku, npr., spram ovih zapisa broja 18,

$$33_{(5)},\ 17_{(11)},\ \mathrm{XVIII},\ \mathrm{IIIIIII},$$

u kojima vrijednost posljednje znamenke nije djeljiva sa 2, onda postavljamo pravi problem, koji motivira drugu formulaciju.

U standardnom kontetstu školske aritmetike, koja se bavi prije svega upoznavanjem učenika s indo-arapskim dekadskim sustavom zapisivanja brojeva i izvođenjem računskih operacija u tom sustavu, prvoj (netočnoj) formulaciji nema zamjerki. Tek u proširenom kontekstu ispitivanja raznih sustava zapisivanja brojeva u fokus dolaze brojevi i opreka broj-brojka, pa tek tada druga (točna) formulacija dobiva svoj smisao.* Naravno, u tom širem kontekstu dobro je postaviti i dodatne probleme, koji vežu pažnju za opreku što je želimo eksplicirati. Na primjer:

Pokušaj formulirati pravila o djeljivosti brojeva vezana uz njihove zapise u indo-arapskim sustavima s bazom različitom od 10.

Dat ćemo dva djelomična rješenja toga problema, do kojih čitalac može doći i sam.

Teorem.

(1) *Broj je djeljiv sa 2 ako je vrijednost njegove posljednje znamenke u indo-arapskom sustavu s parnom bazom djeljiva sa 2.*

(2) *Broj je djeljiv sa $n - 1$ ako je zbroj vrijednosti njegovih znamenki u indo-arapskom sustavu s bazom n djeljiv s $n - 1$.*

Na primjer, parni su brojevi $1234_{(8)}$, $856_{(16)}$, $3458_{(186)}$, a neparni su brojevi $787_{(14)}$ $389_{(6)}$, $43585_{(182)}$. Nadalje, $123471_{(3)}$ je parni broj, $34296_{(4)}$ je djeljiv sa 3, $83122_{(5)}$ je djeljiv sa 4 itd.

Našu metodičku napomenu možemo ovako sažeti: želimo li, npr., grupu naprednih učenika uputiti na brojeve kao apstraktne objekte, stavljajući ih u opreku prema konkretnim brojkama, najbolje je da izlaganje počnemo razmatranjem raznih sustava brojki. Na primjer, kad upućujemo na apstraktni karakter prirodnih brojeva, počnim izlaganje napomenom o njihovu zapisivanju u različitim indo-arapskim sustavima zapisivanja; kada ukazujemo na apstrakni karakter racionalnih brojeva, počnimo izlaganje napomenom da ih možemo zapisivati razlomcima, ali i decimalnim brojevima (naravno, samo neke od njih). Poslije te, gotovo nužne napomene, možemo se posvetiti samim brojevima, *koje ćemo najčešće označavati slovima.*

* Inače, u udžbenicima često nailazimo na uporno inzistiranje na nekim pojmovima i distinkcijama koje se u samom udžbeniku nigdje ne primjenjuju. One su dane samo zato što su točne, same su sebi svrha. Na primjer, čitava tzv. teorija skupova i relacija u osnovnoj školi ubraja se u tu vrstu loše metodike. No to je već tema za drugi članak.