

Brojevi sustavi i pravila djeljivosti

ZVONIMIR ŠIKIĆ, Zagreb

1. Brojevi sustavi

Prirodne brojeve obično zapisujemo u dekadskom brojevnom sustavu čije su znamenke $0, 1, \dots, 9$. Značenje dekadskog zapisa $p_s p_{s-1} \dots p_1 p_0$, gdje su p_s, \dots, p_0 dekadске znamenke je sljedeće:

$$p_s p_{s-1} \dots p_1 p_0 = p_s \cdot 10^s + p_{s-1} \cdot 10^{s-1} + \dots + p_1 \cdot 10 + p_0.$$

Na primjer

$$582532 = 5 \cdot 10^5 + 8 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 2.$$

Za bazu brojevnog sustava može se uzeti bilo koji prirodni broj $b \geq 2$. Takav sustav zove se b -sustav, a njegove su znamenke znakovi za brojeve $0, 1, \dots, b-1$. Ako je $b \leq 10$, koristi se prvih b znamenki dekadskog sustava. Npr. 6-znamenke su $0, 1, \dots, 5$, dok su 8-znamenke $0, 1, \dots, 7$. Binarni sustav (2-sustav) je sustav sa samo dvije znamenke 0 i 1 . Ako je $b > 10$, onda se kao znamenke za brojeve veće od 9 redom koriste slova a, b, c, \dots . Dakle, $a = 10, b = 11, c = 12$ itd. Npr. 12-znamenke su $0, 1, \dots, 9, a, b$, dok su 15-znamenke $0, 1, \dots, 9, a, b, c, d, e$. Značenje b -zapisa $p_s p_{s-1} \dots p_1 p_{0(b)}$, gdje su p_s, \dots, p_0 b -znamenke je sljedeće:

$$p_s p_{s-1} \dots p_1 p_{0(b)} = p_s \cdot b^s + p_{s-1} \cdot b^{s-1} + \dots + p_1 \cdot b + p_0.$$

U dekadskom sustavu, tj. ako je $b = 10$, oznaka (10) se izostavlja. Dakle,

$$351_{(8)} = 3 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8 + 1 = 233,$$

$$1011_{(2)} = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 11,$$

$$3a1_{(12)} = 3 \cdot 12^2 + 10 \cdot 12 + 1 = 553.$$

Prethodni primjeri jasno pokazuju kako se iz b -zapisa nekog broja može izračunati njegov dekadski zapis.

Zadatak 1: Sljedeće brojeve napišite u uobičajenom dekadskom zapisu:

a) $1011101_{(2)}$, b) $436_{(7)}$, c) $aba_{(12)}$, d) $358_{(6)}$, e) $1cd2_{(15)}$.

Obrnuti problem nešto je složeniji: Kako iz dekadskog zapisa nekog broja n izračunati njegov b -zapis? Počevši s brojem n , provedimo sljedeći niz uzastopnih dijeljenja:

Dijeljenje:	Značenje dijeljenja:
$n : b = q_1$ \vdots p_0	$n = q_1 b + p_0, \quad 0 \leq p_0 < b$
$q_1 : b = q_2$ \vdots p_1	$q_1 = q_2 b + p_1, \quad 0 \leq p_1 < b$
\vdots	\vdots
$q_{s-1} : b = q_s$ \vdots p_{s-1}	$q_{s-1} = q_s b + p_{s-1}, \quad 0 \leq p_{s-1} < b$
$q_s : b = 0$ \vdots p_s	$q_s = 0 \cdot b + p_s, \quad 0 \leq p_s < b$

Iz desnog stupca slijedi:

$$\begin{aligned}
 n &= q_1 b + p_0 = \\
 &= (q_2 b + p_1) b + p_0 = q_2 b^2 + p_1 b + p_0 = \\
 &= (q_3 b + p_2) b^2 + p_1 b + p_0 = q_3 b^3 + p_2 b^2 + p_1 b + p_0 = \\
 &\quad \vdots \\
 &= p_s b^s + p_{s-1} b^{s-1} + \dots + p_2 b^2 + p_1 b + p_0 = \\
 &= p_s p_{s-1} \dots p_2 p_1 p_{0(b)}.
 \end{aligned}$$

Kako to izgleda u konkretnom slučaju pokazujemo u rješenju sljedećeg problema.

POUČAK 4

Problem 1: Broj 426 zapišimo u sustavu s bazom 8.

Rješenje:

Dijeljenje:	Značenje dijeljenja:
$426 : 8 = 53$ $\begin{array}{r} 26 \\ 2 \end{array}$	$426 = 53 \cdot 8 + 2$
$53 : 8 = 6$ 5	$53 = 6 \cdot 8 + 5$
$6 : 8 = 0$ 6	$6 = 0 \cdot 8 + 6$

Iz desnog stupca slijedi:

$$\begin{aligned} 426 &= 53 \cdot 8 + 2 = \\ &= (6 \cdot 8 + 5) \cdot 8 + 2 = 6 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8 + 2 = \\ &= 652_{(8)} \end{aligned}$$

Cijeli postupak skraćeno zapisujemo ovako:

$$\begin{array}{r} 426 : 8 = 53 : 8 = 6 \\ \quad 26 \quad 5 \\ \quad \quad 2 \end{array} \qquad 426 = 652_{(8)}$$

Zadatak 2. Zapišite brojeve 1011, 6432 i 12121 u brojevnom sustavu s bazom:

a) 2, b) 6, c) 8, d) 12, e) 15.

Problem 2. Broj $1a2_{(12)}$ zapišimo u 8-sustavu.

Rješenje: $1a2_{(12)} = 1 \cdot 12^2 + 10 \cdot 12 + 2 = 266$

$$\begin{array}{r} 266 : 8 = 33 : 8 = 4 \\ \quad 26 \quad 1 \\ \quad \quad 2 \end{array} \qquad 266 = 412_{(8)}$$

Dakle, $1a2_{(12)} = 266 = 412_{(8)}$.

Zadatak 3. Brojeve (a) $1011101_{(2)}$, (b) $436_{(7)}$, (c) $aba_{(12)}$ i (d) $358_{(15)}$ zapišite u 6, 8 i 10-sustavu.

2. Osnovna pravila djeljivosti

Pitanje djeljivosti nekog broja s 2 lako je rješivo u dekadskom sustavu:

Broj je djeljiv s 2 ako mu je (i samo ako mu je) zadnja znamenka djeljiva s 2.

Analogno pravilo vrijedi i za djeljivost s 5 :

Broj je djeljiv s 5 ako mu je (i samo ako mu je) zadnja znamenka djeljiva s 5.

Uočimo da su 2 i 5 jedini djelitelji dekadске baze 10. Zato oba ova pravila možemo izreći kao jedno:

Broj je djeljiv djeliteljem d baze 10, ako mu je (i samo ako mu je) zadnja znamenka djeljiva s d .

Takvo pravilo vrijedi u svim brojevnim sustavima:

Broj je djeljiv djeliteljem d baze b , ako mu je (i samo ako mu je) zadnja znamenka u b -zapisu djeljiva s d .

Naime, zapišemo li broj n u brojevnom sustavu s bazom b :

$$\begin{aligned} n &= p_r p_{r-1} \cdots p_2 p_1 p_0(b) = \\ &= p_r b^r + p_{r-1} b^{r-1} + \dots + p_2 b^2 + p_1 b + p_0 = \\ &= b \cdot (p_r b^{r-1} + p_{r-1} b^{r-2} + \dots + p_2 b + p_1) + p_0, \end{aligned}$$

odmah uočavamo da je n djeljiv nekim djeliteljem d baze b ako mu je (i samo ako mu je) zadnja znamenka p_0 djeljiva s d .

Zadatak 4. Koji su od sljedećih brojeva djeljivi s 3 :

a) $345_{(6)}$, b) $27a9_{(12)}$, c) $1816_{(9)}$, d) $20432_{(15)}$, e) $318abc_{(18)}$?

Broj je djeljiv s 4 odnosno s 25 ako je (i samo ako je) broj koji čine njegove posljednje dvije znamenke u dekadskom zapisu djeljiv s 4 odnosno s 25.

Na primjer, broj 35416 djeljiv je s 4 jer je broj 16 djeljiv s 4, a broj 42832 nije djeljiv s 25 jer broj 32 nije djeljiv s 25. Poopćenje ovih pravila na zapise brojeva u proizvoljnim bazama nalazimo u sljedećem zadatku.

Zadatak 5. Neka je a djelitelj od b takav da a^2 nije djelitelj od b . Dokažite da je broj $p_r p_{r-1} \cdots p_2 p_1 p_0(b)$ djeljiv s a^2 točno onda kada je broj $p_1 p_0(b)$ djeljiv s a^2 .

Broj je djeljiv s 8 odnosno sa 125 ako je (i samo ako je) broj koji čine njegove posljednje tri znamenke u dekadskom zapisu djeljiv s 8 odnosno sa 125.

Na primjer broj 35108 nije djeljiv s 8 jer broj 108 nije djeljiv s 8, a broj 75432375 djeljiv je sa 125 jer je broj 375 djeljiv sa 125. Poopćenje ovih pravila na zapise brojeva u proizvoljnim bazama nalazimo u sljedećem zadatku.

Zadatak 6. Neka je a djelitelj od b takav da a^3 nije djelitelj od b . Dokažite da je broj $p_r p_{r-1} \cdots p_2 p_1 p_0(b)$ djeljiv s a^3 točno onda kada je broj $p_2 p_1 p_0(b)$ djeljiv s a^3 .

POUČAK 4

U dekadskom sustavu lako su rješiva i pitanja djeljivosti s 3 i s 9 :

Broj je djeljiv s 3 odnosno s 9 ako mu je (i samo ako mu je) zbroj znamenaka djeljiv s 3 odnosno s 9.

Uočimo da su 3 i 9 jedini djelitelji baze 10 umanjene za 1. Zato to pravilo dijeljenja možemo izreći i ovako:

Broj je djeljiv djeliteljem d broja $10 - 1$ ako mu je (i samo ako mu je) zbroj znamenaka djeljiv s d .

Takvo pravilo vrijedi u svim brojevnim sustavima:

Broj je djeljiv djeliteljem d broja $b - 1$ ako mu je (i samo ako mu je) zbroj znamenaka u b -zapisu djeljiv s d .

Doista, neka je d neki djelitelj broja $b - 1$. Tada za broj n prikazan u brojevnom sustavu s bazom b vrijedi:

$$\begin{aligned} n &= p_r p_{r-1} \dots p_2 p_1 p_0 (b) = \\ &= p_r b^r + p_{r-1} b^{r-1} + \dots + p_2 b^2 + p_1 b + p_0 = \\ &= p_r (b^r - 1) + p_{r-1} (b^{r-1} - 1) + \dots + p_2 (b^2 - 1) + p_1 (b - 1) + \\ &\quad + (p_0 + p_1 + \dots + p_{r-1} + p_r). \end{aligned}$$

Budući da je $b^k - 1$ djeljivo s $b - 1$, za svaki $k = 1, \dots, r$, slijedi da je n djeljiv s d (koji dijeli $b - 1$) ako i samo ako d dijeli $(p_0 + \dots + p_r)$.

Da $b - 1$ zaista dijeli $b^k - 1$ lako provjeravamo množenjem:

$$\begin{aligned} (b - 1) (b^{k-1} + b^{k-2} + \dots + b + 1) &= b^k + b^{k-1} + \dots + b^2 + b - \\ &- b^{k-1} - \dots - b^2 - b - 1 = b^k - 1. \end{aligned}$$

Zadatak 7. Ustanovite jesu li brojevi $2405_{(7)}$, $81a9b_{(13)}$, $81a96_{(12)}$, $4354_{(6)}$ djeljivi s: a) 2, b) 3, c) 6.

3. Djeljivost s $2b - 1$

Pravilo o djeljivosti s 19 nije tako dobro poznato kao osnovna pravila djeljivosti iz prethodnog odjeljka. Ono glasi:

Broj $p_s p_{s-1} \dots p_1 p_0$ djeljiv je s 19 ako je (i samo ako je) broj $p_s p_{s-1} \dots p_1 + 2p_0$ djeljiv s 19.

Na primjer broj 152 djeljiv je s 19 ako je (i samo ako je) broj $15 + 4$ djeljiv s 19. Budući da je $15 + 4$ očito djeljivo s 19 slijedi da je i broj 152 djeljiv s 19. To kraće zapisujemo ovako:

$$152 \rightarrow 15 + 4 = 19. \text{ Dakle, } 19 \mid 152 \text{ jer } 19 \mid 19.$$

Problem 3. Jesu li brojevi 988, 2463 i 23902 djeljivi s 19 ?

Rješenje:

$$988 \rightarrow 98 + 16 = 114 \rightarrow 11 + 8 = 19. \text{ Dakle, } 19 \mid 988 \text{ jer } 19 \mid 19.$$

$$2463 \rightarrow 246 + 6 = 252 \rightarrow 25 + 4 = 29. \text{ Dakle, } 19 \nmid 2463 \text{ jer } 19 \nmid 29.$$

$$23902 \rightarrow 2390 + 4 = 2394 \rightarrow 239 + 8 = 247 \rightarrow 24 + 14 = 38.$$

$$\text{Dakle, } 19 \mid 23902 \text{ jer } 19 \mid 38.$$

Sada ćemo i dokazati pravilo o djeljivosti s 19. Svaki broj n može se prikazati u obliku $n = 100p + 10q + r$ (npr. $2463 = 100 \cdot 24 + 10 \cdot 6 + 3$). S druge strane:

$$100p + 10q + r = 19(10p + q + r) - 9(10p + q + 2r)$$

odakle slijedi da je broj $100p + 10q + r$ djeljiv s 19 ako je (i samo ako je) broj $10p + q + 2r$ djeljiv s 19. No, to je nešto drukčije iskazano gornje pravilo.

Zadatak 8. Jesu li brojevi 437, 532, 1857 i 14326 djeljivi s 19 ?

Naravno, i pravilo o djeljivosti s 19 u dekadskom sustavu može se poopćiti na sve ostale sustave:

Broj $p_s p_{s-1} \dots p_1 p_{0(b)}$ djeljiv je s $2b - 1$ ako je (i samo ako je) broj $p_s p_{s-1} \dots p_{1(b)} + 2p_0$ djeljiv s $2b - 1$.

Dokaz slijedi iz činjenice da je:

$$b^2p + bq + r = (2b - 1)(bp + q + r) - (b - 1)(bp + q + 2r).$$

Zadatak 9. Koristeći se gornjom formulom, dokažite prethodno formulirano pravilo o djeljivosti s $2b - 1$ brojeva u b -zapisu.

Problem 4. Je li broj $1403_{(6)}$ djeljiv s $15_{(6)}$?

Rješenje:

$$1403_{(6)} \rightarrow 140_{(6)} + 6 = 140_{(6)} + 10_{(6)} = 150_{(6)} \rightarrow 15_{(6)}.$$

$$\text{Dakle, } 15_{(6)} \mid 1403_{(6)} \text{ jer } 15_{(6)} \mid 15_{(6)}.$$

Zadatak 10. Jesu li brojevi $454_{(8)}$ i $1206_{(8)}$ djeljivi sa $17_{(8)}$?