

DEFINICIJE U MATEMATICI

ZVONIMIR ŠIKIĆ, Zagreb

Potaknut člankom Z. Šporera, „O definicijama u matematici”, Matematika 1 (1987) 5–11, koji je s punim pravom upozorio na neke osnovne metodičke pogreške pri upotrebi definicija u osnovnoj i srednjoj školi i koji je osim toga dao dobre upute za njihovo ispravljanje, želio bih ovdje još ponešto reći o definicijama u matematici.

1. UVOD

Prema starijim logikama definicija je određenje vrste njenim rodom i specifičnom razlikom. Tipičan je primjer definicija čovjeka kao racionalne životinje. Životinja je rod, dok je racionalnost specifična razlika koja čovjeka karakterizira unutar životinjskog mu roda. Teško je u stručno-znanstvenoj praksi ograničiti se na ovaj strogo propisani, i stoga često ograničavajući, aristotelovski oblik definicija. Zato ćemo u mnogim logikama naići na slabiji zahtjev, kojim nije strogo određen logičko-gramatički oblik definicije, nego su samo dana četiri tradicionalna pravila koja svaka definicija mora zadovoljavati:

1. Definicija mora razotkriti bit onoga što definiramo.
2. Definicija ne smije biti cirkularna.
3. Definicija ne smije biti negativna, ako može biti pozitivna.
4. Definicija ne smije biti izražena slikovitim ili na drugi način dvosmislenim jezikom.

Dakle, Ujevićev inače rječit i profinjen uvid:

„Pjesnici su čuđenje u svijetu”

ne bismo smatrali definicijom pjesnika jer ne udovoljava 4. pravilu, dok ova definicija topološkog pojma:

„Topološki pojam je onaj koji nije algebarski.”

ne bi valjala jer krši 3. pravilo. Drugo pravilo krši svaka definicija kojom definiramo neki pojam upotrebljavajući sam taj pojam, ili pak upotrebljavajući neke druge pojmove koji su definirani upotrebljavajući sam taj pojam itd. Na primjer, definicije

„Vrijednost robe je veličina rada opredmećenog u robi.”

„Cijena robe je (monetarni) ekvivalent njene vrijednosti.”

cirkularne su, kada znamo da se u okviru ekonomske teorije u kojoj ih nalazimo (radna teorija vrijednosti) veličina rada opredmećenog u robi određuje, između ostalog, i njenom cijenom. (One vrlo vjerojatno krše i 4. pravilo.)

Što se tiče 1. pravila, ono je najmanje jasno, jer je vrijednosno obojeno. Definicija:

„Čovjek je racionalna životinja”

udovoljava 1. pravilu ako smatramo da je „bit ljudskosti racionalnost”. Ako pak smatramo da je „bit ljudskosti rad” onda gornja definicija krši 1. pravilo i stoga ne valja, a točna definicija glasi:

„Čovjek je radna životinja”.

Naravno i ta se definicija može dovesti u pitanje pa će čovjek možda postati „igrajuća životinja” ili „smiješća životinja” itd. (naravno sve to pod pretpostavkom o neupitnoj životinjskoj biti čovjeka, koja također može biti dovedena u pitanje). Uočimo međutim da sve navedene definicije čovjeka, iako možda određuju različite pojmove, određuju pojmove s jednom te istom ekstenzijom, tj. iako je ljudska bit svakom od tih definicija različito određena skup pojedinih individua koje su svakom od tih definicija obuhvaćene uvijek je isti. On je uostalom određen i ovom definicijom:

„Čovjek je bespernata dvonožna životinja”.

koju će, vjerujemo, svi prihvatiti kao eklatantni primjer kršenja 1. pravila.

Zadnji je uvid instruktivan za našu temu koju čine definicije u matematici. Naime, matematika se upravo i bavi ekstenzijama, pa u matematici definirati neki pojam i ne znači ništa drugo nego odrediti njegovu ekstenziju (mogli bismo reći da je ona njegova matematička bit). Dakle, gledano matematički, sve navedene definicije čovjeka su dobre i međusobno ekvivalentne. Drugim riječima, sve one dobro definiraju „matematičku bit čovjeka” (na stranu to što ona možda nikoga ne zanima, pa je uostalom u matematici niti ne razmatramo). Ukratko, nejasno 1. pravilo u matematici nije ni važno.

Napominjemo još da se definicija, ukoliko „razotkriva bit definiranoga pojma”, tradicionalno zove *realnom*. Onu koja to ne čini trebamo dakle smatrati *nerealnom*. Matematičke definicije možda ipak možemo smatrati *realnima*, iako određuju samo ekstenziju definiranoga pojma, budući da je baš ekstenzija pojma njegova *matematička bit*.

No s druge strane, tradicionalno se u opreku spram realnih definicija stavljaju *nominalne* tj. one definicije kojima novi simbol uvodimo naprosto kao pokratu (i koji kao takav valjda i ne može imati neku bit), a matematičke su definicije te vrste. Sjetimo se, naime, da je za definiciju nekog matematičkog pojma u okviru neke matematičke teorije besmisleno pitati je li ona istinita. Naravno, možemo odgovoriti da je ona trivijalno istinita samim tim što je definicija, i pomisliti da onaj koji to pita ne zna da je riječ o definiciji. To je karakteristika nominalnih definicija, za razliku od realnih, čija istinitost može biti smisleno upitna. To pokazuje sama činjenica da realnu definiciju možemo pobijati; sjetimo se čovjeka kao racionalne spram čovjeka kao radne životinje. Dakle, ako nešto u matematici odgovara realnim definicijama onda su to prije teoremi nego definicije.

Sve u svemu razmotrene distinkcije u matematici nemaju operativnog smisla. Povrh toga i prihvatljiva pravila 2–4. nisu nam od neke koristi. Lako je naći primjer

„definicije” koja udovoljava tim pravilima, a da ipak nije nikakva definicija. Evo jednog Suppesovog primjera. Definirajmo u aritmetici operaciju $*$ na slijedeći način:

$$(1) \quad x * y = z \text{ ako i samo ako } x < z \text{ i } y < z.$$

Ta „definicija” nije cirkularna, nije negativna, a nije ni izražena slikovitim ili na drugi način dvosmislenim jezikom. Ona ipak ne valja. Naime

$$\text{dakle} \quad 1 < 3 \quad \text{i} \quad 2 < 3$$

$$1 * 2 = 3.$$

S druge strane

$$\text{dakle} \quad 1 < 4 \quad \text{i} \quad 2 < 4$$

1 * 2 = 4

$$\text{Zaključujemo:} \quad 3 = 4.$$

3 = 4.

Sada je jasno zašto Suppesova definicija ne valja. Kontradiktorna je. Dakle, tradicionalna pravila su toliko općenita da su manje-više neupotrebljiva. Ona ne određuju definiciju čak ni toliko da bi isključila kontradiktorne definicije. Upotreb- ljive kriterije za definicije tek trebamo naći, tradicionalna pravila to sigurno nisu. Naravno, posao nam je olakšan time što razmatramo relativno jednostavne mate- matičke definicije.

2. DEFINICIJE U MATEMATICI

Neka nam polazište bude to da je matematička definicija iskaz matematičke teorije kojim se utvrđuje značenje nekog izraza te teorije. Naravno, definicija to postiže tako što izraz koji se definira, tzv. *definiendum*, objašnjava drugim izrazima čija su značenja već poznata, tzv. *definiensom*. Međutim:

- 1) Na koji način definicija objašnjava definiendum?
- 2) Kako su poznata značenja definiensa?
- 3) Kakav je (uopće) iskaz definicija?

To su osnovna pitanja.

Što se tiče zadnjeg pitanja, uočimo da je definicija iskaz matematičke teorije kojoj pripada. S obzirom da svaku matematičku teoriju možemo opisati kao aksi- omatsku teoriju u okviru logike prvoga reda s jednakošću, i definicije ćemo smatrati iskazima prvoga reda. To su iskazi izgrađeni od osnovnih matematičkih izraza te aksiomske teorije, zajedno s jednakošću, a uz pomoć varijabli (x, y, z itd.), logičkih veznika (\wedge tj. „i”, \vee tj. „ili”, \neg tj. „nije”, \rightarrow tj. „ako-onda” i \leftrightarrow tj. „ako i samo ako”) i kvantifikatora ($\forall x$ tj. „za svaki x vrijedi”, $\exists x$ tj. „postoji x takav da vrijedi” i sl. za y, z itd.).

Što se tiče drugog pitanja, tj. kako su poznata značenja izraza čije poznavanje u definiciji pretpostavljamo, možemo odgovoriti da su ona poznata iz definicija tih izraza. Naravno time pretpostavljamo da su nam poznata značenja nekih drugih izraza kojima se koristimo kao definiensima u tim drugim definicijama. I tako dalje. Ali negdje napokon moramo stati! Naravno, svaka aksiomska teorija

sadrži određen broj nedefiniranih izraza (koji su oznake nedefiniranih pojmova te teorije). To su osnovni (primitivni) izrazi te aksiomatske teorije, pomoću kojih se definiraju svi ostali. Obično se smatra da su značenja osnovnih izraza aksiomatske teorije određena upravo aksiomima te teorije (čak se kaže da ih oni implicitno *definiiraju*). Taj ćemo problem razmotriti kasnije. Za sada pretpostavljamo da su značenja osnovnih izraza na neki način poznata i da su definicije novih izraza dane redom tako da definiens prve definicije sadrži samo osnovne izraze, definiens druge definicije osnovne izraze i izraz definiran prvom definicijom, definiens treće definicije osnovne izraze i izraze definirane s prve dvije definicije itd.

Preostalo nam je prvo pitanje. Na koji način svaka definicija u našem nizu definicija objašnjava svoj definiendum? Zahtjevat ćemo da ona bude objašnjenje u veoma jakom smislu: definicija mora omogućiti eliminaciju definiranog izraza iz svakog iskaza teorije i osim toga ne smije pojačati deduktivnu snagu teorije (tj. teorija zbog definicije ne smije imati posljedica kojih bez nje ne bi imala). Ta dva osnovna kriterija prvi je formulirao poljski logičar S. Lesniewski (1886–1939).

ELIMINABILNOST DEFINIENDUMA. *Ako je formula D definicija, kojom u formaliziranu teoriju uvodimo novi izraz, i ako je A bilo koja formula u kojoj se javlja taj novi izraz, onda postoji formula B , u kojoj se novi izraz ne pojavljuje, takva da je $D \rightarrow (A \leftrightarrow B)$ dokaziva formula teorije.*

NEKREATIVNOST DEFINICIJE. *Ako je formula D definicija kojom u formaliziranu teoriju uvodimo novi izraz, i ako je formula T , u kojoj se novi izraz ne pojavljuje, nedokaziva formula, onda je i formula $D \rightarrow T$ nedokaziva.*

(Uočite da je nekonzadiktornost posebni slučaj nekreativnosti; onaj u kojemu je formula T kontradikcija. Dakle tako smo isključili i kontradiktorne „definicije“.)

3. PRAVILA ZA PRAVE DEFINICIJE

U prethodnom smo odjeljku upoznali kriterije koje definicija mora zadovoljavati u okviru neke matematičke teorije. Međutim nismo dali nikakva pravila za formiranje takvih pravih definicija. To ćemo učiniti u ovom odjeljku. Da bismo olakšali praćenje izlaganja sve ćemo relevantne pojmove kao i primjene tih pravila ilustrirati u jednoj konkretnoj, relativno jednostavnoj matematičkoj teoriji.

Naša će teorija biti elementarna aritmetika, čiji su osnovni izrazi individualne konstante 0 i 1, operacijski simboli + i \cdot (koji označavaju operacije zbrajanja i množenja) i relacijski simbol < (koji označava relaciju „manje od“). Aksiom naše teorije prepoznatljive su aritmetičke istine:

- (1) $(\forall x) (\forall y) (x + y = y + x)$
- (2) $(\forall x) (\forall y) (x \cdot y = y \cdot x)$
- (3) $(\forall x) (\forall y) (\forall z) [(x + y) + z = x + (y + z)]$
- (4) $(\forall x) (\forall y) (\forall z) [(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)]$
- (5) $(\forall x) (\forall y) (\forall z) [x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)]$
- (6) $(\forall x) (x + 0 = x)$
- (7) $(\forall x) (x \cdot 1 = x)$

- (8) $(\forall x) (\exists y) (x + y = 0)$
 (9) $(\forall x) (\forall y) [y \neq 0 \rightarrow (\exists z) (x = y \cdot z)]$
 (10) $(\forall x) (\forall y) [x < y \rightarrow \neg (y < x)]$
 (11) $(\forall x) (\forall y) (\forall z) [(x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z]$
 (12) $(\forall x) (\forall y) [x \neq y \rightarrow (x < y \vee y < x)]$
 (13) $(\forall x) (\forall y) (\forall z) [y < z \rightarrow (x + y < x + z)]$
 (14) $(\forall x) (\forall y) (\forall z) [(0 < x \wedge y < z) \rightarrow x \cdot y < x \cdot z]$
 (15) $0 \neq 1$

Novi relacijski simbol \leq , definiramo na slijedeći način

$$(\text{def } \leq) \quad x \leq y \leftrightarrow (x = y \vee x < y)^1.$$

Ta eksplicitna definicija, koja postulira ekvivalenciju atomarnog iskaza koji sadrži novi simbol \leq , s iskazom koji sadrži samo stare (poznate) simbole, očito omogućava eliminaciju novog simbola iz svakog iskaza koji ga sadrži. Koristeći se nekim osnovnim rezultatima matematičke logike lako se dokazuje i to da ta definicija nije kreativna. To uostalom vrijedi općenito, za svaku definiciju te vrste. Takve, najjednostavnije definicije (koje udovoljavaju oba naša kriterija; eliminabilnost i nekreativnost) zovemo eksplicitnim definicijama relacijskih simbola. Možemo ih opisati ovim pravilom

PRAVILO ZA EKSPPLICITNO DEFINIRANJE RELACIJSKIH SIMBOLA

Ekvivalencija oblika

$$R(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow A$$

eksplicitna je definicija (atomarnog) n-mjesnog relacijskog simbola R u nekoj formaliziranoj teoriji ako vrijedi;

- (i) formula A izgrađena je od osnovnih i prethodno definiranih izraza,
- (ii) varijable x_1, \dots, x_n međusobno su različite,
- (iii) formula A ne sadrži slobodne varijable različite od x_1, \dots, x_n .

Zahtjev (i) dovoljno govori sam za sebe. Zahtjev (ii) osigurava da definicija uistinu bude definicija n-mjesnog relacijskog simbola. Na primjer, definicijom

$$x \leq x \leftrightarrow (x = x \vee x < x)$$

nije definirana 2-mjesna relacija nego 1-mjesna relacija, tj. svojstvo, u ovom slučaju univerzalno svojstvo koje ima svaki broj. Zahtjev (iii) isključuje definicije poput ove:

$$(\text{def } M) \quad M(x) \leftrightarrow x < y.$$

Lako uvidamo da ovakve definicije moramo isključiti, jer iz njih lako izvodimo kontradikciju. Na primjer, iz (def M) slijede formule

$$x < y \rightarrow M(x) \quad \text{i} \quad M(x) \rightarrow x < y$$

to jest prema kvantifikacijskim pravilima logike prvoga reda²

$$(\exists y) (x < y) \rightarrow M(x) \quad \text{i} \quad M(x) \rightarrow (\forall y) (x < y),$$

¹ Ovdje, i inače u tekstu, koristimo se uobičajenom konvencijom prema kojoj nekvantificirane formule smatramo univerzalno kvantificiranima.

² Uz konvenciju navedenu u opasci 1).

odakle slijedi očita kontradikcija

$$(\exists y) (x < y) \rightarrow (\forall y) (x < y).$$

S druge strane zahtjev (iii) dopušta mogućnost da se u formuli A pojavljuju samo neke od ukupnog broja varijabli x_1, \dots, x_n . Tako bi u našoj ilustrativnoj teoriji ovo bila prava eksplicitna definicija:

$$(\text{def } P) \quad P(x, y) \leftrightarrow x > 0.$$

Uostalom, takva se definicija uvijek može zamijeniti ekvivalentnom u kojoj se na desnoj strani pojavljuju sve varijable. Na primjer

$$(\text{def } P) \quad P(x, y) \leftrightarrow (x > 0 \wedge y = y).$$

Prijeđimo sada na primjere definiranja individualnih konstanti i operacijskih simbola. Novu individualnu konstantu 2 uvodimo u našu ilustrativnu teoriju ovom definicijom

$$(\text{def } 2) \quad 2 = 1 + 1$$

Eliminabilnost definienduma (tj. konstante 2) i nekreativnost definicije i ovdje su očiti. Međutim, taj najjednostavniji način definiranja konstante eksplicitnom jednakošću, kojoj je s jedne strane samo konstanta koju definiramo, a s druge term izgrađen od poznatih konstanti i poznatih operacijskih simbola, nije dostatan za uobičajene potrebe definiranja individualnih konstanti. Na primjer, u našoj ilustrativnoj teoriji ne možemo na taj način definirati individualnu konstantu $\frac{1}{2}$, tj. takvu konstantu za koju vrijedi

$$\left(\text{def } \frac{1}{2}\right) \quad 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Naravno, iskaz $\left(\text{def } \frac{1}{2}\right)$ možemo smatrati (implicitnom) definicijom konstante $\frac{1}{2}$, pod uvjetom da nije kreativan i da omogućava eliminaciju definienduma $\frac{1}{2}$ iz svakog drugog iskaza naše teorije.

Prije svega uočimo da u našoj teoriji uz pomoć aksioma (9), (12) i (14), možemo dokazati

$$(16) \quad (\exists!x) 2 \cdot x = 1,$$

tj. da postoji točno jedan broj koji zadovoljava $\left(\text{def } \frac{1}{2}\right)$. Iz (16) uz pomoć elementarne logike slijedi da je $\left(\text{def } \frac{1}{2}\right)$ ekvivalentna sa

$$\left(\left(\text{def } \frac{1}{2}\right)\right) \quad x = \frac{1}{2} \leftrightarrow 2 \cdot x = 1.$$

No, uz pomoć te ekvivalentne formulacije, lako dokazujemo eliminabilnost definienduma $\frac{1}{2}$.

Naime, svaka formula $F\left(\frac{1}{2}\right)$ u kojoj se pojavljuje konstanta $\frac{1}{2}$ ekvivalentna je sa formulom

$$x = \frac{1}{2} \rightarrow F(x),$$

koja je zbog $\left(\left(\text{def } \frac{1}{2}\right)\right)$ ekvivalentna s formulom

$$2 \cdot x = 1 \rightarrow F(x).$$

No, u zadnoj se formuli ne pojavljuje konstanta $\frac{1}{2}$ tj. $\left(\left(\text{def } \frac{1}{2}\right)\right)$ omogućava njevu eliminaciju.

Nekreativnost definicije $\left(\text{def } \frac{1}{2}\right)$ slijedi iz (16) elementarnom logičkom argumentacijom.

Uočimo da je dokazivost teorema (16) bila ključna za korektnost definicije $\left(\text{def } \frac{1}{2}\right)$. Da nije dokazivo *postojanje* broja s definicionim svojstvom, kao i njegova *jedinstvenost* naša bi definicija bila kreativna.

Na primjer, ova „definicija”

$$(? \text{ def } \sqrt{2}) \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$

je kreativna jer se u našoj ilustrativnoj teoriji ne može dokazati formula

$$(\exists x)(x \cdot x = 2),$$

iako je baš ona neposredna posljedica „definicije”. S druge strane i ova je „definicija” kreativna

$$(? \text{ def } -1) \quad (-1) \cdot (-1) = 1$$

budući da se u našoj teoriji ne može dokazati da je -1 jedini broj x sa svojstvom $x \cdot x = 1$, jer iz (7) slijedi da to svojstvo ima i broj 1, pa (? def -1) povlači (kreativnu) kontradikciju $-1 = 1$.

Gornja razmatranja o definiranju individualnih konstanti upućuju na ovo pravilo:

PRAVILO ZA DEFINIRANJE INDIVIDUALNIH KONSTANTI. *Formula $D(c)$, definicija je individualne konstante c u nekoj formaliziranoj teoriji ako vrijedi:*

- (i) *formula $D(c)$ izgrađena je od osnovnih i prethodno definiranih izraza i konstante c ,*
- (ii) *u formuli $D(c)$ ne pojavljuju se slobodne varijable,*
- (iii) *formula $(\exists!x) D(x)$ izvediva je iz aksioma i prethodnih definicija.*

Ako je definicija $D(c)$ oblika $c = t$, gdje je t term u kojem se ne pojavljuje c , onda definiciju zovemo eksplicitnom (zahtjev (iii) u tom je slučaju automatski ispunjen).

Da je definiendum svake definicije formirane u skladu s pravilom eliminabilan da ona sama nije kreativna dokazuje se kao i u slučaju definicije $\left(\text{def } \frac{1}{2}\right)$. Naime, iz zahtjeva (ii) i (iii) slijedi da je $D(c)$ ekvivalentno sa

$$(\text{def } c) \quad x = c \leftrightarrow D(x).$$

S druge strane, svaka formula $F(c)$, u kojoj se pojavljuje konstanta c , ekvivalentna je s formulom

$$x = c \rightarrow F(x),$$

koja je prema (def c) ekvivalentna s formulom

$$D(x) \rightarrow F(x).$$

No, u toj se formuli ne pojavljuje konstanta c , što konačno znači da definicija omogućava njenu eliminaciju. Nekreativnost definicije formirane u skladu s našim pravilom slijedi iz zahtjeva (i), (ii) i (iii) uz pomoć elementarne logike.³

Definiranje individualnih konstanti zapravo je rudimentarna varijanta definiranja operacijskih simbola (ako konstantu razumijemo kao 0-mjesni operacijski simbol). Pređimo, dakle, s te rudimentarne varijante na definiranje pravih operacijskih simbola. Novi operacijski simbol ² (kvadriranje) uvodimo u našu ilustrativnu teoriju ovom definicijom

$$(\text{def } ^2) \quad x^2 = x \cdot x$$

Eliminabilnost definienduma i nekreativnost takve eksplicitne jednakosti, kojoj je s jedne strane sam definiendum dok joj je s druge strane term, izgrađen od varijabli na koje djeluje novi operacijski simbol (u našem slučaju samo x), te pozitivnih konstanti i operacijskih simbola (u našem slučaju samo \cdot), očita je i u ovom slučaju. Međutim, kao i ranije, taj najjednostavniji način definiranja operacijskih simbola nije dostatan. Na primjer u našoj ilustrativnoj teoriji tako se ne može definirati operacijski simbol $-$ (oduzimanje). Naravno možemo ga definirati implicitnom definicijom

$$(\text{def } -) \quad y + (x - y) = x.$$

Uvjeti pod kojima će definiendumi takovih definicija biti eliminabilni, a one same nekreativne analogni su onima za individualne konstante. Opisujemo ih sljedećim pravilom:

PRAVILO ZA DEFINIRANJE OPERACIJSKIH SIMBOLA. Formula $D(o(x_1, \dots, x_n))$ definicija je n -mjesnog operacijskog simbola o u nekoj formaliziranoj teoriji ako vrijedi:

- (i) formula $D(o(x_1, \dots, x_n))$ izgrađena je od osnovnih i prethodno definiranih izraza i atomarnog terma $o(x_1, \dots, x_n)$,
- (ii) varijable x_1, \dots, x_n međusobno su različite

³ Naime, kada bi $D(c) \rightarrow T$ bila dokaziva formula onda bi i T bila dokaziva formula (budući da je $(\exists!x) D(x)$ dokazivo prema (iii)).

(iii) u formuli $D(o(x_1, \dots, x_n))$ ne pojavljuju se varijable različite od x_1, \dots, x_n ,

(iv) formula $(\exists!z) D(z)$ izvediva je iz aksioma i prethodnih definicija.

Ako je definicija $D(o(x_1, \dots, x_n))$ oblika $o(x_1, \dots, x_n) = t$, gdje je t term u kojem se ne pojavljuje operacijski simbol o , onda definiciju zovemo eksplicitnom (zahtjev (iv) u tom je slučaju automatski ispunjen).

Definicija (def -) u skladu je s našim pravilom budući da su zahtjevi (i), (ii) i (iii) očigledno ispunjeni, a (iv) je neposredna posljedica aksioma naše teorije. Naime, zahtjev (iv) u slučaju (def -) glasi ovako

$$(\exists!z) y + z = x,$$

a to u našoj teoriji možemo dokazati uz pomoć aksioma (8), (12) i (13). Definicija (def ²) primjer je eksplicitne definicije operacijskog simbola.

Da je definendum svake definicije operacijskog simbola formirane u skladu s našim pravilom eliminabilan dokazujemo ovako. Zbog zahtjeva (iii) i (iv) definicija $D(o(x_1, \dots, x_n))$ ekvivalentna je sa

$$(\text{def } Do) \quad z = o(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow D(z)$$

S druge strane, svaka formula $F(o(y_1, \dots, y_n))$, u kojoj se pojavljuje operacijski simbol o , ekvivalentna je s formulom

$$z = o(x_1, \dots, x_n) \rightarrow F(z),$$

koja je prema (def Do) ekvivalentna s formulom

$$D(z) \rightarrow F(z).$$

No u toj se formuli ne pojavljuje operacijski simbol o , što konačno znači da definicija omogućava njegovu eliminaciju. Nekreativnost definicija operacijskih simbola formiranih u skladu s našim pravilom slijedi iz zahtjeva (i), (ii), (iii) i (iv), uz pomoć elementarne logike, argumentom analognim onome za individualne konstante (usp. opasku 3).

Suppesov primjer definicije operacije $*$, s početka ovoga članka, pokazuje kako narušavanje zahtjeva (iv) dovodi do kontradikcije (tj. do najgoreg slučaja kreativnosti). Razmotrite u tom svjetlu i sljedeću „definiciju“:

$$(? \text{ def } \surd) \quad \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x.$$

4. UVJETNE DEFINICIJE

Međutim, s definiranjem u matematici ne ide tako lako kako bismo mi to htjeli. Tko god je pokušao u elementarnoj aritmetici (dakle u našoj ilustrativnoj teoriji) definirati dijeljenje, morao se sukobiti s nulom kao djeliteljem. Razmotrimo taj problem, da bismo vidjeli kako će naša pravila proći u tom sukobu. Prirodna je ideja da operacijski simbol $:$, analogno operacijskom simbolu $-$, definiramo kao inverz:

$$(? \text{ def } :) \quad y \cdot (x : y) = x.$$

Nažalost ta „definicija“ nije prava. Ona ne zadovoljava naše pravilo za definiranje operacijskih simbola, i lako se vidi da je kontradiktorna. Na primjeru iz (? def :) slijedi

$$(\exists z) y \cdot z = x,$$

pa posebno vrijedi i

$$(\exists z) 0 \cdot z = 1,$$

što je u suprotnosti s dokazivim teoremom naše ilustrativne teorije

$$(17) \quad \neg (\exists z) 0 \cdot z = 1.$$

Problem je, naravno, u tome što (? def :) ne zadovoljava uvjet (iv) iz našeg pravila za definiranje operacijskih simbola. Naime, u našoj teoriji nije moguće dokazati

$$(\exists! z) y \cdot z = x,$$

jer to nije točno za $y = 0$. Budući da je to i jedini slučaj koji narušava zahtjev (iv), nameće se misao da definiciju korigiramo isključenjem tog slučaja. Dakle korigirana definicija izgledala bi ovako

$$(\text{def } :) \quad y \neq 0 \rightarrow y \cdot (x : y) = x.$$

Na isti način kao i ranije, možemo pokazati da ta definicija nije kreativna. Međutim, ona ne omogućava eliminaciju definienduma u svim slučajevima. Na primjer iz iskaza

$$1 : 0 = 1 : 0$$

definiendum : nije moguće eliminirati. Naravno, ona omogućava eliminaciju definienduma u svim „zanimljivim“ slučajevima, tj. u slučajevima koji ispunjavaju pretpostavku definicije, $y \neq 0$. Takve definicije zovemo uvjetnim definicijama i opisujemo ih ovim pravilom.

PRAVILO ZA UVJETNO DEFINIRANJE OPERACIJSKIH SIMBOLA.

Uvjetna definicija n-mjesnog operacijskog simbola o, u nekoj formaliziranoj teoriji, jest implikacija

$$U(x_1, \dots, x_n) \rightarrow D(o(x_1, \dots, x_n))$$

za koju vrijedi;

- (i) formula $U(x_1, \dots, x_n)$ izgrađena je od osnovnih i prethodno definiranih izraza, dok formula $D(o(x_1, \dots, x_n))$ osim njih sadrži i atomarni term $o(x_1, \dots, x_n)$,
- (ii) varijable x_1, \dots, x_n međusobno su različite,
- (iii) implikacija ne sadrži slobodne varijable različite od x_1, \dots, x_n ,
- (iv) formula $U(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (\exists! z) D(z)$ izvediva je iz aksioma i prethodnih definicija.

Lako se dokazuje da uvjetne definicije formirane u skladu s ovim pravilom nisu kreativne i da omogućavaju eliminaciju definienduma ukoliko je ispunjen uvjet. To ograničenje eliminacije stvara određene teškoće.

Razmotrimo, nešto detaljnije, što znači nemogućnost eliminacije definienduma u slučajevima kada nije ispunjena pretpostavka uvjetne definicije. Kao prvo, to znači da iskaze, u kojima eliminacija nije moguća, ne možemo ni dokazati ni opovrći

Na primjer, u našoj ilustrativnoj teoriji (def :) ne omogućava odluku o tome da li je

$$1 : 0 = 2 : 0 \quad \text{ili} \quad 1 : 0 = 3 : 0 \quad \text{itd.}$$

S druge strane, vrijednosti varijabli teorije prvoga reda objekti su onog područja kojim se ta teorija bavi. Budući da naša logika dopušta supstituciju bilo kojeg terma na mjesto varijable, to znači da svaki zatvoreni term (term bez varijabli) označava neki objekt razmatranoga područja. Dakle, u našoj ilustrativnoj teoriji $1 : 0$, $2 : 0$, $3 : 0$, itd. jesu brojevi, samo naša teorija o njima ništa ne zna. Taj zaključak koji moramo prihvatiti ako prihvaćamo (def :) i standardnu logiku, većina matematičara neće prihvatiti (iako misli da prihvaća i (def :) i standardnu logiku). Matematičar će teškoću najčešće otkloniti tako što će smatrati da izraz izgrađen od elemenata koji ne ispunjavaju uvjet ništa ne označava, ukoliko je term, ili nema smisla, ukoliko je iskaz. Dakle, u našoj ilustrativnoj teoriji $1 : 0$ ne označava ništa, a $1 : 0 = 1 : 0$ nema smisla. Prvi prigovor tom pristupu jest da njime revidiramo logiku. Naime, već smo upozorili da je osnovna pretpostavka logike prvoga reda, bez koje bi se ona znatno zakomplicirala, upravo to da svaki zatvoreni term označava neki objekt teorije kojoj pripada. Revizija logike ipak je krajnje rješenje, kojem pribjegavamo tek kad su sva druga iscrpljena. Međutim, čak ako se i odlučimo na taj krajnji korak naići ćemo na dodatne poteškoće. Zbog naše revizije logike, za mnoge iskaze nećemo moći odlučiti da li su uopće smisljeni ili nisu; na stranu njihova istinitost ili neistinitost. Na primjer, ako u teoriji prirodnih brojeva definiramo

$$g(n) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } n \text{ neparan ili je zbroj dvaju prostih brojeva} \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

onda ne znamo odlučiti da li je iskaz

$$(\forall n) (1 : g(n) = 1 : g(n))$$

smislen ili nije.

Druga mogućnost jest da značenje iskaza u kojem se javljaju elementi koji ne ispunjavaju uvjet definicije, naprosto *odredimo* konvencijom. Na primjer, uvede se konvencija da je $(\forall x) (x : 0 = 0)$. Tu se zapravo radi o takvoj reviziji uvjetne definicije, koja će je učiniti pravom definicijom (koja nije kreativna i omogućava eliminaciju definienduma). U našem primjeru, uvjetnu definiciju (def :) zamijenili bismo ovom pravom definicijom

$$(\text{def } :)_2 \quad (y \neq 0 \rightarrow y \cdot (x : y) = x) \wedge (y = 0 \rightarrow x : y = 0).$$

Ona nije kreativna i omogućava eliminaciju definienduma. Jedini njen nedostatak je što matematičari teško prihvaćaju konvenciju po kojoj je $x : 0 = 0$.

Alternativno konvencionalno rješenje, koje je matematičarima prihvatljivije, jest ono kojim se $x : 0$ proglašava objektom, ali izvan područja brojeva o kojemu govori naša ilustrativna teorija. Mogućnost da objekti naše teorije nisu samo brojevi iziskuje određene revizije u samoj teoriji. Prije svega, svaki aksiom i svaku definiciju treba formulirati tako da bude jasno da se ona odnosi na brojeve. To se najjednostavnije postiže tako da se teoriji doda osnovni predikatski simbol B (tj. „biti broj”), te da se aksiomi i definicije ovako preformuliraju:

$$(1) \quad (\forall x) (\forall y) [B(x) \wedge B(y)] \rightarrow x + y = y + x$$

$$(2) \quad (\forall x) (\forall y) [B(x) \wedge B(y)] \rightarrow x \cdot y = y \cdot x \quad \text{itd.}$$

$$(\text{def } \leq) \quad [B(x) \wedge B(y)] \rightarrow [x \leq y \rightarrow (x = y \vee x < y)] \quad \text{itd.}$$

Pored toga moramo dodati i nove aksiome koji osiguravaju da je zbroj i umnožak brojeva opet broj.

$$[B(x) \wedge B(y)] \rightarrow B(x + y)$$

$$[B(x) \wedge B(y)] \rightarrow B(x \cdot y).$$

Uvjetna definicija dijeljenja izgledala bi tada ovako

$$(def :)_3 \quad [B(x) \wedge B(y) \wedge y \neq 0] \rightarrow [y \cdot (x : y) = x]$$

U okviru tako revidirane teorije ne možemo dokazati

$$B(x : 0) \quad \text{tj.} \quad x : 0 \text{ je broj,}$$

ali ni

$$\neg B(x : 0) \quad \text{tj.} \quad x : 0 \text{ nije broj.}$$

Tako smo izašli iz intuitivno neprihvatljive situacije (u koju nas dovode dosadašnja rješenja koja čuvaju standardnu logiku) da $x : 0$ *moramo* zvati brojem. Na nama je da odlučimo da li to hoćemo ili nećemo, bez narušavanja standardne logike. Ako nećemo, uvesti ćemo u našu teoriju osnovnu konstantu ∞ i ovaj aksiom

$$\neg B(\infty),$$

pa ćemo, u okviru tako obogaćene teorije, dijeljenje definirati ovako

$$(def :)_4 \quad [B(x) \wedge B(y)] \rightarrow [(y \neq 0 \rightarrow y \cdot (x : y) = x) \wedge (y = 0 \rightarrow x : y = \infty)]$$

Definicija $(def :)_4$ smješta $x : 0$ van područja brojeva, za svaki broj x , i to je konačno mjesto kuda će $x : 0$ smjestiti većina matematičara.

Spomenimo, na kraju ove rasprave o uvjetnim definicijama, još i jedno teorijski vrlo značajno ali u matematičkoj praksi nepostojeće rješenje. Riječ je o standardnom logičkom svođenju operacija i konstanti na relacije. Ono se provodi tako da se umjesto konstante u teoriju uvede odgovarajuća jednomjesna relacija (tj. svojstvo), umjesto jednomjesne operacije odgovarajuća dvomjesna relacija, umjesto dvomjesne operacije odgovarajuća tromjesna relacija itd. Naravno, tako da sve što je bilo izrazivo i dokazivo pomoću konstanti i operacija bude izrazivo i dokazivo i pomoću odgovarajućih relacija. Takvo svođenje je moguće, a mi ćemo ga samo ilustrirati. Na primjer, konstante 0 i 1 mogli bismo u našoj ilustrativnoj teoriji zamijeniti predikatima N i J , a dvomjesne operacijske simbole $+$ i \cdot tromjesnim relacijskim simbolima S i P , uz odgovarajuću preformulaciju aksioma (1)–(15):

$$1) \quad S(x, y, u) \wedge S(y, x, v) \rightarrow u = v$$

$$2) \quad P(x, y, u) \wedge P(y, x, v) \rightarrow u = v$$

·
·
·

$$6) \quad N(y) \rightarrow S(x, y, x)$$

$$7) \quad J(y) \rightarrow P(x, y, x) \quad \text{itd.}$$

Čitalac je uočio da $N(x)$ izražava $x = 0$, da $J(x)$ izražava $x = 1$, da $S(x, y, z)$ izražava $x + y = z$, i da $P(x, y, z)$ izražava $x \cdot y = z$. Lako je u tome vidjeti opći

postupak, koji je primjenljiv u svakoj teoriji, i koji očito čuva izrazivost i dokazivost. Što se tiče našeg problema definiranja dvomjesne operacije $:$ (dijeljenje, u našoj ilustrativnoj teoriji), on se sada svodi na problem definiranja tromjesne relacije D , takve da $D(x, y, z)$ izražava $x : y = z$. Taj problem rješavamo ovom jednostavnom eksplicitnom definicijom, koja nije kreativna, omogućava eliminaciju definienduma i ne dira u standardnu logiku:

$$(\text{def } D) \quad D(x, y, z) \leftrightarrow \neg N(y) \wedge P(y, z, x).$$

Gledajući (def D) čitalac će se možda upitati, zbog čega je ta definicija dobra, a odgovarajuća operacijska varijanta

$$(\text{def } :)_5 \quad x : y = z \leftrightarrow y \neq 0 \wedge y \cdot z = x$$

ne valja, iako smo nju dobili običnom zamjenom relacije $D(x, y, z)$ s onim što ona izražava tj. sa $x : y = z$, i sličnom zamjenom $N(y)$ sa $y = 0$ i $P(y, z, x)$ sa $y \cdot z = x$. To će nam biti jasno kada točnije pogledamo zašto ne valja (def $:$)₅. Na primjer, iz (def $:$)₅ slijedi (kao poseban slučaj)

$$1 : 0 = z \leftrightarrow 0 \neq 0 \wedge 0 \cdot z = 1$$

odakle neposredno slijedi

$$\neg (1 : 0 = z)$$

tj. ne postoji z takav da je $1 : 0 = z$. To znači da konstanta $1 : 0$ ništa ne označava, suprotno kanonima logike, o čemu smo već govorili, i to ne valja. U slučaju (def D) analogni argument ne izaziva nikakve teškoće. Naime, iz

$$D(1, 0, z) \leftrightarrow N(0) \wedge P(0, z, 1)$$

slijedi

$$\neg D(1, 0, z)$$

tj. $1, 0$ i z nisu u relaciji D , ni za koji z , i to je sasvim u redu. Neki objekti stoje u određenoj relaciji dok drugi naprosto ne stoje. Nasuprot tome, u standardnoj logici operacije iz objekata generiraju objekte, a ne fantome označene znakovima koji ništa ne označavaju. Zato operacije stvaraju probleme, kojih s relacijama nema. Ipak, logički moguća eliminacija operacija i konstanti, u prilog relacija, ne koristi se u matematičkoj praksi jer bi je bitno zakomplicirala. Osim toga operacijski pristup ima veliku heurističku vrijednost. Znakovi koji ništa ne označavaju, kao $1 : 0, \sqrt{-1}$ itd. stvaraju probleme i zato nas upravo sile da uvedemo nove matematičke objekte ∞, i itd. koji su njihove reference, i koji vode k novim i važnim matematičkim teorijama. Na primjer, ranije spomenuta „definicija”

$$(? \text{ def } \sqrt{\quad}) \quad \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x,$$

nije korektna u okviru naše ilustrativne teorije, ali je heuristički značajna, i u tom smislu produktivna, jer nas navodi da *izađemo izvan okvira naše teorije* i izgradimo obuhvatniju teoriju u kojoj će ona biti valjana definicija. Nevaljala produktivna definicija neke teorije može nas motivirati da samu teoriju podesimo definiciji umjesto da nju podešavamo teoriji. Ovdje se nećemo upuštati u daljnja razmatranja produktivnih „definicija”.

5. KONTEKSTUALNE DEFINICIJE

U svim dosadašnjim razmatranjima, bavili smo se definicijama koje su opisivale i imenovala određene objekte našeg područja razmatranja. Tako je (def 2) opisivala točno jedan broj i imenovala ga s 2, (def -) opisala je operaciju koja je inverzna zbrajanju i imenovala je s -, (def \leq) opisala je jednu relaciju među brojevima i imenovala je s \leq itd. Sve su te definicije bile pokrate, u tom smislu što smo odgovarajuće objekte, operacije i relacije mogli opisati i bez uvođenja definienduma, a sve u vezi s njima izraziti i bez imenovanja koja su provedena tim definicijama. Međutim, često se u matematici koristimo i pokratama u doslovnijem smislu. Na primjer, želimo li olakšati izlaganje u kojem se često javlja neki složeni izraz, vjerojatno ćemo uvesti pokratu za čitav taj izraz. Time nismo morali opisati niti imenovati ništa u našem području razmatranja. Naprosto smo uveli pokratu na čisto jezičkom nivou naše teorije bez ikakvog ukazivanja na nešto što bismo mogli naći u samoj strukturi koju ona opisuje. Praktična važnost takvih pokreta očita je, kao i njihova eliminabilnost i nekreativnost.

Katkada, međutim, izrazi matematičke teorije mogu izgledati kao da ukazuju na neke objekte, koje bi teorija trebala pretpostavljati, a zapravo ih je moguće u potpunosti razumjeti kao pokrate na jezičkom nivou teorije, i tako uvidjeti da teorija zapravo ne predstavlja objekte na koje njeni izrazi, čini se, ukazuju. Najpoznatiji takav primjer jesu skupovi u raznim matematičkim teorijama (a isto tako i u našim školama).

Uvedemo li u našu ilustrativnu teoriju oznaku za skupove, $\{x \mid A(x)\}$, i oznaku \in za relaciju pripadanja elementa skupu, da li smo time našu teoriju pretvorili u teoriju skupova tj. pretpostavlja li tada naša teorija da su skupovi objekti kojima se ona bavi? Odgovor, naravno, ovisi o tome što je za nas operacija $\{\}$ i relacija \in . To bismo znali ako bismo \in i $\{\}$ definirali u našoj teoriji. To, međutim, nije moguće. Kako se onda ti simboli uključuju u mnoge teorije u kojima ih nalazimo? Tako što se pretpostavlja intuitivno razumjevanje pojma skupa i operacije $\{\}$, kojom se skupovi grade u našoj teoriji, i osnovne relacije \in , koja skup povezuje s njegovim elementima. To intuitivno razumjevanje obično se drži elementarnim poznavanjem naivne teorije skupova, čiju točnu eksplikaciju daju aksiomi teorije skupova koji kodificiraju naše intuicije. Sa tog uobičajenog stanovišta izgleda da naša ilustrativna teorija, dodavanjem \in i $\{\}$, prestaje biti elementarna aritmetika, i postaje elementarna aritmetika s elementarnom (naivnom) teorijom skupova, a budući da i u drugim elementarnim matematičkim teorijama susrećemo \in i $\{\}$, čini se da je elementarna teorija skupova nezaobilazna. Valjda je zato i učimo već u osnovnoj školi.

Međutim, analiziramo li upotrebu simbola \in i $\{\}$ u bilo kojoj od spomenutih matematičkih teorija, najčešće ćemo ustanoviti da se u njenim iskazima term oblika $\{x \mid F(x)\}$ uvijek nalazi desno od relacijskog simbola \in , koji se pak uvijek nalazi lijevo od terma toga oblika. S druge strane, svaku takvu kombinaciju simbola \in i $\{\}$ možemo tumačiti na ovaj način:

(S) „ $y \in \{x \mid F(x)\}$ ” je zapis za „ $F(y)$ ”.

Naravno, time same za sebe ne objašnjavamo ni \in ni $\{\}$, nego objašnjavamo značenje čitavog konteksta $y \in \{x \mid F(x)\}$ u kojem se javljaju oba simbola. Možda će čitalac pomisliti da ovakve *kontekstualne definicije* ne omogućavaju uvođenje standardnih pojmova „teorije skupova” kao što su \subseteq (podskup), \cap (presjek),