

# 3.

## Formalna logika i aritmetika

*Zvonimir Šikić, Zagreb*

Ovaj kratki povijesni pregled odnosa formalne logike i aritmetike, pisan je uglavnom sa logičkog stajališta. Stoga krenimo s pogledom na razdoblje početo, za logiku važnim, Booleovim radovima.

Tridesetih i četrdesetih godina 19. stoljeća formalna se logika uglavnom razvija u Engleskoj proširivanjem skolastičke silogistike a zahvaljujući autorima kao što su W. Hamilton i A. DeMorgan (kvantifikacija predikata, negativni termi, ispitivanje odnosa kopule i općih relacija). Karakteristični su pokušaji da se u izučavanju formalne logike, kao znanosti koja istražuje zakone kvalitete, primijene matematičke metode analize koje su se pokazale vrlo plodnim i uvjerljivim u izučavanju zakona kvantitete. Krajnji cilj bilo bi stvaranje odgovarajuće simbolike i oblikovanje zakona njezina manipuliranja po uzoru na aritmetiku.

Ti pokušaji imaju korijen u ranijim razdobljima i u drugim sredinama (G. W. Leibniz), no prvi pravi uspjeh postignut je 1847. Booleovim radom *Mathematical Analysis of Logic*. G. Boole je pokazao da se osnovne operacije s pojmovima (operacije mišljenja, po G. Booleu) mogu prikazati aritmetičkim operacijama  $+$ ,  $\cdot$ ,  $-$ , a osnovni pojmovi svega i ničega brojevima 1 i 0, tako da se te operacije pokoravaju upravo aritmetičkim zakonima (zakonima operiranja s kvantitetama) uz dodatni zakon:  $x^2 = x$  (nazvan

principom tautologije), koji je karakterističan i distinktivan za operacije s kvalitetama. Logika pojmova postala je specijalna aritmetika, a G. Boole je tako i shvaća. Što je zaključak? Premise su jednadžbe iz kojih se aritmetičkim operacijama mogu dobivati druge jednadžbe, koje su, dakle, konkluzije aritmetiziranog zaključivanja. Problem logičke interpretacije dobivenih jednadžbi rješava se svodenjem jednadžbe na normalni oblik primjenom Taylorove formule karakteristične za tu ( $x^2 = x$ ) — aritmetiku:  $f(x) = f(1)x + f(0)(1 - x)$ . Smatralo se da je tom analizom logika pojmova dobila jednostavnost, sigurnost i općenitost aritmetike, tj. postala je dobro (čitaj: aritmetički) zasnovana.

Neinterpretirane jednadžbe u slijedu dokaza smetale su čisto logičkom razumijevanju osnovnih zakona pa je počelo „čišćenje od aritmetike” (G. Boole, W. S. Jevons, C. S. Pierce, J. Venn, E. Schröder)<sup>1</sup>. Konačni rezultat je Boole-Schröderova algebra koja je zapravo logika pojmova, a istodobno i logika jednomjesnih propozicionalnih funkcija (od G. Boolea dalje), kao i logika propozicija (od C. S. Piercea i E. Schrödera dalje). Potrebno je reći da termini *propozicionalna funkcija* i *propozicija* unose poglede i sadržaje koji u tom razdoblju nisu tematizirani (v. fusnotu 2). U duhu razdoblja koje prikazujemo bolje je reći da logika primarnih i sekundarnih propozicija ili posebno kategorički i hipotetički silogizam podliježu istim, Boole-Schröderovim zakonima.

To čišćenje nije bitno promijenilo obilježja zasnivanja formalne logike (što se često pomišlja i govori na osnovi kasnijeg shvaćanja redukcije matematike, logističkog ili formalističkog); ono je bitno utjecalo na karakter matematike. Naime, Boole-Schröderova algebra zasnovana je, kao apstraktni matematički sustav neovisan o pojedinoj njegovoj interpretaciji, metodom dedukcije iz malog broja pretpostavki, metodom koja sama postaje karakteristika matematike neovisno o kvantitativnom ili nekom drugom obilježju predmeta istraživanja. Međutim, sama metoda postaje paradoksalna ako je sistem koji se zasniva formalna logika: matematičke se dedukcije neizbježno temelje na zakonima koji se formalnom logikom tek zasnivaju. Čiš-

<sup>1</sup> Karakterističan je naslov rada W. S. Jevonsa: *Pure Logic or the Logic of Quality apart from Quantity*.

ćenje formalne logike od aritmetike nije stoga dovelo do čišćenja od matematike, ono je rezultiralo stvaranjem čiste matematike. U tom smislu je G. Boole otac čiste matematike i nečiste matematičke logike.<sup>2</sup> Ta razmatranja vode nas u novu epohu razvoja odnosa formalne logike i aritmetike pa ovdje završavamo prikaz epohe koja formalnu logiku početno smatra specijalnom aritmetikom, zatim specijalnim slučajem čiste matematike i prema tome uvodi naziv matematička analiza logike, koji odgovara nazivu matematička logika ako smatramo da on označava matematiku logike.

Kritika infinitezimalnog računa i vraćanje matematičara problemu njegova zasnivanja, polovicom 19. stoljeća, jasno su ukazali na potrebu zasnivanja aritmetike realnih brojeva. To je razdoblje kritičkog pokreta u matematici, razdoblje u kojem K. Weirstrass postaje vrhunski matematički autoritet (Hermite: *Notre maître à tous*), razdoblje u kojem se (neformalnom) logičkom analizom odbacuje intuicija prostora (i vremena) kao osnova aritmetike: u tom razdoblju R. Dedekind aritmetizira kontinuum<sup>3</sup> (realnih brojeva) da bi zatim postavio i problem geneze samih prirodnih brojeva, ovim riječima: „Kada aritmetiku (algebru, analizu) nazivam samo jednim dijelom logike time već iskazujem da pojam broja smatram sasvim nezavisnim od predstava ili intuicija prostora i vremena, da ga naprotiv, smatram neposrednim proizvodom čistih zakona mišljenja<sup>4</sup>.” Tu sazrijeva epoha koja nema sluha za onu logiku koja svoju sigurnost traži u aritmetici. Štoviše, to je razdoblje u kojem se sigurnost aritmetike (i matematike) traži u logici. Taj korjeniti obrat

---

<sup>2</sup> Nekakvo je čišćenje ipak obavljeno. Interpretacije Boole-Schröderove algebre (danas?) pokazuju da logika propozicija zasniva logiku pojmova i jednomjesnih propozicionalnih funkcija. S obzirom da je ta algebra s vremenom zanemarena u logičkim istraživanjima i nije povezivana s kasnijom logikom propozicija i propozicionalnih funkcija, mogla se odlučivost propozicionalne logike (É. L. Post) i logike jednomjesnih propozicionalnih funkcija (H. Behmann, W. Ackermann) u našem stoljeću dokazivati odvojeno, iako je u oba slučaja riječ o odlučivosti Boole-Schröderove algebre. Prošlo je još dosta vremena dok se V. W. Quine u svojim predavanjima počeo koristiti tim jednostavnim rezultatom.

<sup>3</sup> *Stetigkeit und Irrationale Zahlen*, 1872.

<sup>4</sup> *Was sind und was sollen die Zahlen?*, 1888.

zbio se ipak postupno usvajanjem i razvijanjem još jednoga aspekta kritičkog pokreta u matematici. Naime, vodeći matematičari s kraja 19. stoljeća imali su jasno zacrtan ideal matematičke teorije koja se izvodi iz malog broja (matematičkih) pretpostavki u skladu s logičkim načelima, ideal teorije koja odbacuje intuiciju čak i kao sredstvo demonstracije. Radikalniji mislioci poput G. Peana uvidjeli su da se tako shvaćena demonstrativna znanost (koja zahtijeva postuliranje i definiranje osnovnih entiteta<sup>5</sup> ali i radikalno čišćenje demonstrativnog postupka od pribjegavanja intuiciji) može realizirati samo unutar simboličkog jezika neopterećenog intuitivnim sadržajima prirodnih jezika. Taj je jezik matematika uglavnom već razvila. Međutim, G. Peano (u skladu s novim shvaćanjem demonstrativne znanosti) smatra da je potrebno učiniti i ono što u matematici nije provedeno: formalizirati i simbolički opisati samo matematičko argumentiranje. On je, dakle, konstruirao simboličku logiku i u formalizaciji matematike se koristio njome. Pomoću te logike zamijenjeno je izvođenje konkluzije iz premisa formalnim generiranjem odgovarajućeg simboličkog izraza iz drugih takvih izraza jednim kvazialgebarskim procesom.<sup>6</sup> Time je matematika oslobođena intuicije pretvorivši se u skup propozicija oblika *p implicira q* gdje je *p* konjunkcija postuliranih matematičkih tvrdnji (aksioma), a *q* njihova kvazialgebarski (mehanički) izvedena konsekvencija.<sup>7</sup>

Spoj tog aspekta kritičkog pokreta s onim što ga predstavlja Dedekind (i Cantor) a koji je ustvrdio da su osnovni konstituensi matematičkih propozicija (prirodni broj,

---

<sup>5</sup> G. Peano je izvanredno dobro upozorio na varljivost intuitivnog shvaćanja osnovnih matematičkih entiteta konstruiravši krivulju koja ispunjava dvodimenzionalno područje.

<sup>6</sup> Taj postupak kao da i nije bitno različit od Booleovog? Ipak, jest. Booleova logika je primijenjena čista matematika i njome je zasnovana. Peanova logika je osnova čiste matematike i nju zasniva.

<sup>7</sup> U tome je početak Hilbertova formalizma.

cijeli broj, racionalni broj, realni broj) logički definabilni,<sup>8</sup> upozorava na mogućnost da su  $p$  i  $q$  čisto logičke propozicije (propozicije izgrađene od logičkih konstanti), tj. da je matematika oslobođena intuicije postala skup čisto logičkih propozicija oblika  $p$  implicira  $q$ , odnosno da je matematika postala dio logike. Spajanje tih dvaju aspekata kritičkog pokreta u matematici i konsekventno prihvaćanje takvog stava proveo je B. Russell.

Napomena: Potrebno je spomenuti da je spajanje dvaju osnovnih aspekata kritičkog pokreta (koje smo identificirali s nastankom logicizma) provedeno ne samo prije Russellovih *The Principles of Mathematics* iz 1903, nego čak i prije Dedekindova rada iz 1888. i Peanova iz 1889. (koji naglašavaju samo jedan od dvaju aspekata). Logicizam je koncipiran već u *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* G. Fregea iz 1879. U tom je radu formalizirano matematičko argumentiranje u peanovskom smislu, ali u potpunosti kakvu Peano nikad nije postigao: u obliku teorije kvantifikacije izgrađena je (prvi put) logika prvog reda, postupkom analognim Dedekindovu zasnovan je i pojam niza prirodnih brojeva (prvi put) i to unutar već formaliziranog sistema argumentiranja. Zato se čini čudnim da prikaz tog razdoblja ne počinjemo Fregeom. Ipak, to je u skladu s *glavnim* slijedom razvoja ideja. Fregeov rad naišao je na potpuno nerazumijevanje te je dvadeset godina ostao nepoznat (kad je na njegovo značenje upozorio B. Russell), a postao je općepriznat tek pedeset godina nakon pojave u javnosti. (Zanimljivo je da je E. Abbe čitajući pozdravni govor pri izboru G. Fregea za izvanrednog profesora u Jeni predvidio upravo takav razvoj događaja rekavši da će *Begriffsschrift* bitno utjecati na matematiku, ali ne odmah, jer jedva da će netko i moći zauzeti stav prema tako originalnom spletu

---

\* Konstrukcija realnih brojeva pomoću Dedekindovih rezova (aritmetizacija kontinuuma) trebala je pokazati logičku definabilnost realnih brojeva pomoću racionalnih. Logička definicija racionalnih brojeva pomoću prirodnih također je Dedekindova zasluga, kao i svodenje pojma prirodnog broja na logički pojam lanca apstrahiranjem prirode njegovih elemenata. Mogućnost logičkog zasnivanja procesa apstrakcije pomoću pojma sličnosti skupova Cantorovo je djelo. Zanimljivo je da Dedekindov pojam lanca (u njegovom radu iz 1888) anticipira Peanovu aksiomatiku prirodnih brojeva iz *Arithmetices Principia nova methodo exposita*, 1889. Međutim, svaki od tih dvaju radova naglašava upravo jedan od dva spomenuta aspekta kritičkog pokreta u matematici.

Tako G. Peano postulira princip matematičke indukcije (u obliku formalnog izraza), dok ga R. Dedekind (neformalno) dokazuje kao posljedicu (čisto logičkih) svojstava lanaca.

G. Peano nije poznavao Dedekindov rad. Ipak, njegova aksiomatika nije samonikla. Ona je u neformalnom obliku i u općim crtama dana u Grassmannovoj *Lehrbuch der Arithmetik* iz 1861, kako kaže sam Peano (on je uostalom jedan od rijetkih matematičara koji su uočili i javno propagirali značaj Grassmannova rada, osobito u geometriji).

ideja.) Ima više razloga tom nerazumijevanju: Fregeov rad *vremenski* pripada Booleovoj epohi. Frege nije poznavao Booleov rad te nije mogao eksplicitno upozoriti na radikalnu razliku njegova (logicističkog) i Booleova pristupa. Nadalje, naslov njegova djela protumačen je (u dobu u kojem je objavljen) bulovski, kao aritmetiziranje logike. Zato je Schröder recenzirajući *Begriffsschrift*, u *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 25 (1880), uspoređivao Booleovu i Fregeovu notaciju i zaključio da je Booleova bolja jer je uzeta iz aritmetike, ali je i pogrešno ustvrdio da doseg Fregeove logičke analize nije veći od dosega Booleove. Venn je u svojoj recenziji iznio isti zaključak smatrajući Fregea „jednim od onih slučajeva u kojima ingeniozni čovjek razrađuje jednu shemu – u ovom slučaju vrlo nezgrapnu – ne znajući da je bilo što te vrste već ranije učinjeno” (*Mind* 5,1880). Frege je mogao samo žaliti što J. Venn, E. Schröder i ostali nisu pokušali prevesti neke formule iz treće glave njegova djela na Booleovu notaciju (*Über den Zweck der Begriffsschrift*, 1882). Odmah bi ustanovili da je to nemoguće jer se Booleova logika, i to tek u prijevodu na jezik kvantifikacije, poklapa s logikom jednomjesnih predikata, dok je Fregeov sustav potpuna logika prvog reda. Također napominjemo da je P. Tannery u svojoj recenziji *Begriffsschrifta* u *Revue philosophique* 8 (1879) Fregeovu zamjenu pojma subjekta i predikata s pojmom funkcije i argumenta, zamjenu kojom je stvorena teorija kvantifikacije i kojom je omogućeno da se logika jednomjesnih predikata jednostavno proširi do logike prvog reda (zamjenjujući tako nespretnu teoriju relacija koja je odgovarajuće proširenje u Boole-Schröderovoj tradiciji), nazvao neplodnom i nepoželjnom. Vidjevši o čemu je riječ, Frege je napisao članak u kojem objašnjava bitne razlike između svoga i Booleova sustava. Taj su članak, kao i njegovu kraću verziju, odbila tri časopisa. Kao i *Begriffsschrift*, i *Die Grundlagen der Arithmetik* iz 1884. doživio je sličnu sudbinu. Isto je završio i prvi dio *Grundgesetze der Arithmetik* iz 1893. (drugi je dio izdavač odbio tiskati zbog pomanjkanja interesa odgovarajuće publike). *Grundgesetze* je recenzirao G. Peano u *Rivista di matematica* 5 (1895) želeći uglavnom pokazati nadmoć svoje logike nad Fregeovom, i tu napokon počinje Fregeovo uspješno razdoblje. Odgovor Peanu, što ga je tiskao sam Peano u *Rivista di matematica* 6 (1896), prisilio je Peana da prizna vrijednost Fregeove logike i da mu zahvali za mnoga poboljšanja svoje. Osim toga, preko Peana se s Fregeovim radom upoznao i B. Russell, koji je (ustanovivši da je u tom radu već zacrtan logicizam kojemu i on teži) proširio glas o Fregeovu značenju. B. Russell je, međutim, zadao i težak udarac čitavom Fregeovu programu poznatim *Russellovim paradoksom*.

Time je otvorena logicistička epoha u uočavanju odnosa formalne logike i aritmetike, *epoha koja aritmetiku, kao i svu čistu matematiku, smatra dijelom logike, a matematičku logiku smatra logikom matematike.*