

Inženjerska matematika je numerička matematika

UDK 518.12:621

U članku su prikazana dva tumačenja stava da je inženjerska matematika numerička matematika. Oba su tumačenja testirana na konkretnom primjeru iz nastavne prakse. Prvi se stav pokazuje potpuno pogrešnim, a drugi praktički neodrživim usprkos njegovoj (teorijskoj) dobroj zasnovanosti. Na kraju se predlaže treće tumačenje koje se smatra adekvatnim i praktički održivim.

Koja sve značenja i koje implikacije ima opće-prihvaćen stav da je inženjerska matematika numerička matematika?

Prvo tumačenje. Oni inženjeri čije je poznavanje matematike, pa tako i numeričke matematike, oskudno (a nema ih mali broj) drže posljedicom ovog stava to da ni jedan inženjer ne treba znati mnogo matematike — dovoljno je da zna numeričku matematiku. Iako to gledište polazi od potpunog nepoznavanja stvari, pa bi ga se trebalo smatrati irelevantnim, to se ne može učiniti zbog značajnog broja njegovih pristaša. Radi se, naime, o nepoznavanju banalne činjenice da numerička matematika pretpostavlja »nenumeričku« matematiku. Štoviše, za praksu relevantna numerička matematika pretpostavlja vrlo složenu matematiku, koju naši inženjeri uglavnom nigdje ne uče. Tako npr. budući inženjeri strojarstva na zagrebačkom Sveučilištu uče linearnu algebru, koja je osnova najjednostavnijih numeričkih metoda, na postdiplomskom studiju (po novom programu čak je i matrica pojam koji, kako stvari sada stoje, treba da poznaje tek magistar strojarstva). Funkcionalnu analizu bez koje je nezamisliva numerička analiza, kao i bilo kakav razumni pristup parcijalnim diferencijalnim jednadžbama, oni ne uče nigdje. Naravno, gotovo svuda u svijetu je linearna algebra standardni dodiplomski kurs za inženjere, a funkcionalna analiza postdiplomski i sve češće čak diplomski kurs.

Nailazi se, naravno, i na manje ekstremna tumačenja stava iz gornjeg naslova.

Drugo tumačenje. Budući je inženjerska matematika numerička matematika to svaka matematika za inženjere mora biti prožeta numerikom. Drugim riječima, iako numerička matematika pretpostavlja nenumeričku, poduka iz nenumeričke matematike mora

uvijek biti prožeta numerikom — od prvog do posljednjeg kursa (inženjerske) matematike. Ovo tumačenje djeluje razumno. Teškoća je u tome što je poduka iz matematike koju ono zahtijeva **vremenski neizvodljiva**.

Na primjer: svakom je jasno da je kurs infinitezimalnog računa osnova bez koje nema pomaka u matematici (pogotovo numeričkoj). Prema drugom tumačenju infinitezimalni račun ne smije zbog toga postati sam sebi svrhom. Da se to ne bi dogodilo treba već u okviru toga računa početi s uvođenjem numeričkih metoda. To bi bilo moguće, ali isto tako zahtijeva mnogo vremena i radišne i sposobne studente. Naime, pojmovi infinitezimalnog računa su mnogobrojni i teški, a obogaćeni s pojmovima vezanim uz numeričke metode postali bi još mnogobrojniji i teži. Osim toga ne treba zaboraviti da je jedna od odlika infinitezimalnog računa ta, da apstrahirajući čisto numeričke odnose omogućava **brži** uvod u probleme kojima se bavi. Uostalom evo konkretnog primjera.

Taylorov teorem. Značaj ovoga teorema u numeričkoj matematici je svima, koji je znaju, dobro poznat. Dokaz ovog teorema u standardnim kursevima infinitezimalnog računa, u kojima se on najčešće ne povezuje s konkretnim numeričkim problemima, je obično kratak. (Dapače, može se skratiti na svega pola strane). Kada bi ga se pak htjelo povezati s jednim konkretnim numeričkim problemom, s kojim on u stvari i jest u bliskoj i značajnoj vezi, izgledalo bi to ovako:

Vrlo je čest i značajan problem interpolacije (ili ekstrapolacije) nepoznate vrijednosti $f(x)$ među poznate vrijednosti $f(a_0), \dots, f(a_n)$, primjerice korištenje tablicama, numeričko integriranje itd.). Taj se problem uglavnom rješava polinomskom interpolacijom. Nalazi se, naime, polinom n -toga stupnja P koji u a_0, \dots, a_n prima upravo poznate vrijednosti $f(a_0), \dots, f(a_n)$, pa se kao interpolirana vrijednost uzima $P(x)$. **Pretpostavlja se**, naravno, da se zna da takav polinom P postoji, i da je jedinstveno određen postavljenim zahtjevom. To je međutim, standardni matematički rezultat **nenumeričkog** karaktera. Da bi se ukazalo na besmislenost prvog tumačenja može se pokazati kakvu sve matematiku pretpostavlja taj rezultat, koji je pretpostavka jednostavnog numeričkog problema interpolacije. Evo dokaza tog rezultata:

Stupanj polinoma P (koji će se označavati sa $\text{st}(P)$) definira se kao stupanj najveće potencije polinoma P , za $P \neq 0$ i kao $-\infty$ za $P = 0$.

Uz konvencije

$$-\infty < k, \quad -\infty + k = -\infty \\ -\infty + (-\infty) = -\infty \quad (\text{za svaki } k \in \mathbb{N})$$

vrijedi lema:

Lema 1. $\text{st}(P_1 \pm P_2) < \max\{\text{st}(P_1), \text{st}(P_2)\}$ i $\text{st}(P_1 P_2) = \text{st}P_1 + \text{st}P_2$.

Dokaz je očigledan.

Lema 2. Za svaka dva polinoma P i S može se naći polinom Q i R tako da je

$$(1) \quad P(x) = Q(x)S(x) + R(x) \text{ i } \text{st}(R) < \text{st}(S).$$

Q i R su jednoznačno određeni zahtjevom (1).

Dokaz: Prvo se dokazuje jednoznačnost. Neka su \bar{Q} i \bar{R} polinomi, takvi da vrijedi

$$(2) \quad P(x) = \bar{Q}(x)S(x) + \bar{R}(x) \text{ i } \text{st}(\bar{R}) < \text{st}(S).$$

Odbivši (1) od (2) dobiva se

$$(3) \quad S(x)(Q(x) - \bar{Q}(x)) = \bar{R}(x) - R(x).$$

Iz (3), prema Lemi 1., slijedi

$$(4) \quad \text{st}(S) + \text{st}(Q - \bar{Q}) = \text{st}(\bar{R} - R).$$

S druge strane zbog (1) i (2) (prema Lemi 1.) slijedi

$$(5) \quad \text{st}(\bar{R} - R) < \text{st}(S).$$

Iz (4) i (5) slijedi:

$$(6) \quad \text{st}(Q - \bar{Q}) = -\infty.$$

Iz (4) i (6) slijedi (prema Lemi 1.):

$$(7) \quad \text{st}(\bar{R} - R) = -\infty.$$

Iz (6) i (7) slijedi:

$$Q = \bar{Q} \text{ i } R = \bar{R}.$$

Time je dokazana jednoznačnost.

Neka je sada $\text{st}(P) = n$ i $\text{st}(S) = m$. Ako je $n < m$, onda (1) očito vrijedi za $Q = 0$ i $R = P$. Pretpostavimo stoga da je $n > m$. Neka je

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad a_n \neq 0$$

$$S(x) = k_0 + k_1x + k_2x^2 + \dots + k_mx^m \quad k_m \neq 0.$$

Neka P_1 bude polinom

$$(8) \quad P_1(x) = P(x) - a_n/k_mx^{n-m}S(x).$$

Ako je $n_1 = \text{st}(P_1)$ onda je očito $n_1 < n$. Ako je i $n_1 < m$ onda iz (8) slijedi:

$$(9) \quad P(x) = a_n/k_mx^{n-m}S(x) + P_1(x) \text{ i } \text{st}(P_1) < \text{st}(S)$$

tj.

$$Q(x) = a_n/k_mx^{n-m} \text{ i } R(x) = P_1(x).$$

Ako je pak $n_1 > m$, i ako je

$$P_1(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{n_1}x^{n_1} \quad b_{n_1} \neq 0$$

onda neka P_2 bude polinom

$$(10) \quad P_2(x) = P_1(x) - b_{n_1}/k_mx^{n_1-m}S(x)$$

Ako je $n_2 = \text{st}(P_2)$ onda je očito $n_2 < n_1 < n$. Ako je i $n_2 > m$ onda iz (10) i (9) slijedi:

$$(11) \quad P(x) = (a_n/k_mx^{n-m} + b_{n_1}/k_mx^{n_1-m})S(x) + \\ + P_2(x) \text{ i } \text{st}(P_2) < \text{st}(S)$$

tj.

$$Q(x) = a_n/k_mx^{n-m} + b_{n_1}/k_mx^{n_1-m} \text{ i } R(x) = P_2(x).$$

Ako je pak $n_2 > m$ postupak se nastavlja dok se ne dođe do polinoma P_k čiji je stupanj n_k manji od m za koji vrijedi

$$P(x) = (a_n/k_mx^{n-m} + b_{n_1}/k_mx^{n_1-m} + \\ + \dots)S(x) + P_k(x) \text{ i } \text{st}(P_k) < \text{st}(S)$$

tj.

$$Q(x) = (a_n/k_mx^{n-m} + b_{n_1}/k_mx^{n_1-m} + \dots) \\ \text{ i } R(x) = P_k(x). \quad \text{Q.E.D.}$$

Polinom Q se naziva kvocijentom, a R ostatkom dijeljenja polinoma P s polinomom S .

Lema 3. Ostatak dijeljenja polinoma P linearnim polinomom $(x - c)$ jednak je vrijednosti $P(c)$ polinoma P .

Dokaz: Prema Lemi 2.

$$(12) \quad P(x) = (x - c)Q(x) + r \text{ i } \text{st}(r) = 0 \text{ ili } -\infty$$

tj. r je konstanta. Uvrsti li se u (12) vrijednost c dobiva se

$$P(c) = (c - c)Q(c) + r = r.$$

Q.E.D.

Korolar 1. Broj c je korijen (nultočka) polinoma P , tj. $P(c) = 0$, ako je i samo ako je polinom P djeljiv s $(x - c)$ bez ostatka.

Korolar 2. Polinom n -toga stupnja P , koji ima n međusobno različitih nultočaka a_1, a_2, \dots, a_n može se faktorizirati na slijedeći način:

$$(13) \quad P(x) = H(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n).$$

H je konstanta koju se može odrediti poznavajući vrijednost polinoma u nekoj točki a_0 različitoj od a_1, a_2, \dots, a_n :

$$(14) \quad H = \frac{P(a_0)}{(a_0 - a_1)(a_0 - a_2) \dots (a_0 - a_n)}.$$

Dokaz: Prema Korolaru 1, polinom P mora biti oblika (13). Prema Lemi 1, H mora biti konstanta, jer je $\text{st}(P) = n$.

Korolar 3. Ako je stupanj polinoma manji od broja njegovih nultočaka onda je taj polinom identički jednak nuli.

Dokaz: Neka je $\text{st}(P) < n$ i neka su a_0, a_1, \dots, a_n nultočke polinoma P . Prema Korolaru 1, P ima oblik

$$P(x) = H(x - a_0)(x - a_1) \dots (x - a_n)$$

odakle prema Lemi 1, slijedi: $\text{st}(P) = \text{st}(H) + n + 1$. Odavde slijedi da je $\text{st}(P) = -\infty$ tj. $P = 0$.
Q.E.D.

Teorem 1. (Lagrangeova formula) Postoji točno jedan polinom n -toga stupnja P , čije su vrijednosti u međusobno različitim točkama a_0, a_1, \dots, a_n jednake vrijednostima funkcije f u tim točkama:

$$(15) \quad P(a_0) = f(a_0), P(a_1) = f(a_1), \dots, P(a_n) = f(a_n).$$

Polinom P , koji se zove Lagrangeovim polinomom funkcije f , je oblika

$$(16) \quad P(x) = f(a_0)L_0(x) + f(a_1)L_1(x) + \dots + f(a_n)L_n(x)$$

gdje je

$$L_k(x) = \frac{(x - a_0) \dots (x - a_{k-1})(x - a_{k+1}) \dots (x - a_n)}{(a_k - a_0) \dots (a_k - a_{k-1})(a_k - a_{k+1}) \dots (a_k - a_n)}$$

Dokaz: Prvo se dokazuje jedinstvenost polinoma (n -toga stupnja) P . Neka je, dakle, Q polinom n -toga stupnja, tako da je

$$\begin{aligned} Q(a_0) &= P(a_0) = f(a_0), \\ Q(a_1) &= P(a_1) = f(a_1), \dots, Q(a_n) = \\ &= P(a_n) = f(a_n). \end{aligned}$$

Tada stupanj polinoma $R = P - Q$ nije veći od n , a osim toga je i

$$R(a_0) = R(a_1) = \dots = R(a_n) = 0.$$

Prema Korolaru 3, $R = 0$, tj., $P = Q$.

Polinom P koji ispunjava zahtjeve (15) vrlo je jednostavno naći upravo u obliku (16), jer se tada zadatak svodi na nalaženje polinoma $L_k(x)$ tako da je

$$L_k(a_i) = \begin{cases} 0 & \text{za } i \neq k \\ 1 & \text{za } i = k \end{cases}$$

Prema Korolaru 2,

$$L_k(x) = H_k(x - a_0) \dots (x - a_{k-1})(x - a_{k+1}) \dots (x - a_n)$$

$$H_k = \frac{1}{(a_k - a_0) \dots (a_k - a_{k-1})(a_k - a_{k+1}) \dots (a_k - a_n)}$$

Q.E.D.

Mora se upozoriti da je ovaj izvod rezultata izuzetno sažet, i da bi ga za konkretnu primjenu u predavaonici trebalo proširiti komentarima i ilustrativnim primjerima. Ali potrebno je vratiti se osnovnom problemu.

U kojoj je vezi Taylorov teorem s problemom polinomske interpolacije? Za sada izgleda u nikakvoj. Može se promotriti poseban slučaj problema polinomske interpolacije:

Neka se nađe polinom n -toga stupnja P , čije su vrijednosti u ekvidistantnim točkama $a, a + \Delta x, \dots, a + n\Delta x$ jednake vrijednostima funkcije f u tim točkama.

Ovaj poseban slučaj problema interpolacije dopušta nešto elegantnije rješenje, zahvaljujući **konstantnom** prirastu Δx (koji generira **ekvidistantni** sistem točaka). Neka se označi s Δf prirast funkcije f . Ovaj prirast ovisi o vrijednosti x , u kojoj se promatra prirast funkcije f , i prirastu nezavisne varijable Δx , koji izaziva prirast funkcije. Drži li se prirast Δx konstantnim, biti će Δf funkcija jedne varijable x . Prirast funkcije Δf (uz konstantni Δx) ponovno je funkcija jedne varijable x , koju označimo s $\Delta^2 f$, tj. $\Delta(\Delta f) = \Delta^2 f$. Isto je tako jasno da su (uz konstantni Δx) i sve funkcije $\Delta^{k+1} f = \Delta(\Delta^k f)$ funkcije jedne varijable x .

Formula

$$(17) \quad f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f(x)$$

pokazuje kako je moguće vrijednost funkcije f u točki $x + \Delta x$ izračunati iz vrijednosti funkcija f i Δf u početnoj točki x . Lema 4. uopćuje ovu formulu.

Lema 4. $f(x + k\Delta x) = \binom{k}{0} f(x) + \binom{k}{1} \Delta f(x) + \dots + \binom{k}{k} \Delta^k f(x)$

Dokaz: Lema se dokazuje jednostavnim računom, služeći se formulom (17) pa se stoga može posebno navoditi oblik formule (17) koji se koristi u računu:

$$\Delta^k f(x + \Delta x) = \Delta^k f(x) + \Delta^{k+1} f(x).$$

Evo i računa:

$$f(x + \Delta x) = \boxed{1 f(x) + 1 \Delta f(x)}$$

$$\begin{aligned} f(x + 2\Delta x) &= f(x + \Delta x) + \Delta f(x + \Delta x) = \\ &= \boxed{1} f(x) + \boxed{1} \Delta f(x) + \\ &\quad + \boxed{1} \Delta f(x) + \boxed{1} \Delta^2 f(x) = \\ &= \boxed{1} f(x) + \boxed{2} \Delta f(x) + \boxed{1} \Delta^2 f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x + 3\Delta x) &= f(x + 2\Delta x) + \Delta f(x + 2\Delta x) = \\ &= \boxed{1} f(x) + \boxed{2} \Delta f(x) + \boxed{1} \Delta^2 f(x) + \\ &\quad + \boxed{1} \Delta f(x) + \boxed{2} \Delta^2 f(x) + \\ &\quad + \boxed{1} \Delta^3 f(x) = \\ &= \boxed{1} f(x) + \boxed{3} \Delta f(x) + \boxed{3} \Delta^2 f(x) + \\ &\quad + \boxed{1} \Delta^3 f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x + 4\Delta x) &= f(x + 3\Delta x) + \Delta f(x + 3\Delta x) = \\ &= \boxed{1} f(x) + \boxed{3} \Delta f(x) + \boxed{3} \Delta^2 f(x) + \\ &\quad + \boxed{1} \Delta^3 f(x) + \\ &\quad + \boxed{1} \Delta f(x) + \boxed{3} \Delta^2 f(x) + \\ &\quad + \boxed{3} \Delta^3 f(x) + \boxed{1} \Delta^4 f(x) = \\ &= \boxed{1} f(x) + \boxed{4} \Delta f(x) + \boxed{6} \Delta^2 f(x) + \\ &\quad + \boxed{4} \Delta^3 f(x) + \boxed{1} \Delta^4 f(x) \end{aligned}$$

i tako dalje.

Koeficijenti od $f(x + k\Delta x)$ se generiraju na slijedeći način:

$$\boxed{1 \quad 1}$$

$$1 \quad 1$$

$$\boxed{1 \quad 2 \quad 1}$$

$$1 \quad 2 \quad 1$$

$$\boxed{1 \quad 3 \quad 3 \quad 1}$$

$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

$$\boxed{1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1}$$

itd.

to jest, koeficijenti od $f(x + k\Delta x)$ su koeficijenti k -tog retka Pascalovog (aritmetičkog) trokuta, dakle

$$\begin{aligned} f(x + k\Delta x) &= \binom{k}{0} f(x) + \binom{k}{1} \Delta f(x) + \\ &\quad + \dots + \binom{k}{k} \Delta^k f(x). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Naš poseban slučaj polinomske interpolacije se prema Lemi 4 svodi na nalaženje polinoma n -tog stupnja P , takvog da je

$$(18) \begin{cases} P(a) = \binom{0}{0} f(a) \\ P(a + \Delta x) = \binom{1}{0} f(a) + \binom{1}{1} \Delta f(a) \\ P(a + 2\Delta x) = \binom{2}{0} f(a) + \binom{2}{1} \Delta f(a) + \binom{2}{2} \Delta^2 f(a) \\ \vdots \\ P(a + n\Delta x) = \binom{n}{0} f(a) + \binom{n}{1} \Delta f(a) + \\ \quad + \binom{n}{2} \Delta^2 f(a) + \dots + \binom{n}{n} \Delta^n f(a) \end{cases}$$

Prema Teoremu 1 slijedi:

$$(19) P(x) = f(a) L_0(x) + (\binom{1}{0} f(a) + \binom{1}{1} \Delta f(a)) L_1(x) + \dots + (\binom{n}{0} f(a) + \binom{n}{1} \Delta f(a) + \dots + \binom{n}{n} \Delta^n f(a)) L_n(x)$$

tj.

$$(20) P(x) = f(a) N_0(x) + \Delta f(a) N_1(x) + \dots + \Delta^n f(a) N_n(x),$$

gdje su polinomi $N_k(x)$ odgovarajuće linearne kombinacije polinoma $L_i(x)$ (za $i < k < n$). Međutim, polinom oblika (20) će ispunjavati uvjete (18) ako bude

$$N_0(x) = 1$$

$$N_1(x) = \frac{1}{\Delta x} (x - a)$$

$$(21) N_2(x) = \frac{1}{2! \Delta x^2} (x - a)(x - a - \Delta x)$$

⋮

$$N_n(x) = \frac{1}{n! \Delta x^n} (x - a)(x - a - \Delta x) \dots (x - a - (n-1)\Delta x)$$

(što se lako vidi uspoređivanjem oblika (20) i uvjeta (18)), tj. polinom

$$(22) P(x) = f(a) + (x - a) \frac{\Delta f(a)}{\Delta x} + \frac{(x - a)(x - a - \Delta x)}{2!} \frac{\Delta^2 f(a)}{\Delta x^2} + \dots + \frac{(x - a)(x - a - \Delta x) \dots (x - a - (n-1)\Delta x)}{n!} \frac{\Delta^n f(a)}{\Delta x^n}$$

je rješenje navedenog posebnog problema.

Vrijedi dakle slijedeći teorem.

Teorem 2. (Newtonova formula) Postoji točno jedan polinom n -tog stupnja P , čije su vrijednosti u točkama $a, a + \Delta x, \dots, a + n \Delta x$ jednake vrijednostima funkcije f u tim točkama. Polinom P je oblika (22). Napomena: Polinom P je jednoznačno određen prema Teoremu 1.

Polinom (22) se zove n -tom Newtonovom $(a, \Delta x)$ -aproksimacijom funkcije f . Vidljivo je kako se rješavajući jedan numerički problem nailazi na sve više »nenumeričke« matematičke. Stoga već i ovaj primjer otkriva svu besmislenost prvog tumačenja stava iz naslova.

Promatra li se sada (numerički relevantan) problem određenja numeričke vrijednosti n -te Newtonove $(a, \Delta x)$ -aproksimacije, dolazi se do ovog problema: Kolika greška se čini aproksimirajući funkciju f njenom n -tom Newtonovom $(a, \Delta x)$ -aproksimacijom? Teoremom 3, odgovara se na to pitanje.

Teorem 3. Neka je $a = a_0, a + \Delta x = a_1, \dots, a + n \Delta x = a_n$ i neka f ima sve derivacije. Greška R koja se čini aproksimirajući funkciju f njenom n -tom Newtonovom $(a, \Delta x)$ -aproksimacijom P je

$$(23) \quad R(x) = f(x) - P(x) = \frac{(x - a_0)(x - a_1) \dots (x - a_n)}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

za neki

$$\xi \in [\min \{a_0, \dots, a_n, x\}, \max \{a_0, \dots, a_n, x\}].$$

Dakle, vrijedi:

$$(24) \quad f(x) = f(a) + (x - a) \frac{\Delta f(a)}{\Delta x} + \dots + \frac{(x - a)(x - a - \Delta x) \dots (x - a - (n - 1)\Delta x)}{n!} \cdot \frac{\Delta^n f(a)}{\Delta x^n} + \frac{(x - a)(x - a - \Delta x) \dots (x - a - n \Delta x)}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Dokaz. Prema definiciji n -te Newtonove $(a, \Delta x)$ -aproksimacije funkcije f

$$f(a_0) = P(a_0), \dots, f(a_n) = P(a_n)$$

tj.

$$(25) \quad R(a_0) = R(a_1) = \dots = R(a_n) = 0.$$

Nadimo funkciju F koja uz ove iste uvjete

$$(26) \quad F(a_0) = F(a_1) = \dots = F(a_n) = 0$$

ispunjava i uvjet

$$(27) \quad F(x) = 0.$$

Očito je (prema (25)) da funkcija

$$(28) \quad F(z) = R(z) - (z - a_0)(z - a_1) \dots (z - a_n)H$$

uz ovaj odabir konstante H

$$(29) \quad H = \frac{R(x)}{(x - a_0)(x - a_1) \dots (x - a_n)}$$

ispunjava sve tražene uvjete (26) i (27).

Do dokaza Teorema 3. može se doći vrlo jednostavnom primjenom Leme 5.

Lema 5. (Uopćeni Rolleov teorem) Ako za funkciju F , koja ima sve potrebne derivacije, vrijedi $F(a_0) = \dots = F(a_n) = F(x) = 0$ onda postoji ξ iz intervala $[\min \{a_0, \dots, a_n, x\}, \max \{a_0, \dots, a_n, x\}]$ tako da je $F^{(n+1)}(\xi) = 0$.

Dokaz Leme 5. Dokaz se provodi indukcijom. Za $n = 0$ radi se o Rolleovom teoremu. Ako se razmotri sada slučaj $(n + 1)$ točke ($F(a_0) = \dots = F(a_{n+1}) = F(x) = 0$), pod pretpostavkom da teorem vrijedi za n točaka. Po pretpostavci postoji ξ_1 tako da je

$$(30) \quad F^{(n+1)}(\xi_1) = 0$$

za

$$\xi_1 \in [\min \{a_0, \dots, a_n, x\}, \max \{a_0, \dots, a_n, x\}]$$

i ξ_2 tako da je

$$(31) \quad F^{(n+1)}(\xi_2) = 0$$

za

$$\xi_2 \in [\min \{a_0, \dots, a_n, a_{n+1}\}, \max \{a_0, \dots, a_n, a_{n+1}\}].$$

Po Rolleovom teoremu iz (30) i (31) slijedi da postoji ξ tako da je

$$F^{(n+2)}(\xi) = 0 \text{ za } \xi \in [\min \{\xi_1, \xi_2\}, \max \{\xi_1, \xi_2\}]$$

odakle slijedi da je

$$\xi \in [\min \{a_0, \dots, a_{n+1}, x\}, \max \{a_0, \dots, a_{n+1}, x\}].$$

Q.E.D.

Sada iz (26) i (27), prema Lemi 5., slijedi da je

$$(32) \quad F^{(n+1)}(\xi) = 0$$

za neki

$$\xi \in [\min \{a_0, \dots, a_n, x\}, \max \{a_0, \dots, a_n, x\}].$$

Uzme li se u obzir da je $R(x) = f(x) - P(x)$ i da je $P(x)$ polinom n -toga stupnja, tada se uzastopnim deriviranjem funkcije $F(z)$ iz (28) dobiva

$$(33) \quad F^{(n+1)}(z) = f^{(n+1)}(z) - (n+1)! H.$$

Iz (32) i (33) slijedi:

$$(34) \quad H = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Iz (34) i (29) slijedi (23). (24) slijedi iz (23) i (22).
Q.E.D.

Vidi se da je »nenumerička« matematika to složenija, što je problem koji se rješava više numerički.

I na kraju dolazi se i do Taylorovog teorema odgovarajući na ovo pitanje: Što se dešava s n -tom Newtonovom $(a, \Delta x)$ -aproksimacijom kada Δx ide prema nuli, tj. kada se $(n+1)$ zajednička točka grafa funkcije f i grafa n -te Newtonove $(a, \Delta x)$ -aproksimacije P stapaju u jednu jedinu » n -struku« točku a ?

Newtonova n -ta $(a, \Delta x)$ -aproksimacija funkcije f je polinom određen parametrima n , a , Δx i f , tj. $P(x) = P_{a, n, \Delta x} f(x)$. Pod pretpostavkom da su a , n i f konstantnim problem se svodi na nalaženje granične funkcije

$$0(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P_{\Delta x}(x).$$

Teorem 4. Granična vrijednost n -te Newtonove $(a, \Delta x)$ -aproksimacije funkcije f (označena s $0(x)$) je n -ta oskulaciona aproksimacija funkcije f u točki a .

Napomena: n -ta oskulaciona aproksimacija funkcije f u točki a je polinom

$$(35) \quad O_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + f^{(n)}(a) \cdot \frac{(x-a)^n}{n!}.$$

Motivaciju ovog polinoma, tj. objašnjenje njegovog oskulacionog karaktera može se naći u [1].

Dokaz. Uspoređujući oblik n -te oskulacione aproksimacije funkcije f u točki a (vidi (35)) s oblikom n -te Newtonove $(a, \Delta x)$ -aproksimacije funkcije f (vidi (22)) lako se uviđa da teorem slijedi iz jednakosti

$$(36) \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta^k f(a)}{\Delta x^k} = f^{(k)}(a).$$

Jednakost (36) se dokazuje indukcijom po k .

Za $k=1$ jednakost (36) je definicija derivacije. Pretpostavi li se da jednakost (36) vrijedi za k :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta^k f(x)}{\Delta x^k} = f^{(k)}(x) \quad \text{tj.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta^k f(x)}{f^{(k)}(x)} = 1$$

što znači da je

$$(37) \quad \frac{\Delta^k f(x)}{\Delta x^k} \underset{\Delta x \rightarrow 0}{\sim} f^{(k)}(x).$$

Uz tu pretpostavku može se dokazati da jednakost (36) vrijedi i za $k+1$:

$$(37) \quad \begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta^{k+1} f(x)}{\Delta x^{k+1}} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \left(\frac{\Delta^k f(x)}{\Delta x^k} \right)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f^{(k)}(x)}{\Delta x} = \\ &= f^{(k+1)}(x). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Pojam međusobno ekvivalentnih infinitezimala (37) i mogućnost njihove zamjene kod računanja graničnih vrijednosti (koja je primjenjena u zadnjem koraku ovog dokaza) spadaju u dosta tešku »nenumeričku« matematiku.

Ovim se primjerom pokazuje sva besmislenost prvog tumačenja stava iz naslova. Bez mnogo matematike nema mnogo numeričke matematike, i bez složene matematike nema složene (i korisne) numeričke matematike.

Isto tako je ukazano na teškoće vezane uz drugo tumačenje stava iz naslova. Iako je pristup Taylorovom teoremu izuzetno informativan, jer ga dovodi u vezu s konkretnim numeričkim problemom s kojim on jest prirodno vezan, dužina izlaganja koju taj pristup zahtijeva dovodi ozbiljno u pitanje njegovu izvedljivost.

Može se smatrati stoga (uzevši u obzir i uvjete koje nameće nastavna praksa, a koji se uglavnom svode na vremenska ograničenja) da upravo zato što inženjerska matematika jest numerička matematika buduće inženjere se mora brzo i solidno naučiti **matematiku**, koja je pretpostavka numeričke matematike, a to je (kako je primjerom pokazano) često moguće samo tako da ju se u početku previše ne opterećuje numeričkim metodama. Numeričke metode zahtijevaju posebnu pažnju, što je moguće u posebnim kursevima, koje će s lakoćom moći pratiti svi i samo oni studenti koji znaju matematiku.

LITERATURA

- [1] Šikić Z.: Taylorova formula i dodiri višeg reda, Matematika, Školska knjiga, Zagreb (u tisku).

Recenzija:

Dr Luka Krnić, dipl. inž. mat.

