

## IZOLIRANI SINGULARITETI FUNKCIJE

ZVONIMIR ŠIKIĆ, Zagreb

Što znači da funkcija  $f$  ima izolirani singularitet u točki  $a$ , s obzirom na neko svojstvo? To znači da funkcija  $f$  ima to svojstvo u svakoj točki neke okoline točke  $a$ , osim u samoj točki  $a$ . U ovom članku će biti riječ o izoliranim singularitetima realnih i kompleksnih funkcija s obzirom na derivabilnost.

Uočimo prije svega da funkcija  $f$ , koja ima prekid u točki  $a$ , sigurno nije derivabilna u toj točki. Dakle, svaki izolirani prekid (tj. svaki izolirani singularitet s obzirom na neprekinutost) mora biti i izolirani singularitet s obzirom na derivabilnost. Razlikovati ćemo četiri vrste izoliranih prekida.

**Definicija 1.** Ako na nekim nizovima, koji teže prema  $a$ , funkcija  $f$  ostaje konačna, a na nekim drugim nizovima, koji također teže prema  $a$ , ista funkcija postaje beskonačna, onda je izolirani prekid funkcije  $f$  u točki  $a$  **bitni prekid**.

**Definicija 2.** Ako na svim nizovima, koji teže prema  $a$ , funkcija  $f$  postaje beskonačna onda je izolirani prekid funkcije  $f$  u točki  $a$  **beskonačni prekid**.

**Definicija 3.** Ako funkcija  $f$  nema istu granicu na svim nizovima koji teže prema  $a$ , ali ipak ostaje konačna na svim tim nizovima, onda je izolirani prekid funkcije  $f$  u točki  $a$  **konačni prekid**.

**Definicija 4.** Ako funkcija  $f$  ima istu (konačnu) granicu na svim nizovima, koji teže prema  $a$ , onda je izolirani prekid funkcije  $f$  u točki  $a$  **uklonjivi prekid**. (Prekid se može ukloniti promjenom vrijednosti funkcije  $f$  u točki  $a$ :  $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

Ova promjena pretvara funkciju  $f$  u neprekinutu funkciju.) Dakle, uklonjivi prekid funkcije  $f$  u točki  $a$  je „lažni” prekid. Problem je samo u tome da funkcija  $f$  „nije dobro definirana” u točki  $a$  (ili čak uopće nije definirana u toj točki). Naravno, i ovaj lažni prekid može biti pravi singularitet s obzirom na derivabilnost, pa zato razlikujemo tri podvrste „lažnih” prekida iz definicije 4.

**Definicija 4.1.** Ako  $f'(a)$  ne postoji ni nakon eventualnog uklanjanja izoliranog prekida funkcije  $f$  u točki  $a$  onda funkcija  $f$  ima u točki  $a$  **pravi d-singularitet** (tj. pravi singularitet s obzirom na derivabilnost).

**Definicija 4.2.** Ako funkcija  $f'$  nema istu granicu na svim nizovima, koji teže prema  $a$ , i ako usprkos tome (nakon eventualnog uklanjanja izoliranog prekida funkcije  $f$  u točki  $a$ ) postoji  $f'(a)$  onda funkcija  $f$  ima u točki  $a$  **prekinuto uklonjivi d-singularitet**.

**Definicija 4.3.** Ako funkcija  $f'$  ima istu granicu na svim nizovima, koji teže prema  $a$ , onda (nakon eventualnog uklanjanja izoliranog prekida funkcije  $f$  u točki  $a$ ) postoji  $f'(a)$  i  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)$  tj. onda je funkcija  $f'$  neprekinuta u  $a$ . U ovom slučaju funkcija  $f$  ima u točki  $a$  „lažni” **neprekinuto uklonjivi d-singularitet**.

Sve ove definicije vrijede kako za realne tako i za kompleksne funkcije. Za svaku od ovih definicija lako nalazimo realnu funkciju koja ima odgovarajući singularitet. Na primjer:

1. Funkcija  $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$  ima bitni prekid u 0.

2. Funkcija  $f(x) = \frac{1}{x}$  ima beskonačni prekid u 0.

3. Funkcija  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  ima konačni prekid u 0.

4. Funkcije  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ ,  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$  i  $f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$  imaju uklonjivi prekid u 0.

4.1. Funkcija  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$  ima pravi d-singularitet u 0.

4.2. Funkcija  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$  ima prekinuto uklonjivi d-singularitet u 0.

4.3. Funkcija  $f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$  ima neprekinuto uklonjivi d-singularitet u 0.

Odgovarajuće kompleksne funkcije nemaju odgovarajuće singularitete.

Funkcija  $f(z) = \frac{1}{z}$  ima beskonačni prekid u 0, ali sve ostale funkcije (tj.  $f(z) = \frac{1}{z} \sin \frac{1}{z}$ ,  $f(z) = \sin \frac{1}{z}$ ,  $f(z) = z \sin \frac{1}{z}$ ,  $f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z}$  i  $f(z) = z^3 \sin \frac{1}{z}$ ) imaju bitni prekid u 0. To nije slučajno. Ovdje se ne radi o lošem izboru primjera već o tome da kompleksne funkcije, kao singularitete s obzirom na derivabilnost, mogu imati samo uklonjive, beskonačne i bitne prekide. Kompleksni singulariteti vrste 2, 4. 1. i 4.2. ne postoje. Naime, ako je kompleksna funkcija  $f$  derivabilna u nekoj okolini točke  $a$ , ali ne i u samoj točki  $a$  (tj. ako je kompleksna funkcija  $f$  analitička u nekoj okolini točke  $a$ , ali ne i u samoj točki  $a$ ), i ako ona ostaje konačna u toj okolini singularne točke  $a$ , onda je singularitet u  $a$  uklonjiv (tj. kompleksna funkcija  $f$  je analitička u točki  $a$  uz odgovarajuću redefiniciju njene vrijednosti u točki  $a$ ). Evo sada i dokaza ove tvrdnje, koja se nekad naziva Riemannovim teoremom.

Neka je  $f$  analitička funkcija s izoliranim singularitetom u točki  $a$ , koja ostaje konačna (tj. omeđena je) u nekoj okolini točke  $a$ . Tada je funkcija

$$\Phi(z) = \begin{cases} (z - a)^2 f(z) & \text{za } z \neq a \\ 0 & \text{za } z = a \end{cases}$$

analitička i u točki  $a$  jer je

$$\Phi'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\Phi(z) - \Phi(a)}{z - a} = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) f(z) = 0.$$

Dakle, funkciju  $\Phi(z)$  možemo razviti u Taylorov red oko  $a$ :

$$\Phi(z) = \Phi(a) + \Phi'(a)(z - a) + \frac{\Phi''(a)}{2!}(z - a)^2 + \frac{\Phi'''(a)}{3!}(z - a)^3 + \dots$$

Međutim  $\Phi(a) = \Phi'(a) = 0$  pa je

$$\Phi(z) = (z - a)^2 \left( \frac{\Phi''(a)}{2!} \right) + \left( \frac{\Phi'''(a)}{3!} + \dots \right) = (z - a)^2 \psi(z),$$

gdje je funkcija  $\psi(z)$  analitička u točki  $a$ . Ali  $\psi(z) = f(z)$  za  $z \neq a$  tj.  $f(z)$  ima uklonjivi singularitet u  $a$ .

Dakle, pravi izolirani singularitet kompleksne funkcije, s obzirom na derivabilnost, je beskonačni ili bitni prekid tj. izolirani singulariteti analitičke funkcije s obzirom na neprekinutost su ujedno i jedini izolirani singulariteti analitičke funkcije s obzirom na derivabilnost.

Lako se dokazuje da beskonačni izolirani singularitet analitičke funkcije mora biti pol, pa stoga pol možemo i definirati kao beskonačni izolirani singularitet analitičke funkcije. Dakle, polazimo od ove definicije:

**Definicija.** Pol analitičke funkcije je njezin izolirani beskonačni singularitet.

Sada možemo dokazati teorem, koji je inače definicija pola:

**Teorem.** Ako je točka  $a$  pol analitičke funkcije  $f$  onda postoji funkcija  $\Phi$  analitička u točki  $a$  takva da je u svakoj okolini točke  $a$ .

$$f(z) = \frac{\Phi(z)}{(z - a)^m} \quad \text{za neki prirodni broj } m,$$

gdje je  $\Phi(a) \neq 0$ . Broj  $m$  je red pola  $a$ .

Razvijanjem funkcije  $\Phi(z)$  u Taylorov red oko točke  $a$  dobivamo da je u nekoj okolini točke  $a$

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - a)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z - a)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{(z - a)} + c_0 + c_1(z - a) + \\ + c_2(z - a)^2 + \dots,$$

gdje je  $c_{-m} \neq 0$ .

**Dokaz.** Točka  $a$  je pol funkcije  $f$ , pa mora postojati okolina  $D$  točke  $a$  takva da je  $f$  analitička funkcija u  $D \setminus \{a\}$ , koja ne iščezava ni u jednoj točki područja  $D \setminus \{a\}$ . (Naime, ako bi u svakoj okolini točke  $a$  mogli naći točku u kojoj  $f$  iščezava onda bi mogli naći  $z$ -niz koji ide prema točki  $a$ , a na kojem  $f(z)$  ima **konačnu** granicu 0, što se protivi pretpostavci da je točka  $a$  pol funkcije  $f$ .)

Promotrimo sada funkciju

$$F(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)} & \text{za } z \in D \setminus \{a\} \\ 0 & \text{za } z = a \end{cases}$$

Funkcija  $F(z)$  je analitička u  $D \setminus \{a\}$  i  $\lim_{z \rightarrow a} F(z) = 0$  (jer je  $a$  pol funkcije  $f$ ).

Dakle, funkcija  $F$  ostaje konačna na svakom  $z$ -nizu koji ide prema  $a$ . Prema Riemannovom teoremu  $F$  može imati samo uklonjivi singularitet u točki  $a$ . No mi smo funkciju  $F$  definirali tako da bude neprekinuta u točki  $a$ , pa je taj singularitet već uklonjen samom tom definicijom tj. funkcija  $F$  je analitička funkcija u točki  $a$ . Dakle,

$$F(z) = F(a) + F'(a)(z-a) + F''(a)(z-a)^2 + \dots$$

Ali  $F(a) = 0$ , odakle slijedi da je

$$F(z) = (z-a)^m F_1(z) \quad \text{za neki } m \geq 1,$$

gdje je funkcija  $F_1$  analitička u točki  $a$  i  $F_1(a) \neq 0$ . Funkcija  $F_1$  je neprekinuta u točki  $a$ , pa postoji i čitava okolina ove točke u kojoj je  $F_1(z) \neq 0$ . No tada je i funkcija  $\Phi(z) = \frac{1}{F_1(z)}$  analitička funkcija u toj okolini. Dakle, postoji analitička funkcija  $\Phi(z)$  takva da je u nekoj okolini točke  $a$

$$f(z) = \frac{1}{F(z)} = \frac{1}{(z-a)^m F_1(z)} = \frac{\Phi(z)}{(z-a)^m}.$$

To je i trebalo dokazati.

**Napomena:** Uočite analogiju pojma pola s pojmom nultočke funkcije  $f$ . Analitička funkcija  $f$  ima u točki  $a$  nultočku reda  $m$  ako je u nekoj okolini točke  $a$

$$f(z) = (z-a)^m f_1(z),$$

gdje je  $f_1$  analitička funkcija u toj okolini i  $f_1(a) \neq 0$ . Analitička funkcija  $f$  ima u točki  $a$  pol reda  $m$  ako je u nekoj okolini točke  $a$

$$f(z) = (z-a)^{-m} f_1(z),$$

gdje je  $f_1$  analitička funkcija u toj okolini i  $f_1(a) \neq 0$ .

I na kraju recimo nešto o bitnim (izoliranim) singularitetima analitičkih funkcija. Ako je točka  $a$  bitni izolirani singularitet analitičke funkcije  $f$  onda se lako dokazuje da za svaki kompleksni broj  $L$  postoji  $z$ -niz, koji ide prema  $a$ , tako da na njemu  $f(z)$  ide prema  $L$ . Naime, kada ne bi bilo tako onda bi postojala takva okolina  $D$  točke  $a$  i takva pozitivna konstanta  $\varepsilon$  za koje bi vrijedilo

$$|f(z) - L| > \varepsilon \quad \text{za svaki } z \in D \setminus \{a\}.$$

No odavde slijedi da je

$$\frac{1}{|f(z) - L|} < \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{za svaki } z \in D \setminus \{a\},$$

što bi značilo da je funkcija

$$\psi(z) = \frac{1}{f(z) - L}$$

analitička i konačna u  $D \setminus \{a\}$ , tj. (prema Riemannovom teoremu) funkcija  $\psi$  bi imala uklonjivi singularitet u točki  $a$ . No tada bi i funkcija  $\frac{1}{\psi(z)} = f(z) - L$ ,

pa dakle i funkcija  $f(z)$ , imala u  $a$  ili uklonjivi singularitet ili pol što je u suprotnosti s pretpostavkom da funkcija  $f$  ima bitni singularitet u točki  $a$ .

**Napomena:** Picardov teorem, koji ovdje ne možemo dokazati, tvrdi i više: Jednadžba  $f(z) = L$  ima u svakoj okolini bitnog singulariteta analitičke funkcije  $f$  beskonačno mnogo rješenja, za svaki kompleksni broj  $L$  osim (možda) za jedan jedini.

Riemannova je tradicija da se analitičke funkcije karakteriziraju malenim brojem svojih bitnih karakteristika. (Npr. funkcija  $w = \exp(z)$  karakterizira se kao ona koja zadovoljava jednadžbu  $w' = w$  i uvjet  $w(0) = 1$ .) U toj je tradiciji i karakterizacija čitavih klasa analitičkih funkcija pomoću broja i vrste njihovih singulariteta. Naime, promatramo li funkcije definirane na ravnini proširenoj točkom  $\infty$ , i definiramo li svako svojstvo (dakle i singularnost) funkcije  $f(z)$  u točki  $\infty$  kao odgovarajuće svojstvo funkcije  $f\left(\frac{1}{z}\right)$  u točki  $0$  onda vrijede ove karakterizacije:

**Cijele funkcije** su jednoznačne analitičke funkcije kojima je točka  $\infty$  jedini singularitet (ako uopće imaju singularitet tj. ako nisu konstante). Lako se pokazuje da se cijele funkcije mogu razviti u red potencija konvergentan u svakoj konačnoj točki. (Naravno, vrijedi i obrat.)

**Cijele racionalne funkcije** ili **polinomi** (reda  $n$ ) su cijele funkcije koje u točki  $\infty$  imaju pol (reda  $n$ ).

**Cijele transcendentne funkcije** su cijele funkcije koje u točki  $\infty$  imaju bitni singularitet.

**Racionalne funkcije** su jednoznačne analitičke funkcije kojima su svi singulariteti polovi. (Lako se pokazuje da one imaju samo konačno mnogo singulariteta.)

**Algebarske funkcije** su višeznačne analitičke funkcije (definirane na odgovarajućim Riemannovim površinama) kojima su svi singulariteti polovi.

**Eliptičke funkcije** su jednoznačne analitičke dvostruko periodičke funkcije, koje u paralelogramu perioda, kao jedine singularitete, imaju polove. (Lako se pokazuje da i one imaju samo konačno mnogo singulariteta.)