

# IZ NASTAVNE PRAKSE

## Kratki pregled osnovnih znanja o realnim brojevima

ZVONIMIR ŠIKIĆ, Zagreb

Jedini primjereni način uvođenja realnih brojeva u srednjoškolskoj nastavi jest preko njihovih decimalnih zapisa. Do tih nas zapisa prirodno vodi postupak decimalnoga mjerenja, koji je najjednostavnije objasniti na konkretnom primjeru mjerenja dužina.

U takvom pristupu realni su brojevi naprosto **opći decimalni brojevi**, oni s konačnim brojem decimala i oni s beskonačnim brojem decimala. Primijetimo da matematičari samo one s konačnim brojem decimala zovu decimalnim brojevima, dok nematematičari najčešće i jedne i druge (dakle, naše opće decimalne brojeve) zovu decimalnim brojevima.

Naravno, opći decimalni brojevi s konačno mnogo decimala ili, pak, s beskonačno mnogo decimala koje se periodički ponavljaju, racionalni su brojevi. S druge strane, opći decimalni brojevi s beskonačno mnogo decimala koje se periodički ne ponavljaju iracionalni su brojevi pa je skup realnih brojeva zapravo unija racionalnih i iracionalnih.

U 1. i 2. odjeljku teksta koji slijedi sistematski uvodimo sve ove pojmove na način koji držimo primjerenim srednjoškolskoj nastavi matematike. U 3. odjeljku uvodimo potpunost skupa realnih brojeva i iz nje izvodimo njegovu neprebrojivost, i to na način koji držimo primjerenim dodatnoj nastavi.

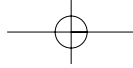
### 1. Sumjerljivost, racionalni brojevi i decimalno mjerenje

Dužina  $a$  može se izmjeriti dužinom  $b$  ako postoji dužina  $j$  koja cijeli broj puta ide u  $a$  i  $b$ . Tada je

$$a = nj \quad \text{i} \quad b = mj \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

U tom slučaju kažemo da su dužine  $a$  i  $b$  *sumjerljive* te da je dužina  $j$  njihova *zajednička mjera*.





## POUČAK 10

Omjer dužina  $a$  i  $b$  tada je pozitivni *racionalni broj*

$$\frac{a}{b} = \frac{nj}{mj} = \frac{n}{m},$$

koji se zove mjernim brojem od  $a$  u odnosu na  $b$ . Taj broj izražava duljinu od  $a$  u odnosu na  $b$  kao jediničnu dužinu. Naime  $b/b = 1$ . Često se piše i  $a = n/m$  ako je iz konteksta jasno što je jedinična dužina. Uočimo da se tada istom oznakom  $a$  koristimo i za dužinu i za njezin mjerni broj, tj. za njezinu duljinu.

Uobičajeni postupak mjerenja dužine  $a$  jediničnom dužinom  $b$  (npr. metrom) jest *decimalno mjerenje*. Prvo se izmjeri koliko jediničnih dužina  $b$  ide u dužinu  $a$ :

$$a = pb + r_1 \quad p \in \mathbf{N}, \quad r_1 < b.$$

Zatim se ostatak  $r_1$  mjeri 10 puta manjom dužinom  $b/10$  (decimetrom):

$$r_1 = q_1 \frac{b}{10} + r_2 \quad q_1 \in D, \quad r_2 < r_1,$$

gdje  $D$  sadrži decimalne znamenke, tj.  $D = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ . Zatim se  $r_2$  mjeri 100 puta manjom dužinom  $b/10^2$  (centimetrom):

$$r_2 = q_2 \frac{b}{10^2} + r_3 \quad q_2 \in D, \quad r_3 < r_2$$

i tako dalje. Ako se takvo mjerenje završi u konačnom broju koraka  $k$ , rezultat je:

$$\begin{aligned} a &= pb + q_1 \frac{b}{10} + q_2 \frac{b}{10^2} + \dots + q_k \frac{b}{10^k} = \\ &= \left( p + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{10^2} + \dots + \frac{q_k}{10^k} \right) b. \end{aligned}$$

Drugim riječima, mjerni broj od  $a$  u odnosu na jediničnu dužinu  $b$  je pozitivni *decimalni broj*

$$\frac{a}{b} = p + q_1 \frac{b}{10} + q_2 \frac{b}{10^2} + \dots + q_k \frac{b}{10^k}.$$

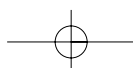
Decimalni zapis toga broja je

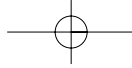
$$p_s p_{s-1} \dots p_1 p_0 \cdot q_1 q_2 \dots q_k,$$

gdje je  $p_s p_{s-1} \dots p_1 p_0$  dekadski zapis prirodnoga broja  $p$ . Znamenke  $q_i$  iza decimalne točke zovu se decimalne. Suprotan broj piše se sa znakom minus:

$$- p_s p_{s-1} \dots p_1 p_0 \cdot q_1 q_2 \dots q_k.$$

I on je decimalan broj. Ukratko, decimalni broj je onaj racionalni broj čiji decimalni zapis ima konačno mnogo decimala.






---

**KRATKI PREGLED OSNOVNIH ZNANJA O REALNIM BROJEVIMA**


---

**Primjer 1:**

Izmjerimo dužinu  $a = 47j$  dužinom  $b = 20j$ , primjenjujući postupak decimalnoga mjerenja. Omjer  $a/b$  zapišimo u decimalnom zapisu.

*Rješenje:*

$$47j = 2 \cdot 20j + 7j \qquad (a = 2 \cdot b + r_1),$$

$$7j = 3 \cdot \frac{20j}{10} + 1j \qquad (r_1 = 3 \cdot \frac{b}{10} + r_2),$$

$$1j = 5 \cdot \frac{20j}{10^2} \qquad (r_2 = 5 \cdot \frac{b}{10^2}).$$

To možemo zapisati i ovako:

$$47j = 2 \cdot 20j + 7j$$

$$70j = 3 \cdot 20j + 10j,$$

$$100j = 5 \cdot 20j,$$

ili još jednostavnije ovako:

$$\frac{47}{20} = 2 + \frac{7}{20},$$

$$\frac{70}{20} = 3 + \frac{10}{20},$$

$$\frac{100}{20} = 5.$$

Iz jednostavnijega desnog zapisa odmah uočavamo da je riječ o standardnom pismenom dijeljenju:

$$47:20 = 2.35$$

$$70$$

$$100$$

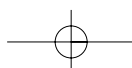
Ukratko,

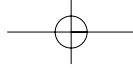
$$\frac{a}{b} = \frac{47j}{20j} = 47 : 20 = 2.35.$$

Decimalni brojevi samo su dio racionalnih brojeva, jer primjenom decimalnoga mjerenja mnoge dužine  $a$  nije moguće izmjeriti jediničnom dužinom  $b$ , čak i ako su  $a$  i  $b$  sumjerljive dužine. Na primjer,  $a = 7j$  i  $b = 3j$  sumjerljive su dužine, ali postupak decimalnoga mjerenja dužine  $a$  jediničnom dužinom  $b$  nikad se ne završava:

$$\frac{a}{b} = \frac{7j}{3j} = 7:3 = 2.333\dots = 2.\bar{3}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ 10 \\ 10 \\ \vdots \end{array}$$





## POUČAK 10

Slično je

$$\begin{array}{r}
 5 : 6 = 0.833 \dots = 0.\overline{83} \\
 \begin{array}{r}
 50 \\
 20 \\
 20 \\
 \vdots
 \end{array}
 \end{array}
 \qquad
 \text{ili}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 4 : 33 = 0.1212 \dots = 0.\overline{12} \\
 \begin{array}{r}
 40 \\
 70 \\
 40 \\
 70 \\
 \vdots
 \end{array}
 \end{array}$$

Iz prethodnih razmatranja očito je da racionalni broj  $x$  koji nije decimalan ima decimalni zapis s beskonačno mnogo decimala koje se periodički ponavljaju:

$$x = p_s p_{s-1} \dots p_1 p_0 \cdot q_1 \dots q_{j-1} \overline{q_j \dots q_k}$$

Dakle, decimalni zapis racionalnoga broja ima konačno mnogo decimala ili ima beskonačno mnogo decimala koje se periodički ponavljaju. U prvom slučaju riječ je o decimalnom broju, dok je u drugom slučaju riječ o *općem decimalnom broju* s beskonačno mnogo decimala koje se periodički ponavljaju.

Decimalni zapis broja posebno je pogodan jer se u njemu brojevi lako uspoređuju, a lako se izvode i osnovne računске operacije.

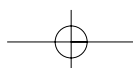
## 2. Nesumjerljivost, decimalno mjerenje i iracionalni brojevi

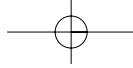
Racionalni brojevi gusto su raspoređeni po brojevnom pravcu, ali ga ipak potpuno ne ispunjavaju. Mnogo je točaka čija se udaljenost od ishodišta ne može izmjeriti jediničnom dužinom tako da rezultat mjerenja bude racionalan broj. Drugim riječima, mnoge dužine nisu sumjerljive s jediničnom dužinom. To možemo dokazati na sljedeći način.

Uočimo najprije jedno karakteristično svojstvo sumjerljivih dužina  $a$  i  $b$ . Neka je, na primjer,  $a = 12j$  i  $b = 5j$ , što znači da je  $a/b = 12/5$ . Tada uzastopno oduzimanje dužina, koje počinje s  $a$  i  $b$ , završava u konačno mnogo koraka:

$$\begin{array}{lll}
 12j - 5j = 7j, & 7j - 5j = 2j, & 5j - 2j = 3j \\
 3j - 2j = 1j, & 2j - 1j = 1j, & 1j - 1j = 0j.
 \end{array}$$

Očito je da to vrijedi za svaki par sumjerljivih dužina  $a$  i  $b$ . Dakle, ako takvo uzastopno oduzimanje, koje počinje s  $a$  i  $b$ , nikada ne završava, onda to znači da  $a$  i  $b$  nisu sumjerljive dužine. Pitagorejci su najvjerojatnije na taj način dokazali da stranica i dijagonala kvadrata nisu sumjerljive.

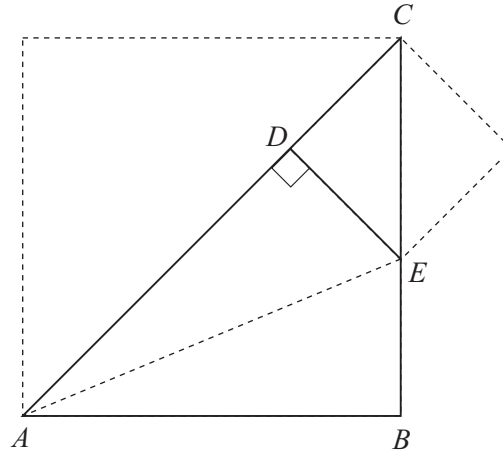





---

**KRATKI PREGLED OSNOVNIH ZNANJA O REALNIM BROJEVIMA**


---



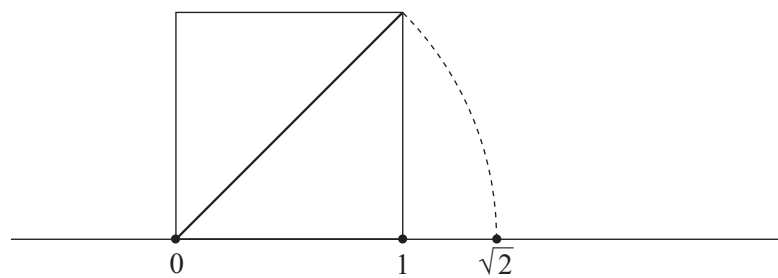
Naime, prvo oduzimanje stranice  $\overline{AB}$  od dijagonale  $\overline{AC}$  daje

$$\overline{AC} - \overline{AB} = \overline{DC}.$$

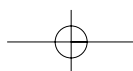
Trokut  $CDE$  je jednakokračan, pa je  $\overline{DC} = \overline{DE}$ . Trokuti  $AEB$  i  $AED$  su sukladni, pa je  $\overline{DC} = \overline{BE}$ . Dakle,  $\overline{DC} = \overline{BE}$ , pa drugo oduzimanje daje

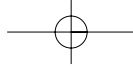
$$\overline{AB} - \overline{DC} = \overline{BC} - \overline{BE} = \overline{EC}.$$

Sljedeće oduzimanje opet je oduzimanje stranice kvadrata  $\overline{DC}$  od njegove dijagonale  $\overline{EC}$ . Ono se u smanjenom mjerilu ponavlja na isti način te vodi na sljedeći još manji kvadrat, u kojem se opet ponavlja isti postupak i tako dalje, bez kraja. Dakle, dijagonala kvadrata nije sumjerljiva s njegovom stranicom. To izričemo i tako da kažemo kako točka brojevnoga pravca označena s  $\sqrt{2}$  nije racionalna.

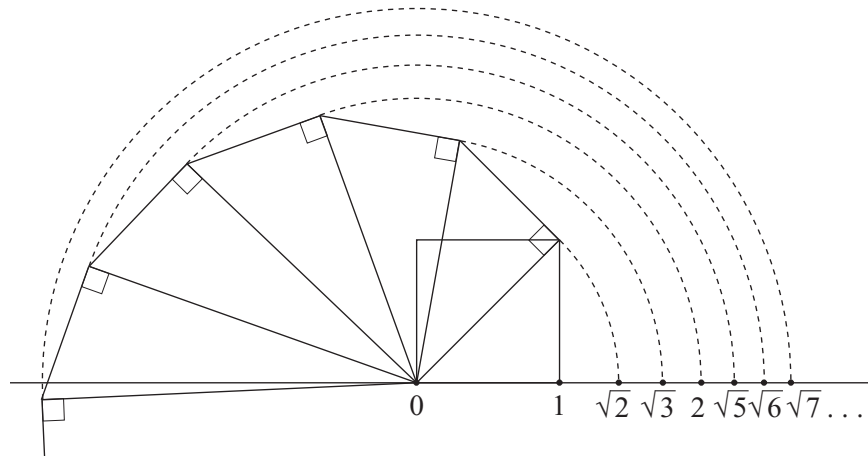


Može se dokazati da ni točke označene s  $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \dots$  također nisu racionalne.





## POUČAK 10



### Primjer 2.

Dokažimo da je  $\sqrt{n}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , racionalan broj samo ako je  $n = m^2$ ,  $m \in \mathbf{N}$ . Dakle, racionalni su samo  $\sqrt{4} = 2$ ,  $\sqrt{9} = 3$ ,  $\sqrt{16} = 4$ , ...

*Rješenje:*

Ako je  $\sqrt{n} = p/q$ , tj.  $n = p^2/q^2$ , onda je  $q^2$  djelitelj od  $p^2$ . To je moguće samo ako je  $q$  djelitelj od  $p$ . (Naime, ako  $q$  ima prosti faktor koji nije faktor od  $p$ , onda taj faktor nije ni faktor od  $p^2$ .) Budući da je  $q$  djelitelj od  $p$ , slijedi da je  $p/q = m \in \mathbf{N}$ , što znači da je  $n = p^2/q^2 = m^2$ ,  $m \in \mathbf{N}$ . Dakle, racionalni su samo  $\sqrt{4} = 2$ ,  $\sqrt{9} = 3$ ,  $\sqrt{16} = 4$ , ...

### Zadatak 1.

Dokažite da je  $\sqrt[k]{n}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , racionalan broj samo ako je  $n = m^k$ ,  $m \in \mathbf{N}$ . (Uputa: Dokaz je doslovno jednak onome u primjeru 2 ako se drugi korijen svugdje zamijeni sa  $k$ -tim korijenom, a druga potencija s  $k$ -tom potencijom.)

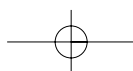
Mnoge dužine ne mogu se izmjeriti jediničnom dužinom  $j$  tako da rezultat mjerenja bude racionalan broj. Međutim, svaku dužinu  $a$  možemo sve točnije mjeriti jediničnom dužinom  $j$  primjenjujući postupak decimalnoga mjerenja. Prvo se izmjeri koliko jediničnih dužina ide u  $a$ :

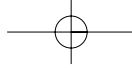
$$a = pj + r_1 \quad p \in \mathbf{N}, \quad r_1 < j.$$

Zatim se ostatak  $r_1$  mjeri 10 puta manjom dužinom  $j/10$ :

$$r_1 = q_1 \frac{j}{10} + r_2 \quad q_1 \in D, \quad r_2 < r_1,$$

gdje je  $D = \{0, 1, \dots, 9\}$ . Potom se  $r_2$  mjeri 100 puta manjom dužinom  $j/10^2$ :






---

**KRATKI PREGLED OSNOVNIH ZNANJA O REALNIM BROJEVIMA**


---

$$r_2 = q_2 \frac{j}{10^2} + r_3 \quad q_2 \in D, \quad r_3 < r_2$$

i tako dalje. Ako je dužina  $a$  nesumjerljiva sa  $j$ , postupak će se nastavljati bez kraja pa slijedi da je

$$\begin{aligned} a &= pj + q_1 \frac{j}{10} + q_2 \frac{j}{10^2} + q_3 \frac{j}{10^3} + \dots = \\ &= \left( p + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{10^2} + \frac{q_3}{10^3} + \dots \right) j. \end{aligned}$$

Drugim riječima, mjerni broj od  $a$  može se izraziti kao suma od beskonačno mnogo pribrojnika:

$$a = p + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{10^2} + \frac{q_3}{10^3} + \dots$$

Nju zovemo *općim decimalnim brojem* (s beskonačno mnogo decimala) i kraće je zapisujemo

$$p_s p_{s-1} \dots p_1 p_0 \cdot q_1 q_2 q_3 \dots$$

gdje je  $p_s p_{s-1} \dots p_1 p_0$  dekadski zapis prirodnoga broja  $p$ , a iza decimalne točke nalazi se beskonačno mnogo decimala  $q_1 q_2 q_3 \dots$ . Tu sumu ne možemo izračunati do kraja, ali što je dalje računamo, to se više približavamo točnoj vrijednosti od  $a$ . Ako s  $a_n$  označimo decimalni broj

$$a_n = p_s \dots p_0 \cdot q_1 \dots q_n,$$

koji se dobiva nakon zadnjeg mjerenja s  $1/10^n$ , odmah uočavamo da je

$$0 < a - a_n < \frac{1}{10^n},$$

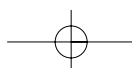
tj. decimalni broj  $a_n$  aproksimira opći decimalni broj  $a$  s točnošću  $1/10^n$  (kaže se još da je broj  $a$  aproksimiran s  $a_n$  na  $n$  decimala).

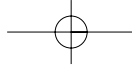
Upravo opisani opći decimalni brojevi, koji su mjere dužina nesumjerljivih s jediničnom dužinom, i njima suprotni brojevi (ispred kojih stoji minus) zovu se *iracionalni brojevi*. Skup iracionalnih brojeva  $I$  i skup racionalnih brojeva  $Q$  zajedno čine skup realnih brojeva  $R$ . Dakle,  $R = Q \cup I$  i  $Q \cap I = \emptyset$ .

Ako je udaljenost točke brojevnoga pravca od ishodišta sumjerljiva s jediničnom dužinom, onda je toj točki pridružen broj iz  $Q$ , a ako ona nije sumjerljiva s jediničnom dužinom, onda je toj točki pridružen broj iz  $I$ . Dakle, svakoj točki brojevnoga pravca pridružen je jedan broj iz  $R$ . Pravac je potpuno popunjen realnim brojevima.

Iz prethodnih razmatranja zaključujemo da za svaki realni broj (tj. za svaki opći decimalni broj) vrijedi jedna od triju mogućnosti:

(1a) Broj je racionalan i ima decimalni zapis s konačno mnogo decimala.





## Poučak 10

- (1b) Broj je racionalan i ima decimalni zapis s beskonačno mnogo decimala koje se periodički ponavljaju.
- (2) Broj je iracionalan i ima decimalni zapis s beskonačno mnogo decimala koje se periodički ne ponavljaju.

Na primjer,

$$\frac{3}{20} = 0.15, \quad \frac{9}{11} = 0.81818181\dots = 0.\overline{81}$$

$$\sqrt{2} = 1.41421\dots \text{ (bez periodičkih ponavljanja).}$$

### Primjer 3.

Iracionalni broj  $\sqrt{2}$  izračunajmo na pet decimala.

*Rješenje:*

$1^2 < 2 < 2^2$	$1.411^2 < 2$
$1.1^2 < 2$	$1.412^2 < 2$
$1.2^2 < 2$	$1.413^2 < 2$
$1.3^2 < 2$	$1.414^2 < 2 < 1.415^2$
$1.4^2 < 2 < 1.5^2$	$1.4141^2 < 2$
$1.41^2 < 2 < 1.42^2$	$1.4142^2 < 2 < 1.4143^2$
	$1.41421^2 < 2 < 1.41422^2$

Dakle,  $\sqrt{2} \approx 1.41421$ .

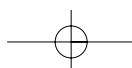
### Zadatak 2.

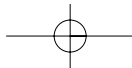
Izračunajte  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt[3]{2}$ ,  $\sqrt[3]{3}$  i  $\sqrt[3]{4}$  na tri decimale.

## 3. Potpunost i neprebrojivost skupa realnih brojeva

Poput racionalnih brojeva i realni su brojevi (kao njihov nadskup) gusto raspoređeni po brojevnom pravcu. Međutim, oni su i potpuno raspoređeni po brojevnom pravcu, tj. sve točke brojevnoga pravca pokrivene su realnim brojevima.

Potpunost skupa realnih brojeva može se iskazati i na sljedeći način:






---

**KRATKI PREGLED OSNOVNIH ZNANJA O REALNIM BROJEVIMA**

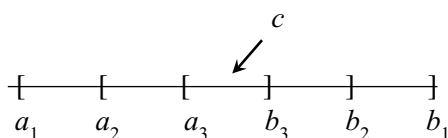

---

**POTPUNOST SKUPA REALNIH BROJEVA**

Ako je

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \dots$$

beskonačni niz međusobno uklopljenih segmenata, onda postoji broj  $c$  koji je sadržan u svim tim segmentima.



Da skup racionalnih brojeva nije potpun, pokazuje nam primjer 3. Tamo smo konstruirali niz uklopljenih segmenata s racionalnim rubovima

$$[1, 2] \supseteq [1.4, 1.5] \supseteq [1.41, 1.42] \supseteq [1.414, 1.415] \supseteq \dots$$

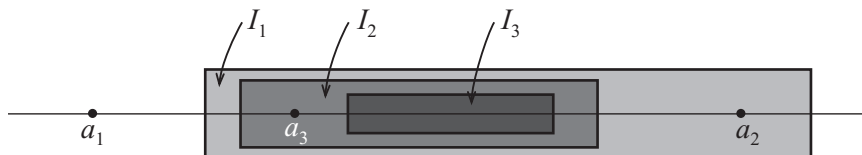
za koji ne postoji racionalni broj  $c$  sadržan u svim tim segmentima. Naime, u svim tim segmentima sadržan je samo iracionalni broj  $\sqrt{2}$ .

Svojstvo potpunosti temeljno je svojstvo kojim se skup realnih brojeva bitno razlikuje od skupa racionalnih brojeva. Zbog toga svojstva realnih brojeva ima puno više nego racionalnih. Naime, oba su skupa beskonačna, ali  $\mathbf{Q}$  je prebrojiv, dok  $\mathbf{R}$  nije prebrojiv. To znači da se elementi od  $\mathbf{Q}$  mogu svrstati u niz, dok se elementi od  $\mathbf{R}$  ne mogu. Dakle, nijedan niz realnih brojeva ne može obuhvatiti sve realne brojeve. Tu važnu posljedicu potpunosti realnih brojeva sada ćemo i dokazati.

Za bilo koji niz realnih brojeva

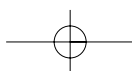
$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$$

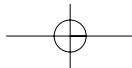
dokazat ćemo da ne obuhvaća sve realne brojeve. Odaberimo najprije segment  $I_1$  koji ne sadrži  $a_1$ . Zatim odaberimo njegov podsegment  $I_2$  koji ne sadrži  $a_2$ , potom njegov podsegment  $I_3$  koji ne sadrži  $a_3$  i tako dalje.



Tako nastaje uklopljeni niz segmenata

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots$$



**Poučak 10**

---

Zbog potpunosti skupa realnih brojeva postoji realni broj  $a$  koji je sadržan u svim segmentima  $I_n$ . Budući da za svaki  $n$  vrijedi  $a_n \notin I_n$ , slijedi da je  $a \neq a_n$  za svaki  $n$ . Dakle, niz  $a_1, a_2, \dots$  ne obuhvaća sve realne brojeve što smo i htjeli dokazati.

