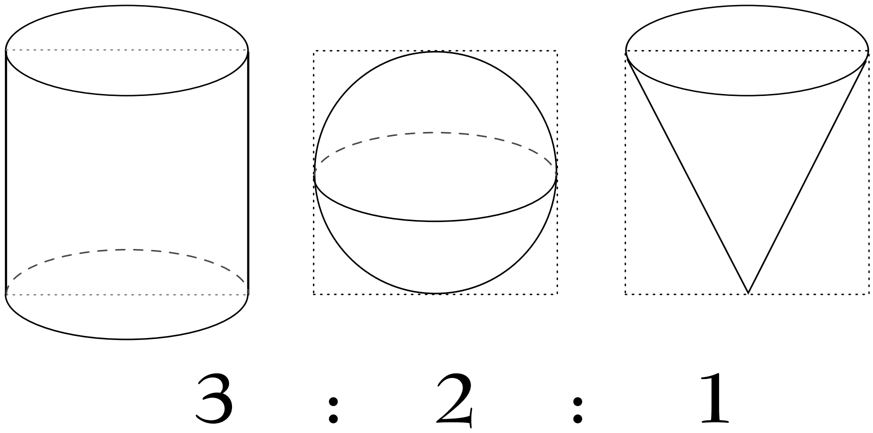
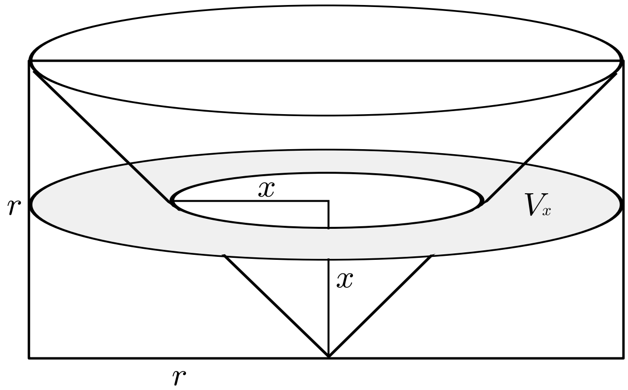
Dvije nadopune Arhimedova nadgrobnoga spomenika

Zvonimir Šikić

Volumeni valjka i njemu upisane kugle i stošca odnose se kao 3 : 2 : 1 (uočite da valjak mora imati kvadratični osni presjek kako bi mu se mogla upisati kugla).

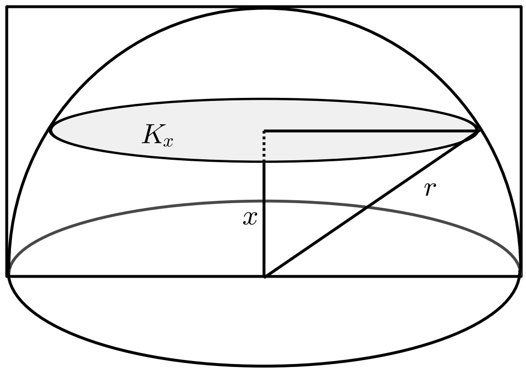


Omjer volumena proizvoljnog valjka i upisanoga stošca, 3 : 1, otkrio je atomist Demokrit prije 2500 godina. Polazeći od te činjenice Arhimed je 200 godina kasnije dokazao da volumeni valjka i upisane kugle stoje u omjeru 3 : 2. Simplificirana verzija Arhimedova dokaza izgleda ovako. Promotrimo pola našeg (kvadratičnog) valjka radijusa r i iz njega "izvadimo" upisani stožac. Prema Demokritu, preostale su nam $\frac{2}{3}$ početnoga valjka.



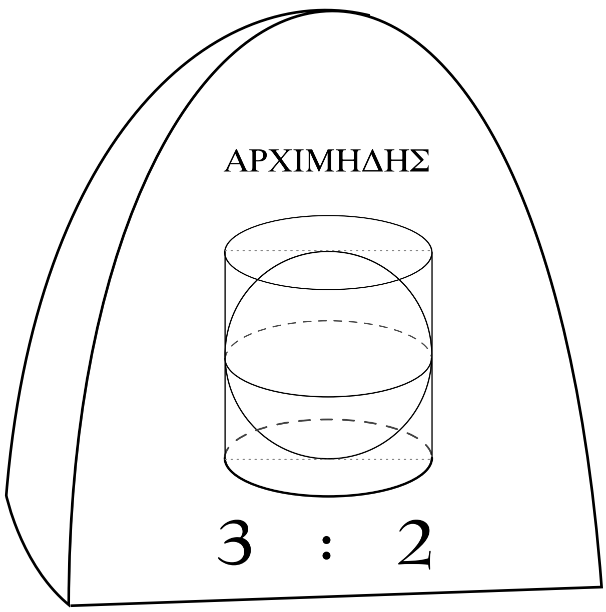
$$V_x = r^2\pi - x^2\pi = (r^2 - x^2)\pi$$

Kada smo preostale $\frac{2}{3}$ valjka presjekli ravninom, na visini x, dobili smo kružni vijenac površine $V_x = (r^2 - x^2)\pi$. Promotrimo sada pola naše kugle radijusa r. Ako nju ravninom presiječemo na visini x dobit ćemo krug iste površine $K_x = (r^2 - x^2)\pi$.



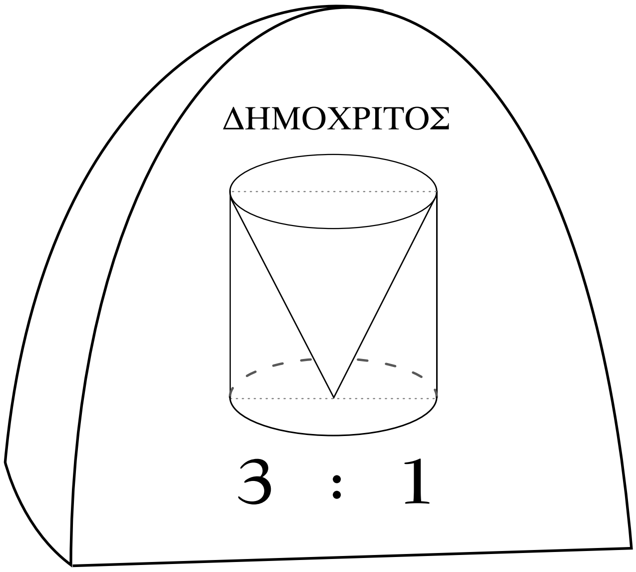
$$K_x = (r^2 - x^2)\pi$$

Budući da je $V_x = K_x$ na svakoj visini x, slijedi da polukugla i $\frac{2}{3}$ poluvaljka imaju isti volumen. Dakle, omjer je volumena kugle i opisanoga valjka $2 : 3$. (Primijetimo da se Arhimed dvije tisuće godina prije Cavalijerija koristio *Cavalijerijevim* principom. Naravno njime se još ranije koristio i Demokrit.) Arhimed je bio toliko oduševljen ovim rezultatom da je želio da se on uklesa na njegov nadgrobni spomenik. Nažalost Arhimedov grob nije sačuvan, ali možemo pretpostaviti da je njegova nadgrobna ploča izgledala ovako:

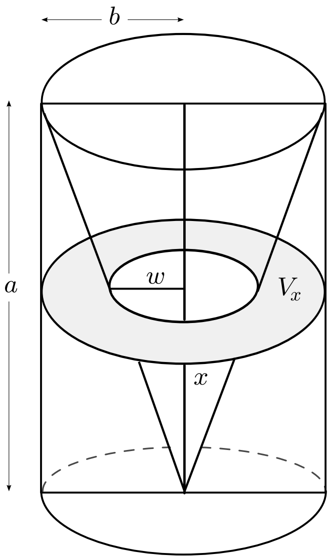


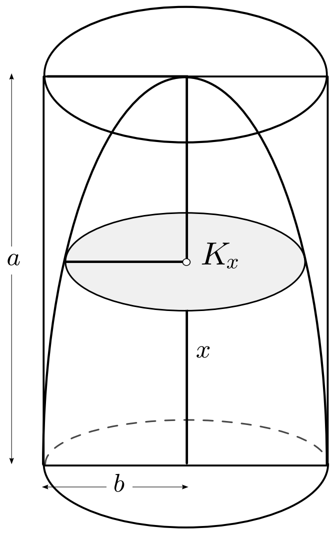
(Ono što je Arhimeda dodatno oduševilo jest da su i oplošja valjka i kugle u istom omjeru ili ekvivalentno, plašt valjka jednak je oplošju kugle. To čitatelj može lako sam provjeriti.)

No vratimo se Demokritu. Na njegovu nadgrobnu ploču mogli bismo staviti sljedeće:



Za razliku od Arhimedova valjka, Demokritov ne mora biti kvadratičan nego može biti proizvoljan. Mi želimo poopćiti Arhimedov rezultat tako da u proizvoljni valjak, pored stošca, upišemo još jedno tijelo (analogno Arhimedovoj kugli upisanoj u kvadratični valjak), tako da volumeni budu u omjeru 3 : 2 : 1. Analogno gornjemu dokazu, potražit ćemo tijelo koje na visini x ima kružni presjek $K_x = V_x$, gdje je V_x vijenac koji nalazimo na visini x ako iz proizvoljnog valjka *izvadimo stožac*. Volumen tog tijela bit će $\frac{2}{3}$ volumena valjka tj. to će tijelo s valjkom biti u omjeru 2 : 3.





$$\frac{w}{x} = \frac{b}{a}, \qquad w = \frac{b}{a}x$$

$$V_x = (b^2 - u^2)\pi = (b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2)\pi$$

$$K_x = y^2\pi = V_x \Rightarrow$$

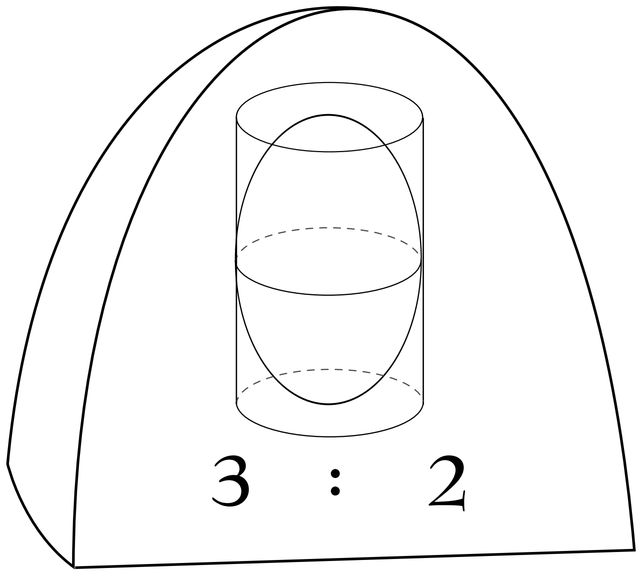
$$y^2 = b^2 - \frac{b^{2\,2}}{a}x^2, \text{ tj. } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Dakle, riječ je o rotacijskom elipsoidu s osima:

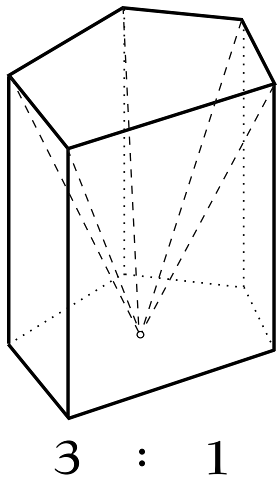
$a = \textit{visina valjka}$ i

$b = \textit{radijus valjka}$.

To je prva nadopuna Arhimedova nadgrobnog spomenika:

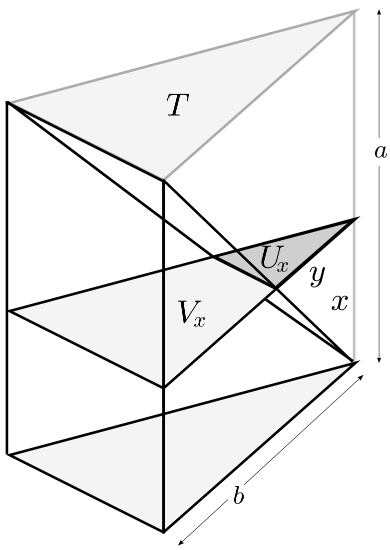


Vratimo se još jednom Demokritu. On je svoj rezultat najprije izveo za piramide i prizme:



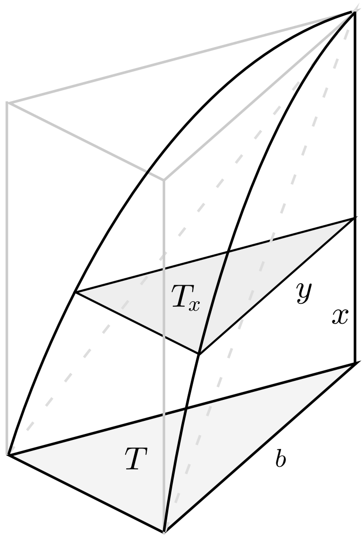
Zatim je rezultat za stošce i valjke dobio kao granični slučaj piramida i prizmi. Mi želimo poopćiti Arhimedov rezultat i u tom smjeru, terizmu, pored piramide, upisati još jedno tijelo (analogno rotacijskom elipsoidu), takvo da volumeni budu u omjeru 3 : 2 : 1.

Promotrimo zato prizmu iz koje je "izvađena" piramida; tako je dobiveno tijelo kojeg je volumen $\frac{2}{3}$ volumena početne prizme (na slici je samo dio tijela uz jednu pobočku).



$$V_x = T - U_x = T - \left(\frac{u}{b}\right)^2 T$$
$$= T - \left(\frac{x}{a}\right)^2 T = \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right) T$$

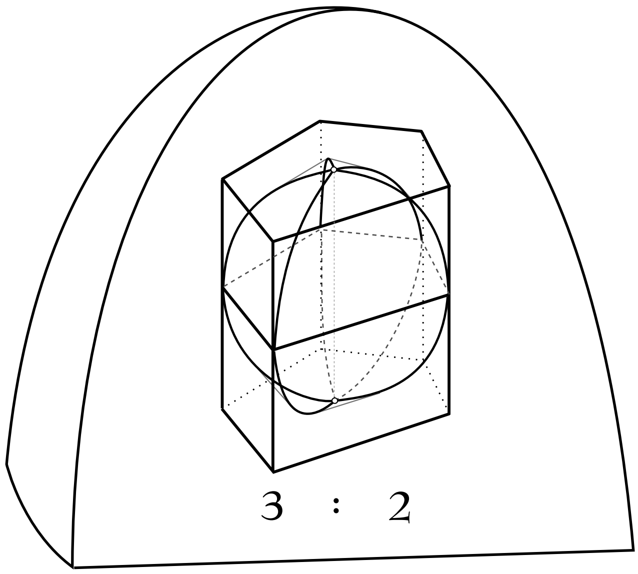
Trokut T_x sličan je trokutu T, s koeficijentom sličnosti $\frac{u}{b} = \frac{x}{a}$. Dakle, dio poligonalnog vijenca na slici, koji je na visini x, ima površinu $V_x = (1 - (\frac{x}{a})^2)T$, gdje je T odgovarajući dio baze prizme. Tijelo poligonalnog presjeka koje na svakoj visini x ima presjek iste površine ($P_x = V_x$) imat će i isti volumen, tj. $\frac{2}{3}$ volumena prizme. To je traženo tijelo i ono izgleda ovako (na slici je opet samo dio uz jednu pobočku):



$$T_x = \left(\frac{y}{b}\right)^2 T = V_x = \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right) T$$
$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(Trokut P_x sličan je trokutu T s koeficijentom sličnosti $\frac{y}{b}$.) Dakle, riječ je o klinu isječenom iz eliptičnog valjka. Tijelo složeno od takvih klinova nad stranicama poligonalne baze zovemo eliptička kupola. Njezin plašt čine elipse čija je jedna os visina prizme, a druga je spojnica nožišta visine i točke na obodu poligonalne baze (naime presjek eliptičnog valjka s ravninom uvijek je elipsa).

Tako definirana kupola naša je druga nadopuna Arhimedova nadgrobnoga spomenika.



(*Predavanje je održano 2. veljače 20005. u Zagrebu na stručno-metodičkim večerima Nastavne sekcije HMD-a.*)