

## NEKE PRIMJENE MEHANIKE U ELEMENTARNOJ GEOMETRIJI

ZVONIMIR ŠIKIĆ, Zagreb

Poznato je značenje geometrijskog predočenja osnovnih mehaničkih i općenito fizikalnih veličina. Jedan od elementarnijih primjera je predočenje sile kliznim vektorom (usmjerenom dužinom čiji početak može biti bilo koja točka pravca — nosača te dužine). Pojmovi rezultante sila i ravnotežnog stanja, koji imaju posve fizikalni smisao, dobivaju ovim predočenjem jednostavne i lako shvatljive geometrijske korelate:

Rezultanta sistema sila jedna je sila ekvivalentna sistemu u jasno određenom fizikalnom smislu. Sistemi sila su ekvivalentni ako uzrokuju jednaka gibanja jednakih tijela.

Geometrijsko predočenje omogućuje jednostavan geometrijski korelat ovom pojmu. To je slaganje kliznih vektora po pravilu paralelograma, u slučaju da se nosači vektora sijeku, ili po pravilu krakova, u slučaju paralelnosti nosača. Simetričnom pojmu ekvivalentnosti sila odgovaraju, naravno, i obrnuta pravila razlaganja kliznih vektora.

Sistem sila je u ravnoteži ako ne uzrokuje gibanje tijela. To je fizikalni smisao. Geometrijsko predočenje opet omogućuje jednostavne geometrijske karakterizacije izvedene iz prethodnih. Dvije su sile u ravnoteži ako imaju jednake iznose, zajednički nosač i suprotne smjerove.

Da bi tri sile bile u ravnoteži, nužno je da se njihovi nosači sijeku u jednoj točki (naime, ako to nije slučaj, nosač rezultante prvih dviju sila nije ujedno i nosač treće sile, pa ne može biti s njom u ravnoteži).

Posljednji iskazi govore u stvari o geometrijskom predočenju sila iako izriječno spominju same sile. Često, naime, identificiramo silu s odgovarajućim geometrijskim predočenjem, kliznim vektorom. Toliko je značenje geometrijskog predočenja.

No ne bismo više o tome kako geometrijsko djeluje u mehaničkom. Ovdje želimo upozoriti na povratnu vezu. Dokazat ćemo nekoliko geometrijskih teorema argumentirajući ih „kao u mehanici” ili, točnije, služeći se slaganjem i razlaganjem sila te navedenim iskazima o ravnoteži kao fizikalnim očevidnostima<sup>1</sup> (znatne heurističke vrijednosti<sup>2</sup>).

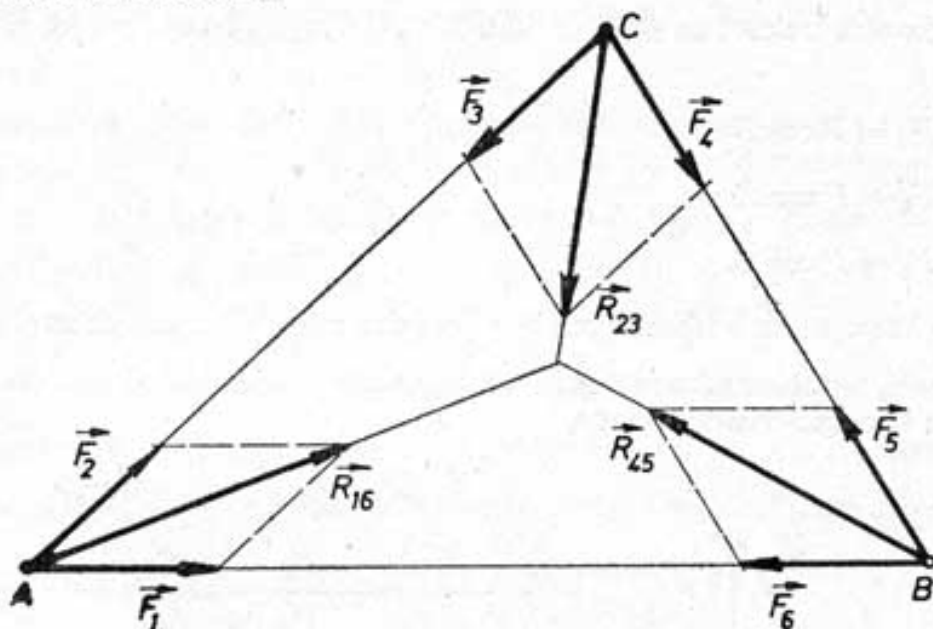
**Teorem 1.** Simetrane kutova u trokutu sijeku se u jednoj točki.

<sup>1</sup> Koje su, ako to nekome pomaže, i eksperimentalno potvrđive.

<sup>2</sup> Jasno je prema prethodnom opisu veze mehanike i geometrije (na ovom nivou) da bi se ti dokazi mogli „očistiti” do geometrijske argumentacije, ali je isto tako jasno da bi time (bar u ovom obliku) izgubili svoju heurističku vrijednost.

### Dokaz

Promotrimo šest po iznosu jednakih sila,  $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_6$ , koje djeluju duž stranica trokuta kao na sl. 1.<sup>3</sup> Budući da te sile poništavaju jedna drugu u parovima, čitav je sistem u ravnoteži pa je, dakle, i sistem rezultanti  $\vec{R}_{16}$ ,  $\vec{R}_{23}$  i  $\vec{R}_{45}$  također u ravnoteži. Pravci nosači rezultanata sijeku se, dakle, u jednoj točki. Jasno je da su ti pravci simetrale kutova u trokutu.

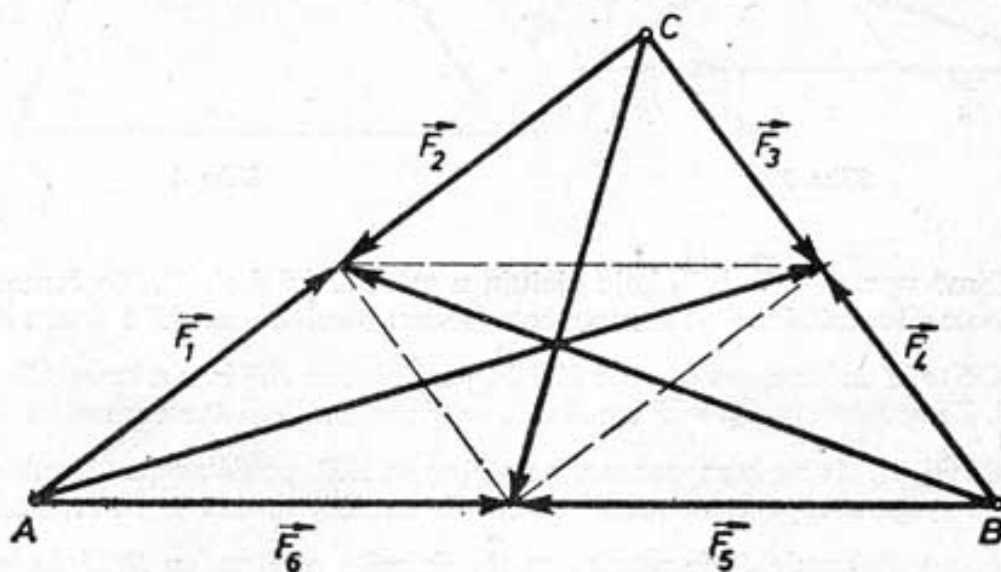


Slika 1

**Teorem 2.** Težišnice trokuta sijeku se u jednoj točki.

### Dokaz

Promotrimo šest sila  $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_6$  koje djeluju duž stranica trokuta kao na sl. 2. Svaka od tih sila ima iznos jednak polovici duljine pripadne stranice trokuta. Rezul-



Slika 2

<sup>3</sup> Iznos sile  $\vec{X}$  u ovom je članku općenito označen sa  $X$ .

tante pojedinih parova jednake su težišnicama trokuta. To se lako vidi uočavanjem paralelograma na sl. 2. Sile  $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_6$  su u ravnoteži, pa to kao i u slučaju iz teorema 1. dokazuje našu tvrdnju.

**Teorem 3.** Visine trokuta sijeku se u jednoj točki.

**Dokaz**

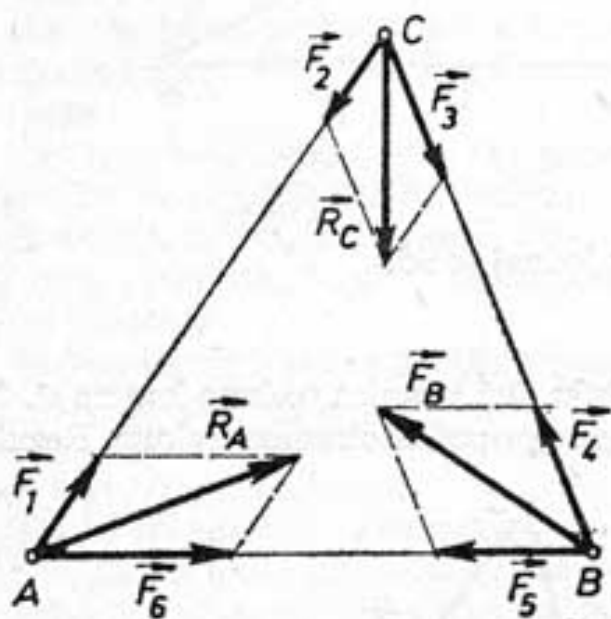
Duž stranica trokuta na sl. 3. djeluju sile  $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_6$  iznosa određenih tako da vrijedi

$$F_1 = F_2 = F \cos B$$

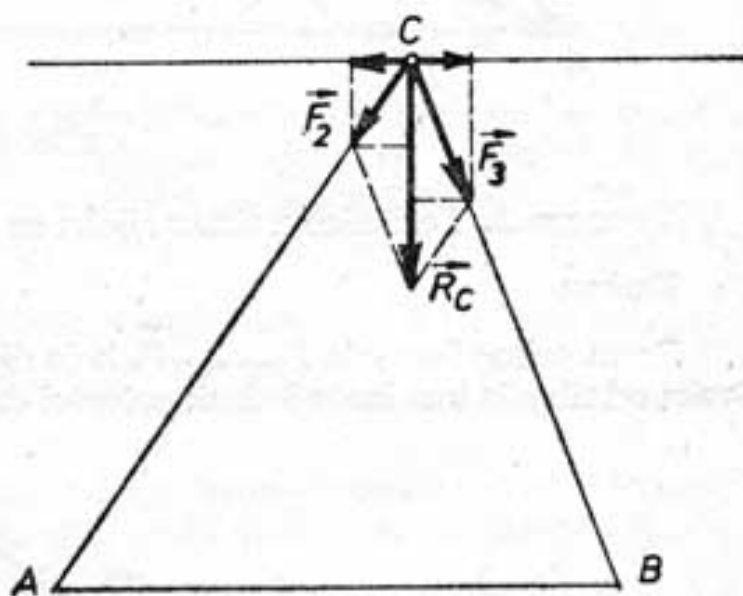
$$F_3 = F_4 = F \cos A$$

$$F_5 = F_6 = F \cos C,$$

gdje je  $F$  neka pogodno odabrana veličina (jedinica mjere). Budući da su sile  $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_6$  u ravnoteži, nosači rezultanata  $\vec{R}_A, \vec{R}_B$  i  $\vec{R}_C$  nužno se sijeku u jednoj točki. Pokazat ćemo da su ti nosači visine trokuta.



Slika 3



Slika 4

Složimo npr. sile  $\vec{F}_2$  i  $\vec{F}_3$  koje djeluju u vrhu  $C$  (vidi sl. 4). To ćemo učiniti tako da obje sile razložimo na komponente; jednu paralelno sa  $AB$  i drugu okomito na  $AB$ . Očito je da komponente sile  $\vec{F}_2$  i  $\vec{F}_3$  paralelne sa  $AB$  imaju iznose  $F_2 \cos A$  i  $F_3 \cos B$ . Zbog zahtjeva  $F_2 = F \cos B$  i  $F_3 = F \cos A$  slijedi da su iznosi tih komponenti jednaki, tj. da se komponente, paralelne sa  $AB$ , poništavaju. Rezultanta  $\vec{R}_C$  jednaka je stoga zbroju komponenti okomitih na  $AB$ , tj. ona je sama okomita na  $AB$ . Slično se dokazuje da je rezultanta  $\vec{R}_A$  okomita na stranicu  $BC$  i da je rezultanta  $\vec{R}_B$  okomita na stranicu  $AC$ . Time je dokaz završen.

**Teorem 4.** Pravci  $a$ ,  $b$  i  $c$  koji prolaze vrhovima  $A$ ,  $B$  i  $C$  trokuta  $ABC$  i sijeku stranice  $BC$ ,  $AC$  i  $AB$  tog trokuta imaju zajedničku točku ako i samo ako vrijedi jednakost

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} = \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = 1,$$

gdje su  $\alpha_1, \alpha_2$  kutovi<sup>4</sup> na koje pravac  $a$  dijeli kut uz  $A$ ,  $\beta_1$  i  $\beta_2$  kutovi na koje pravac  $b$  dijeli kut uz  $B$ , a  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$  kutovi na koje pravac  $c$  dijeli kut uz  $C$ .

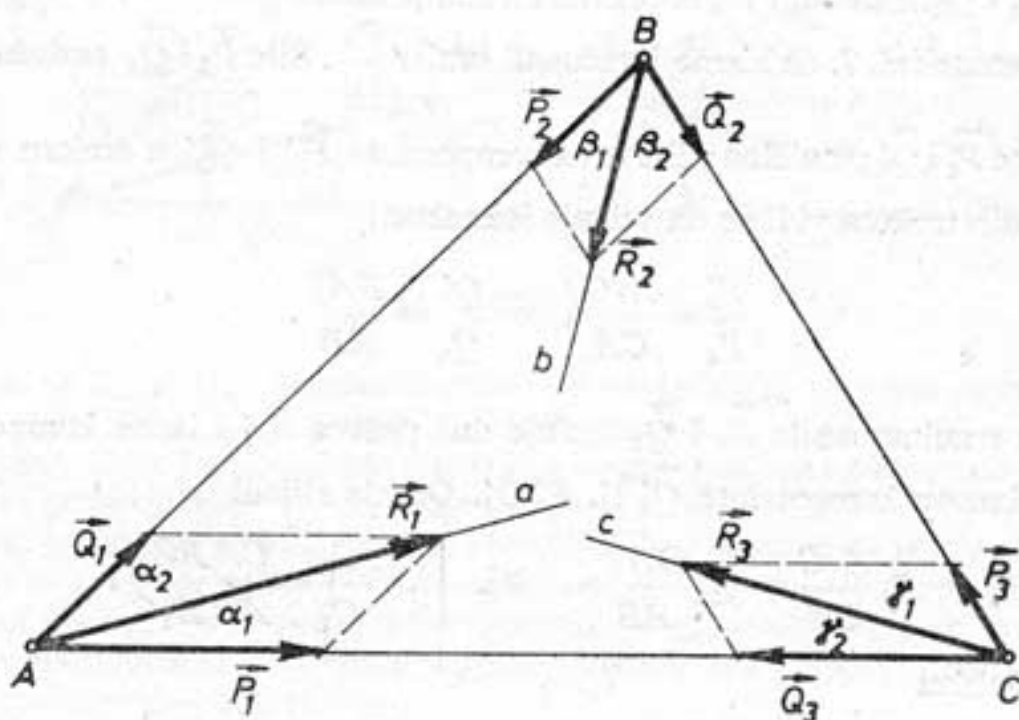
### Dokaz

Promotrimo trokut  $ABC$  čijim vrhovima prolaze pravci  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i dijele kutove tog trokuta na parove  $\alpha_1, \alpha_2$ ;  $\beta_1, \beta_2$  i  $\gamma_1, \gamma_2$  kao u iskazu teorema (vidi sl. 5). Duž pravca  $a$ , u vrhu  $A$ , neka djeluje proizvoljna sila  $\vec{R}_1$  čije su komponente duž  $AB$  i  $AC$  jednake  $\vec{P}_1$  i  $\vec{Q}_1$ . Sile  $\vec{R}_2$  i  $\vec{R}_3$  neka djeluju duž  $b$  i  $c$  u vrhovima  $B$  i  $C$ , a odgovarajuće komponente neka su  $\vec{P}_2, \vec{Q}_2$  i  $\vec{P}_3, \vec{Q}_3$ . Sile  $\vec{P}_2, \vec{R}_2, \vec{Q}_2$  i  $\vec{Q}_3, \vec{R}_3, \vec{P}_3$  jednoznačno su određene zahtjevom da komponenta  $\vec{P}_2$  ništi komponentu  $\vec{Q}_1$ , a komponenta  $\vec{P}_3$  komponentu  $\vec{Q}_2$ . Prema tim definicijama sistem sila  $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{R}_3$  ekvivalentan je sistemu sila  $\vec{P}_1, \vec{Q}_3$ . Iz odgovarajućih paralelograma na sl. 5. lako se vidi da je

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{Q_1}{P_1}, \quad \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} = \frac{Q_2}{P_2}, \quad \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = \frac{Q_3}{P_3}.$$

Odatle slijedi

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = \frac{Q_1 Q_2 Q_3}{P_1 P_2 P_3} = \frac{Q_3}{P_1}.$$



Slika 5

<sup>4</sup> Ovdje ne dopuštamo „kutove“ od nula stupnjeva.

Moguća su dva slučaja:

$$1. \frac{\sin \alpha_1 \sin \beta_1 \sin \gamma_1}{\sin \alpha_2 \sin \beta_2 \sin \gamma_2} = 1.$$

Tada je  $P_1 = Q_3$  i sile  $\vec{P}_1$  i  $\vec{Q}_3$  su u ravnoteži, odakle slijedi da su i sile  $\vec{R}_1$ ,  $\vec{R}_2$  i  $\vec{R}_3$  u ravnoteži. Pravci  $a$ ,  $b$  i  $c$  sijeku se u jednoj točki.

$$2. \frac{\sin \alpha_1 \sin \beta_1 \sin \gamma_1}{\sin \alpha_2 \sin \beta_2 \sin \gamma_2} \neq 1.$$

Tada je  $P_1 \neq Q_3$ . Rezultanta sistema  $\vec{R}_1$ ,  $\vec{R}_2$  i  $\vec{R}_3$  djeluje duž stranice  $AC$  jer je jednaka rezultanti sistema  $\vec{P}_1$ ,  $\vec{Q}_3$ . Pravci  $a$ ,  $b$  i  $c$  duž kojih djeluju rezultante  $\vec{R}_1$ ,  $\vec{R}_2$  i  $\vec{R}_3$  ne mogu imati zajedničko sjecište jer bi u tom slučaju rezultanta sistema  $\vec{R}_1$ ,  $\vec{R}_2$ ,  $\vec{R}_3$  morala djelovati duž pravca koji prolazi tim sjecištem. Vidjeli smo, međutim, da je taj pravac nužno pravac  $AC$ . Očito je da pretpostavljeno zajedničko sjecište pravaca  $a$ ,  $b$  i  $c$  ne može ležati na pravcu  $AC$ .

**Teorem 5.** Spojnice  $AA_1$ ,  $BB_1$  i  $CC_1$  vrhova  $A$ ,  $B$ ,  $C$  trokuta  $ABC$  s točkama  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  na suprotnim stranicama tog trokuta sijeku se u jednoj točki ako i samo ako vrijedi jednakost

$$\frac{AC_1}{C_1B} \frac{BA_1}{A_1C} \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

### Dokaz

Promotrimo trokut na sl. 6. Duž  $AA_1$  djeluje proizvoljna sila  $\vec{R}_1$  čije su komponente  $\vec{P}_1$  i  $\vec{Q}_1$ . Sile  $\vec{R}_2$  i  $\vec{R}_3$  određene su zahtjevima  $P_2 = Q_1$  i  $P_3 = Q_2$ . Promotrimo za trenutak sl. 7. da bismo izračunali omjer  $\frac{P_1}{Q_1}$ . Sile  $\vec{P}_1$  i  $\vec{Q}_1$  razložene su na komponente  $\vec{P}'_1$  i  $\vec{Q}'_1$  paralelne s  $BC$  te na komponente  $\vec{P}''_1$  i  $\vec{Q}''_1$  u smjeru rezultante  $\vec{R}_1$ . Iz sličnih trokuta vidi se da vrijede jednakosti

$$\frac{P'_1}{P_1} = \frac{A_1C}{CA}, \quad \frac{Q'_1}{Q_1} = \frac{BA_1}{AB}.$$

Budući da rezultanta sila  $\vec{P}_1$  i  $\vec{Q}_1$  djeluje duž pravca  $AA_1$ , iznos komponente  $\vec{P}'_1$  jednak je iznosu komponente  $\vec{Q}'_1$  tj.  $P'_1 = Q'_1$ . Odatle slijedi

$$P_1 \frac{A_1C}{CA} = Q_1 \frac{BA_1}{AB} \quad \text{tj.} \quad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{CA}{AB} \frac{BA_1}{A_1C}.$$

Slično se dobiva

$$\frac{P_2}{Q_2} = \frac{AB}{BC} \frac{CB_1}{B_1A} \quad \text{i} \quad \frac{P_3}{Q_3} = \frac{BC}{CA} \frac{AC_1}{C_1B}.$$

Množenjem dolazimo do jednakosti:

$$\frac{P_1}{Q_1} \frac{P_2}{Q_2} \frac{P_3}{Q_3} = \frac{BA_1}{A_1C} \frac{CB_1}{B_1A} \frac{AC_1}{C_1B}$$

Odatle, zbog  $P_2 = Q_1$  i  $P_3 = Q_2$ , slijedi

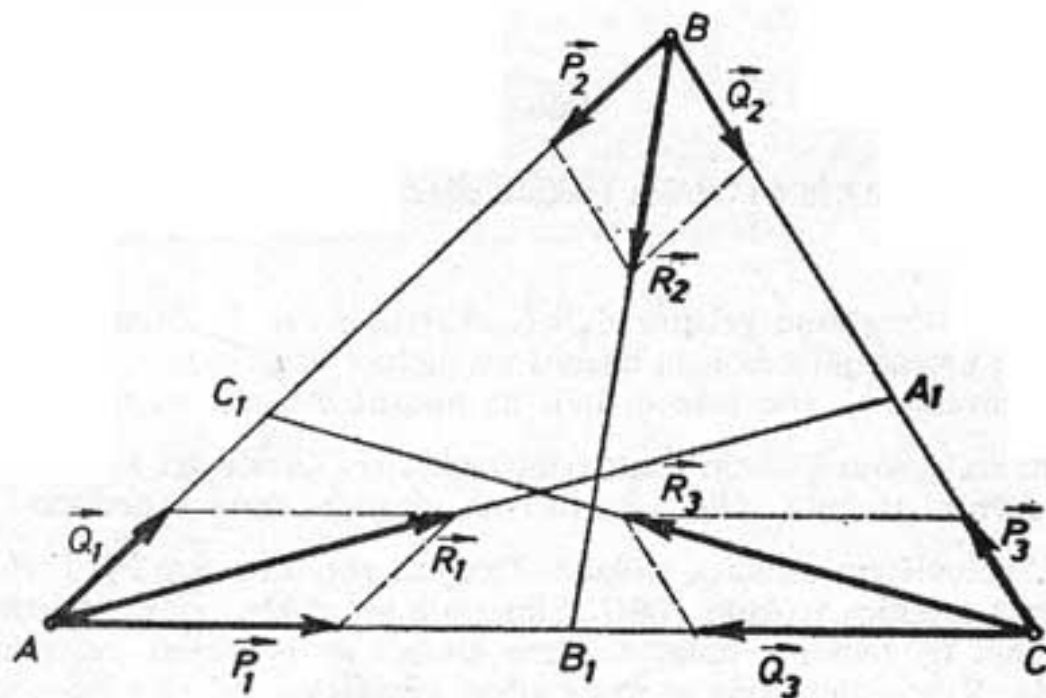
$$\frac{AC_1}{C_1B} \frac{BA_1}{A_1C} \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{P_1}{Q_3}$$

Moguća su dva slučaja:

1.  $\frac{AC_1}{C_1B} \frac{BA_1}{A_1C} \frac{CB_1}{B_1A} = 1$ .

Tada je  $P_1 = Q_3$ . Sile  $\vec{R}_1$ ,  $\vec{R}_2$  i  $\vec{R}_3$  su u ravnoteži pa spojnice  $AA_1$ ,  $BB_1$  i  $CC_1$  imaju zajedničku točku.

2.  $\frac{AC_1}{C_1B} \frac{BA_1}{A_1C} \frac{CB_1}{B_1A} \neq 1$ .

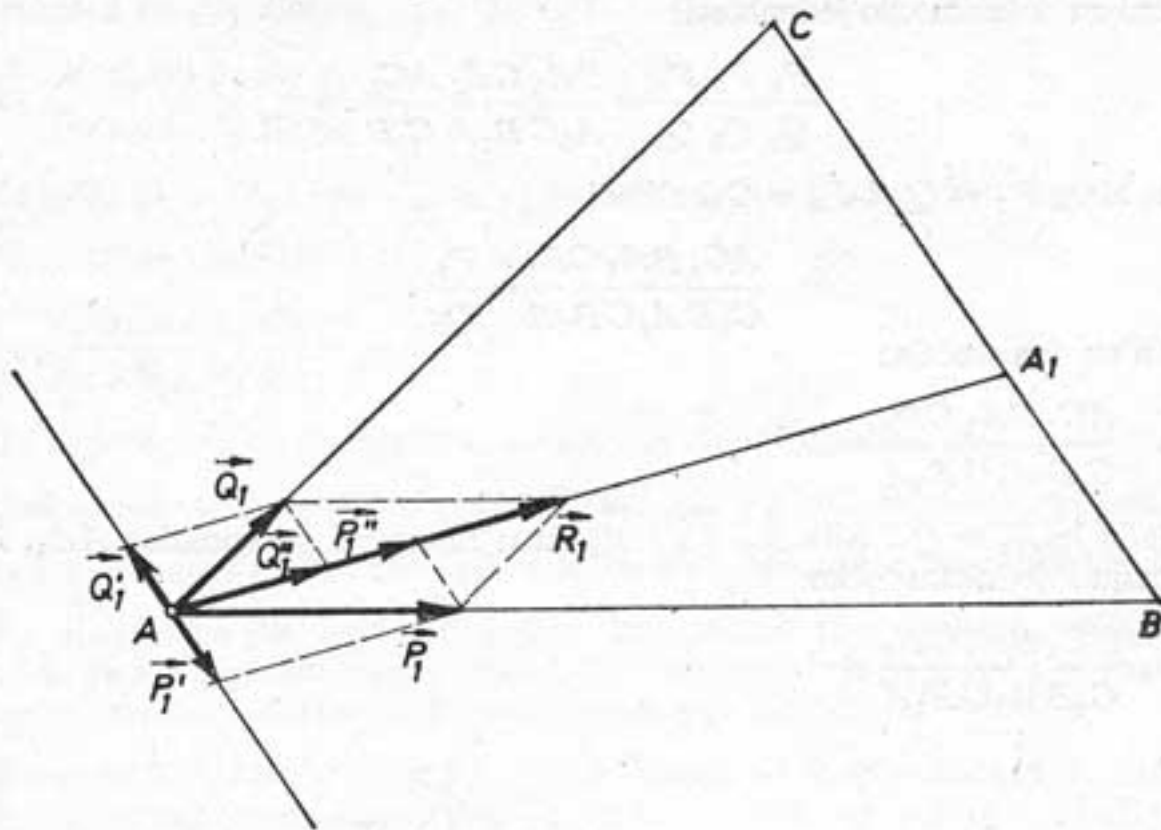


Slika 6

† Tada je  $P_1 \neq Q_3$ . Argumentacijom iz prethodnog teorema dokazujemo da spojnice  $AA_1$ ,  $BB_1$  i  $CC_1$  nemaju zajedničku točku.

Sljedeći teorem dokazujemo služeći se dvama fizikalno očevidnim principima. Prvi tvrdi nemogućnost perpetuum mobilea u ovom obliku: zatvorena posuda jednolično ispunjena plinom ne može se gibati bez utjecaja vanjskih sila. Drugi je pravilo o slaganju paralelnih sila u ovom obliku: u zatvorenoj posudi jednolično ispunjenoj plinom rezultanta sila koje djeluju zbog pritiska plina na ravnu stijenku posude proporcionalna je površini stijenke i djeluje duž pravca koji prolazi okomito na stijenku njenim težištem.<sup>5</sup>

<sup>5</sup> Ne treba ponavljati da se i u ovom iskazu, kao i prije, krije govor o geometrijskim predočnjima, naravno sada mnogo suptilnijim (infinitesimalnim).



Slika 7

**Teorem 6.** Simetrale stranica trokuta sijeku se u jednoj točki.

**Dokaz**

Promotrimo trostranu prizmu  $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$  na sl. 8. Zamislamo da je ona jednolično ispunjena plinom i da na nju ne djeluju vanjske sile. Tada je prizma u stanju mirovanja, tj. sile koje djeluju na njezine stijenke su u ravnoteži. Sile koje djeluju na gornju i donju bazu poništavaju se. Ostale tri sile  $\vec{F}_A$ ,  $\vec{F}_B$  i  $\vec{F}_C$  djeluju u ravnini trokuta  $ABC$  okomito na njegove stranice prolazeći težištem stijenki, tj. polovištem stranica trokuta. Drugim riječima,  $\vec{F}_A$ ,  $\vec{F}_B$  i  $\vec{F}_C$  djeluju duž simetrala stranica trokuta  $ABC$ . Simetrale se, dakle, sijeku u jednoj točki.

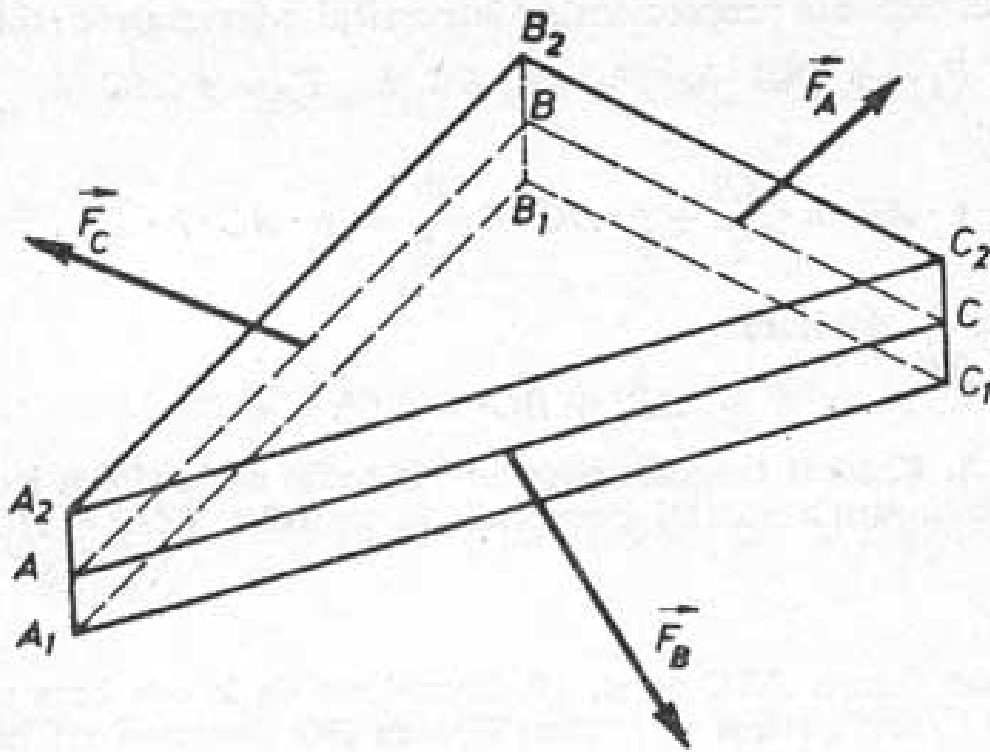
Posljednja tri teorema dokazat ćemo služeći se poznatim pravilom statike krutog tijela: Kruto tijelo koje se može gibati oko fiksne osi ne giba se oko te osi samo u slučaju kada na njega djeluju sile kojima je suma momenata s obzirom na tu os jednaka nuli. Apsolutni iznos momenta sile okomite na os<sup>6</sup> s obzirom na tu os dobro je poznati umnožak (iznosa) sile i kraka (sile). Momenti sile koje uzrokuju rotacije suprotnih smjerova imaju suprotne predznake.

**Teorem 7.** Pitagorin teorem. Suma kvadrata nad katetama pravokutnog trokuta jednaka je kvadratu nad hipotenuzom.

**Dokaz**

Promotrimo trostranu prizmu čija je baza pravokutan trokut  $ABC$  (vidi sl. 9). Zamislamo da je prizma ispunjena plinom i da se može vrtjeti oko fiksne osi  $OO'$ . Ako na prizmu ne djeluju vanjske sile, ona će mirovati. Suma momenata sile koje

<sup>6</sup> Promatrat ćemo samo takve slučajeve.



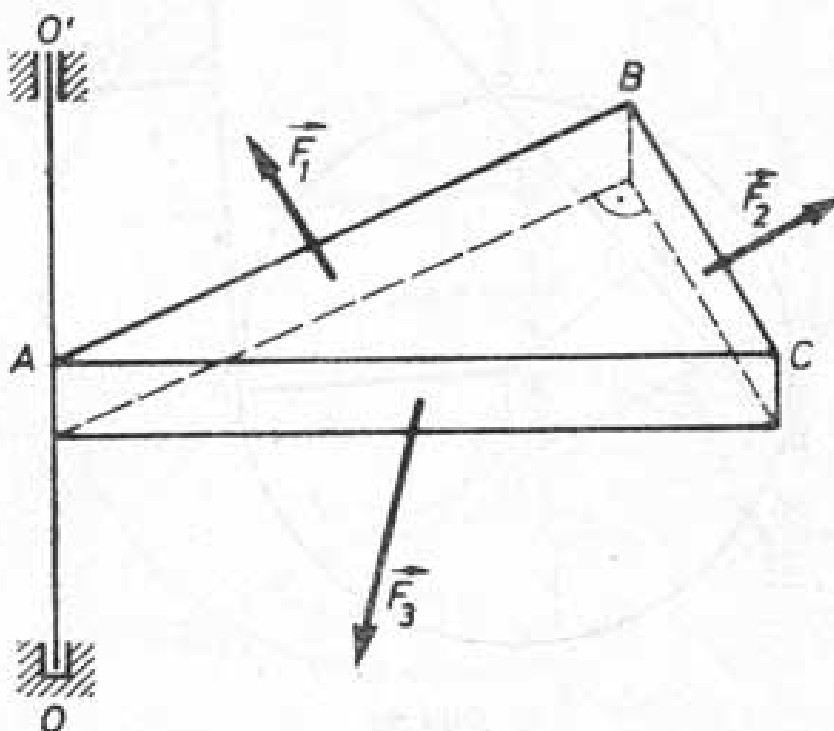
Slika 8

zbog pritiska djeluju na stijenke posude mora stoga iščezavati. Sile koje djeluju na gornju i donju bazu poništavaju se. Sile  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  (sile na katetama) prisiljavaju prizmu na rotaciju suprotnu rotaciji kazaljke na satu, a sila  $\vec{F}_3$  (sila na hipotenuzi) u smjeru rotacije kazaljke na satu (vidi sl. 9). Ravnotežno stanje karakterizirano je ovom relacijom među apsolutnim iznosima momenata:

$$M(\vec{F}_1) + M(\vec{F}_2) = M(\vec{F}_3).$$

Svaki od tih momenata jest produkt iznosa sile i njena kraka s obzirom na  $OO'$ . Dakle,

$$M(F_1) = \vec{F}_1 \cdot \frac{AB}{2}, \quad M(F_2) = \vec{F}_2 \cdot \frac{BC}{2}, \quad M(F_3) = \vec{F}_3 \cdot \frac{AC}{2}.$$



Slika 9

Iznos svake od ovih sila proporcionalan je površini odgovarajuće stijenke, tj.

$$F_1 = p \cdot AB \cdot h, \quad F_2 = p \cdot BC \cdot h, \quad F_3 = p \cdot AC \cdot h.$$

Vrijedi, dakle,

$$p \cdot AB \cdot h \cdot \frac{AB}{2} + p \cdot BC \cdot h \cdot \frac{BC}{2} = p \cdot AC \cdot h \cdot \frac{AC}{2}.$$

Množenjem sa  $\frac{2}{ph}$  dobivamo

$$AB^2 + BC^2 = AC^2.$$

**Teorem 8.** Kvadrat tangente povučene iz točke na kružnicu jednak je produktu dviju kolinearnih sekanti povučenih iz te točke. ( $AB^2 = AC \cdot AD$ , vidi sl. 10).

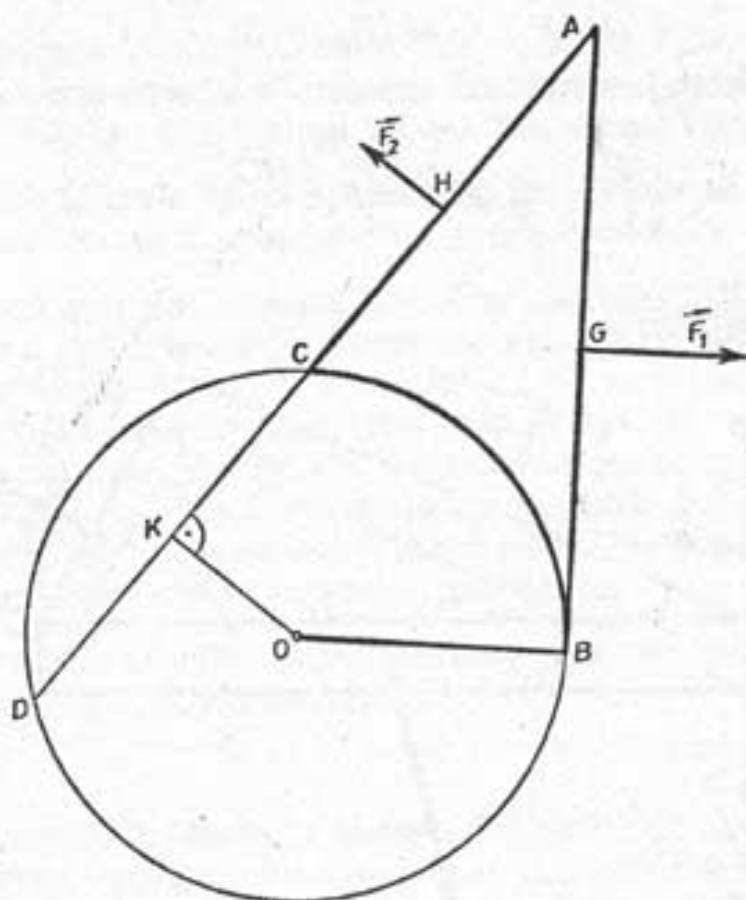
### Dokaz

Promotrimo figuru  $ABC$  na sl. 10. Zamislimo da je ona baza prizme ispunjene plinom. Čitava prizma je krutom šipkom  $BO$  povezana s fiksnom osi  $O$ . Prizma miruje ako na nju ne djeluju vanjske sile. Krak svih sila koje zbog pritiska plina djeluju na stijenku  $BC$  jednak je nuli ( $BC$  je luk kružnice s centrom u  $O$ ). Uvjet ravnotežnog stanja je stoga

$$M(\vec{F}_1) = M(\vec{F}_2),$$

to jest

$$F_1 \cdot GB = F_2 \cdot HK.$$



Slika 10

Međutim,

$$GB = \frac{AB}{2} \quad \text{i} \quad HK = HC + CH = \frac{AC}{2} + \frac{CB}{2} = \frac{AC + CD}{2} = \frac{AD}{2}.$$

Odatle slijedi

$$F_1 \cdot \frac{AB}{2} = F_2 \cdot \frac{AD}{2}.$$

Nadalje je

$$F_1 = p \cdot AB \cdot h \quad \text{i} \quad F_2 = p \cdot AC \cdot h,$$

dakle

$$AB^2 = AC \cdot AD.$$

**Teorem 9.** Ako su  $AB$  i  $CD$  tetive kružnice čije je sjecište točka  $E$ , tada vrijedi  $AE \cdot EB = CE \cdot ED$ .

**Dokaz**

Promotrimo sl. 11. Razmatranjem sličnim onom u prethodnom teoremu dolazimo do relacije

$$F_1 \cdot GP = F_2 \cdot HK.$$

Međutim,

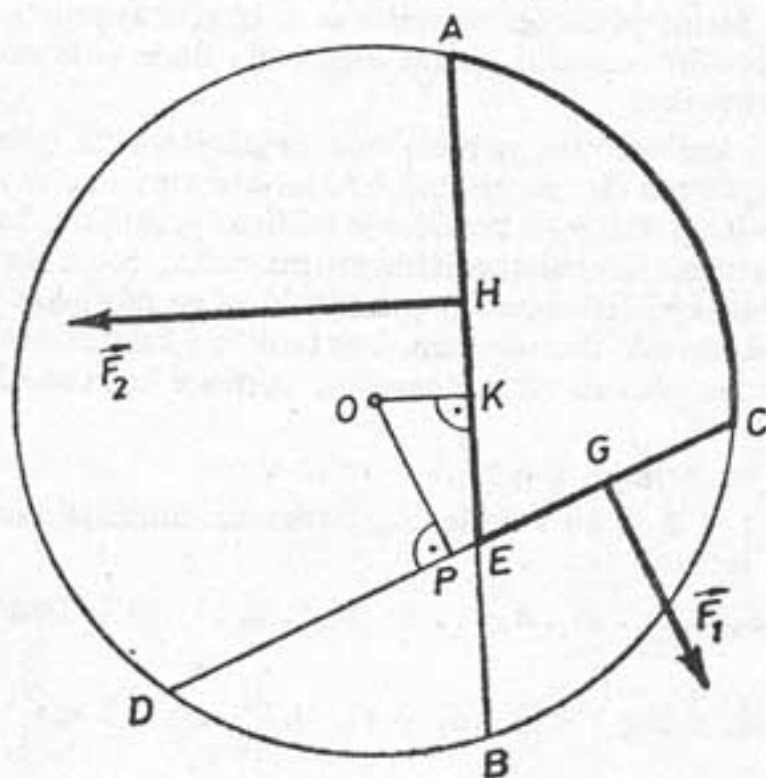
$$GP = CP - CG = \frac{CD}{2} - \frac{CE}{2} = \frac{CD - CE}{2} = \frac{ED}{2}$$

$$HK = AK - AH = \frac{AB}{2} - \frac{AE}{2} = \frac{AB - AE}{2} = \frac{EB}{2}$$

$$F_1 = p \cdot CE \cdot h, \quad F_2 = p \cdot AE \cdot h.$$

Dakle,

$$CE \cdot ED = AE \cdot EB.$$



Slika 11