

NEPREBROJIVOST KONTINUUMA I NASTANAK TEORIJE SKUPOVA

ZVONIMIR ŠIKIĆ, Zagreb

Ovim člankom želimo ukratko prikazati nastanak teorije skupova, uz detaljniji osvrt na Cantorovo otkriće neprebrojivosti kontinuuma, kao ključni moment nastajanja naše teorije. Glavni je junak ove povijesti Georg Cantor.

PRETPOVIJEST

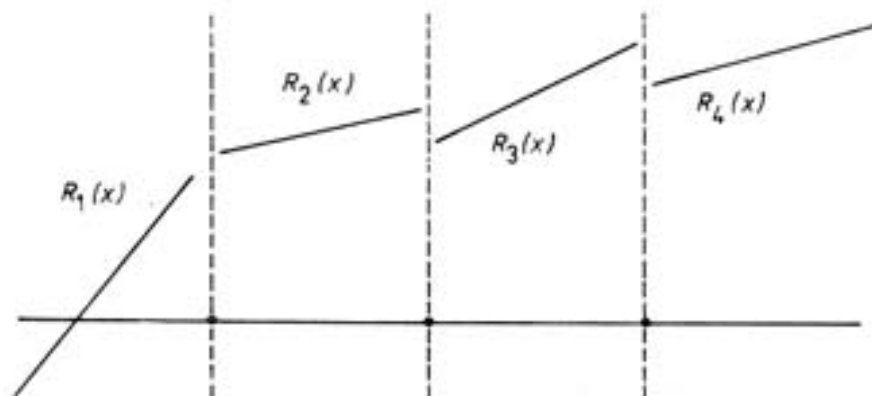
Cantor je završio svoje studije matematike na Berlinskom sveučilištu, 14. 12. 1866, obranom disertacije „De aequationibus secundi gradis indeterminatis”. Njegovi berlinski profesori Kummer, Kronecker i Weierstrass ocjenili su radnju kao *docta et ingeniosa*, što bijaše najbolja moguća ocjena. (Uočite da prvi Cantorov matematički rad spada u teoriju brojeva.) Nakon kraćeg službovanja u jednoj berlinskoj djevojačkoj gimnaziji, Cantor dobiva mjesto na Sveučilištu u Halleu. Njegov pristupni *Habilitationschrift* još uvijek spada u teoriju brojeva; u njemu je riječ o transformacijama ternarnih kvadratnih formi. Međutim, Cantor se u Halleu, pod utjecajem starijeg kolege Edwarda Heinea, okreće analizi. Kao berlinski, Weierstrassov đak imao je solidno analitičko obrazovanje, što ovu promjenu interesa čini sasvim prirodnom.

Heine je u to vrijeme (1870) uspio dokazati teorem o jednoznačnoj reprezentaciji funkcije trigonometrijskim redom. Rezultat prilično značajan već i zbog toga što su ga bezuspješno pokušavali polučiti i takvi velikani kao Dirichlet, Lipschitz i Riemann. Točnije, Heine je dokazao:

Ako trigonometrijski red konvergira uniformno (osim, možda, u konačno mnogo točaka) onda je granična funkcija jedinstveno prikazana tim redom tj. svaki drugi trigonometrijski red s istom granicom poklapa se s ovim.

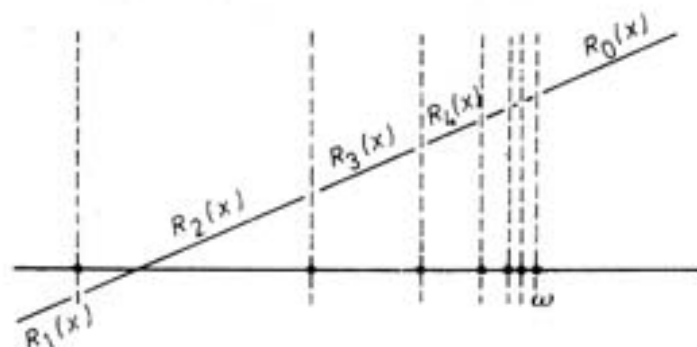
Cantor se, na Heineov nagovor, prihvatio uopćavanja tog rezultata. Prvi korak u tom nastojanju bio je pokušaj da se analogni teorem dokaže uz slabiju pretpostavku o običnoj konvergenciji trigonometrijskog reda. Trebalo je, dakle, dokazati jedinstvenost reprezentacije ne pretpostavivši uniformnu konvergenciju. Ne ulazeći u detalje, recimo toliko da je Cantor uspio dokazati to uopćenje pokazavši zavidnu ingenioznost u upotrebi standardnih analitičkih tehnika svojeg vremena. Razmatrajući tzv. Riemannovu funkciju trigonometrijskog reda (koju je Riemann uveo u svojem *Habilitationschriftu* posvećenom trigonometrijskim redovima) Cantor je

uočio da će uniformna konvergentnost reda biti posljedica obične, ako uspije dokazati linearnost Riemannove funkcije. Linearnost je uspio dokazati analizirajući specifičnosti konvergencije trigonometrijskih redova. Drugi korak Cantorovog uopćavanja sastojao se u dopuštanju da trigonometrijski red (čiju jedinstvenost treba dokazati) ne konvergira u konačno mnogo točaka. Ako je tih konačno mnogo točaka raspoređeno kao na sl. 1. onda je Cantor već opisanim argumentom mogao



Sl. 1

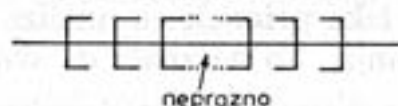
dokazati da je Riemannova funkcija u svakom od pojedinih područja određenih ovim točkama linearna. Dakle, u slučaju sa sl. 1, $R_1(x)$, $R_2(x)$, $R_3(x)$ i $R_4(x)$ linearne su funkcije. Da bi se argument, kojim se iz linearnosti Riemannove funkcije izvodi uniformna konvergentnost reda, mogao sprovesti na čitavom području, trebalo je dokazati da se radi o **jednoj** linearnoj funkciji; u našem slučaju sa sl. 1, da je $R_1(x) = R_2(x) = R_3(x) = R_4(x)$. Cantor je to dokazao. Dakle, njegov rezultat o jedinstvenosti reprezentacije vrijedi i onda ako funkcija koju reprezentiramo trigonometrijskim redom ima konačno mnogo singulariteta s obzirom na tu reprezentaciju. Naravno, dopustimo li i beskonačno mnogo diskretno raspoređenih singulariteta (poput cijelih brojeva na brojevnom pravcu), vrijedi isti Cantorov argument. Dapače, Cantor je uz neznatnu modifikaciju svojeg zaključivanja uspio dokazati teorem o jedinstvenoj reprezentaciji i za funkcije čiji skup singulariteta ima točku gomilanja. Na primjer, ako je beskonačno mnogo singulariteta raspoređeno kao na sl. 2, a budući da se područje u kojem nalazimo $R_n(x)$



Sl. 2

može konačnim intervalom izolirati od gomilišta ω , za svako n , onda Cantor može ponoviti svoje zaključivanje i u ovom slučaju, pokazujući da je $R_n(x) = R_m(x)$, za svaki n i m . Prateći slijed ovih uopćavanja, uviđamo da se u njima uvijek ponavlja

jedan te isti analitički argument, te da je jedino što se mijenja skup singulariteta na koji se to zaključivanje primjenjuje. Tako u daljnjim Cantorovim uopćavanjima osnovni problem više nije analitičke prirode, budući da krucijalni analitički argument s Riemannovom funkcijom uvijek ostaje isti, već osnovni problem postaje specifikacija skupa singulariteta dane funkcije na koji će se ovaj argument primijeniti. Zbog boljeg sagledavanja povijesnog konteksta spomenimo da je Hankel svojim principom kondenzacije singulariteta, formuliranim baš u to doba, pokazao kako se iz funkcije s određenim brojem singulariteta određenog tipa mogu konstruirati funkcije s umnoženim brojem singulariteta istoga tipa. Hankelov rad, inače potaknut Riemannovim *Habilitationschriftom* o trigonometrijskim redovima, potaknuo je Cantora da, uz sačuvanje jedinstvenosti reprezentacije, analogno umnaža singularitete trigonometrijskih redova. Naravno, problem precizne specifikacije skupa singularnih točaka pretpostavljao je preciznu specifikaciju samog skupa točaka iz kojeg se singulariteti izdvajaju, dakle, pretpostavljao je zasnivanje linearnog područja realnih brojeva, drugim riječima zasnivanje linearnog kontinuuma. Cantor se prihvatio toga zadatka, što je rezultiralo tzv. Cantorovim zasnivanjem realnih brojeva, koje u današnjoj literaturi najlakše prepoznajemo po imenu tzv. Cantorovog aksioma: Svaki niz uklopljenih segmenata realnih brojeva ima neprazni presjek (vidi sl. 3), iako je to kod Cantora teorem, dokaziv za realne brojeve koje



Sl. 3

Cantor definira kao fundamentalne nizove racionalnih brojeva (što je i u današnjoj literaturi standardni postupak). Nakon preciznog i strogog određenja područja realnih brojeva Cantor definira pojam derivata proizvoljnog skupa realnih brojeva: Derivirani skup skupa X , oznakom X' , jest skup svih graničnih točaka skupa X . Taj mu pojam omogućava da precizno specificira tj. strogo definira tzv. skupove prve vrste: S je skup prve vrste ako je njegova n -ta derivacija, za neki prirodni broj n , prazna ($S^{(n)} = \emptyset$). Nakon precizne specifikacije skupova prve vrste Cantor je mogao, koristeći se onim istim zaključivanjem preko linearnosti Riemannove funkcije, dokazati svoj najopćenitiji rezultat:

Ako je skup singulariteta funkcije reprezentirane trigonometrijskim redom skup prve vrste onda je ta reprezentacija još uvijek jedinstvena.

Taj je rezultat objavljen 1872. g. u radu „Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen“ (Mathematische Annalen 5). Ono zbog čega je taj rad posebno zanimljiv za našu temu, i zbog čega smo mu posvetili toliku pažnju, jest već spomenuti evidentni pomak od standardnih analitičkih razmatranja onog vremena k razmatranju i istraživanju skupova točaka linearnog kontinuuma. Upravo taj pomak danas smatramo zametkom buduće teorije skupova. Dapače Cantor u svom radu spominje i skupove druge vrste tj. one kojima su sve konačne derivacije neprazne i za koje bi se mogao uvesti pojam beskonačne derivacije $S^{(\infty)}$. Naravno, postupak deriviranja moguće je nastaviti daljnjom produkcijom niza

$$\dots S^{(\infty)}, S^{(\infty+1)}, S^{(\infty+2)}, \dots$$

koji se temelji, prema Cantorovim riječima iz 1872. na „pojmu broja koji, bar utoliko koliko je tu razvijen, nosi u svojoj jezgri nužno i apsolutno beskonačno protezanje.” Lako je u toj opaski prepoznati specifični zametak buduće teorije ordinala. Ipak bilo bi pretjerano reći da je 1872. rođna teorija skupova. Dijete je na putu ali još nije rođeno.

NEPREBROJIVOST KONTINUUMA, POČETAK POVIJESTI

Transfinitna teorija skupova ne slijedi neposredno iz Cantorovog rada o trigonometrijskim redovima 1872. godine. Iako je uvođenje deriviranih skupova i ostalih Cantorovih metoda odmah prepoznato kao moćno sredstvo za primjene u analizi (među prvima su se njima koristili Ulysse Dini i Gösta Mittag-Leffler), Cantorove metode nisu dopuštale neki bitni korak prema transfinitnoj teoriji skupova. Ono što je transfinitnu teoriju skupova donijelo na svijet, bilo je Cantorovo otkriće neprebrojivosti kontinuuma.

Izračunavanjem svojstava kontinuuma i njegovim strogim i detaljnim zasnivanjem nije se bavio samo Cantor. Već 1858. predavajući analizu na politehnici u Zürichu, Dedekind je došao do toga da realni broj poima kao *Schnitt*, rez u području racionalnih brojeva, i da linearni kontinuum definira kao skup svih mogućih rezova u racionalnom području. Budući da je takvo zasnivanje realnih brojeva bilo dosta složeno i nije obećavalo neke lake primjene u analizi, Dedekind se nije potrudio da objavi svoja ciriška predavanja. To ne znači da svoj rezultat nije smatrao značajnim. Dapače, u njegovim je spisima brižljivo zapisan datum 24. 11. 1858. kao dan kada je došao „... do istinske definicije kontinuuma...”. Četrnaest godina kasnije, pročitavši Heineov prikaz Cantorove teorije iracionalnih brojeva u njegovim *Die Elemente der Functionenlehre* kao i izvorni Cantorov rad iz 1872. godine, Dedekind smatra da je došlo vrijeme da se objavi njegova teorija iracionalnih brojeva i kontinuuma, koju on smatra jednostavnijom i jasnijom od Cantorove, iako je ovoj ekvivalentna. Tako 1872. dolazi do objavljivanja slavne Dedekindove monografije *Stetigkeit und Irrationalzahlen*. Dedekind (kao i Cantor u svojem radu iz 1872) smatra da su priroda graničnih procesa i neprekidnosti, i aritmetička teorija kontinuuma realnih brojeva nerazdvojno povezane. U 3. odjeljku svoje monografije on će napisati da je „pravac \mathbb{R} beskonačno bogatiji točkama no što je područje \mathbb{R} racionalnih brojeva brojevima”. U toj tvrdnji leži dio tajne kontinuuma, i mada Dedekind nije imao baš nikakvu stvarnu ideju o tom bogatstvu kontinuuma, on je svojom tvrdnjom ukazao na onu značajku kontinuuma koja je već bila osnovom Cantorovom preokupacijom.

U bogatoj i prijateljskoj prepisci Cantora i Dedekinda, započetoj u to vrijeme, nalazimo Cantorovo pismo (otposlano 29. 11. 1873) u kojem Cantor osnovni problem postavlja u jasnoj matematičkoj formulaciji, koja omogućava dokazivanje ili opovrgavanje teze o „beskonačno bogatijem kontinuumu”:

Uzmi kolekciju svih pozitivnih cijelih brojeva n i označi je sa (n) ; zatim zamisli kolekciju svih realnih brojeva x i označi ju sa (x) ; pitanje je, jednostavno, mogu li se (n) i (x) tako pridružiti da svakoj individui jedne kolekcije odgovara jedna i samo jedna individua druge? Na prvi bi se pogled moglo odgovoriti ne, to nije moguće, jer (n) je diskretan dok (x) tvori kontinuum; ali ništa se ne polučuje ovom primjedbom, i mada sam sklon smatrati da (n) i (x) ne dopuštaju takvo pridruženje, ja ne mogu otkriti razlog zbog kojeg je to tako (a pridajem mu veliku važnost) iako je taj razlog, možda vrlo jednostavan.

Cantorova je opaska na mjestu, jer mnogi bi možda primjetili i da gusto raspoređeni racionalni i algebarski brojevi ne mogu biti na isti način pridruženi kolekciji (n), iako to nije točno. Kako dakle karakterizirati tu važnu razliku između racionalnih i realnih brojeva. Područje racionalnih brojeva je gusto (između svaka dva uvijek nalazimo treći) ali ono ipak nije neprekinuto. Možda baš zato što je racionalnih brojeva *manje* no što ima realnih. Cantor je prvo uočio da racionalnih i algebarskih brojeva ima koliko i prirodnih, sve su to beskonačnosti iste veličine, a onda se pojavila plodonosna misao da tajna kontinuuma leži u tome što realnih brojeva ima više. U svojem pismu od 2. 12. 1873. on podsjeća Dedekinda da sâm već godinama traga za pravom prirodom kontinuuma, bezuspješno pokušavajući da dokaže neprebrojivost kontinuuma. Čak je pomišljao da mu možda i izmiče neki vrlo jednostavan argument, ali sada kada je iz Dedekindova pisma saznao da ni on ne uspijeva dokazati neprebrojivost, jasno vidi da je riječ o objektivno teškom problemu. Iznenada, početkom prosinca 1873. Cantor uspijeva dokazati neprebrojivost kontinuuma.

Dokaz je objavljen početkom 1874. u članku čudnog naslova: *Über eine eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 77). Naime, naslovom je istaknuta prebrojivost područja algebarskih brojeva, dok se neprebrojivost kontinuuma u naslovu ne spominje, iako je potpuno sigurno da je Cantor upravo taj rezultat smatrao najznačajnijim, budući da je prebrojivost algebarskog područja dokazao već pred par godina i nije smatrao potrebnim objaviti taj rezultat sve do ovoga trenutka. Zašto, onda, taj naslov?

Nova, „zrnasta“ teorija kontinuuma čiji su konstitutivni elementi točke, koje se ne mogu efektivno konstruirati pa je njihovo postojanje ustvrđeno mimo njihova konstruiranja, naišla je na velik otpor konstruktivista. Naročito joj se suprotstavljao tada vrlo utjecajni Leopold Kronecker, koji je javno dovodio u pitanje pojam iracionalnog broja i u vezi s njim smislenost Bolzano-Weierstrassovog teorema. Kronecker je bio izdavač *Crelleovog Journala* i Cantor se plašio da bi njegov rad mogao biti odbijen zbog nekonstruktivnih metoda. (Ta je bojazan bila opravdana. Kronecker je već ranije nagovarao Heinea da ne objavi svoj „Über trigonometrische Reihen“, no on ga je ipak poslao C. W. Borchardt u da ga objavi u *Crelleovu Journalu*. Međutim, Kronecker je članak „spremio u ladicu“ odakle ga je izvukao tek osobni Heineov dolazak u Berlin.) Zato se Cantor odlučio na neupadljivi naslov, pa je čak i čitav članak koncipirao kao rad o algebarskim brojevima. Neprebrojivost kontinuuma spominje se tek kao uzgredni rezultat koji omogućava jednu primjenu osnovnog rezultata iz naslova: osnovno je da je algebarsko područje prebrojivo, a jedna zgodna primjena tog glavnog rezultata jest da (uz neprebrojivost realnog područja koju usput dokazujemo) odavde slijedi postojanje transcendentnih brojeva; no to je već poznati Liouvilleov rezultat. Kao da Cantor želi da njegov rezultat o neprebrojivosti dobije patinu nečeg poznatog. Dapače u samom dokazu neprebrojivosti, koji ćemo uskoro opisati, on posebno pazi da ne naglasi upotrebu principa kontinuiranosti (danas bismo rekli Cantorova aksioma) iako je jasno da je to ključni korak dokaza. Da je stvarno riječ o skrivanju saznanja iz prepiske s Dedekindom. Dedekind je preporučio da se naglasi ova ključna uloga principa kontinuiranosti, ali Cantor to odbija učiniti zbog već spomenutih razloga.

Dokaz neprebrojivosti, koji nalazimo u Cantorovom pismu Dedekindu, nešto je složeniji od objavljenoga u članku „čudnoga naslova“. Naime, Cantor je objavio Dedekindovo uprošćenje svojega dokaza. Ovdje ćemo prikazati osnovne ideje oba dokaza.

Cantor (u svojem pismu Dedekindu, 7. 12. 1873) polazi od pretpostavke da se kontinuum realnih brojeva može prebrojati tj. da se oni mogu poredati u niz

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \dots$$

u kojem se pojavljuje svaki realni broj. U prvom koraku svoje analize Cantor iz početnog niza odstranjuje jedan beskonačni niz brojeva, tako da prvo odstrani $\omega_1 = \omega_1^1$, zatim prvi slijedeći broj u početnom nizu koji je veći od ω_1^1 , nazovimo ga ω_1^2 , pa prvi slijedeći koji je veći od ω_1^2 , nazovimo ga ω_1^3 itd. Tako je generiran prvi ulazni niz

$$(1) \quad \omega_1^1, \omega_1^2, \omega_1^3, \dots$$

Zatim se isti postupak odstranjivanja ponavlja sa nizom brojeva preostalih u početnom nizu (nakon odstranjivanja niza (1)). Tako dobivamo niz

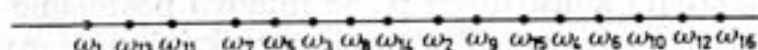
$$(2) \quad \omega_2^1, \omega_2^2, \omega_2^3, \dots$$

Postupak nastavljamo, generirajući niz uzlaznih nizova, koji obuhvaća sve realne brojeve početnog niza:

$$(3) \quad \omega_3^1, \omega_3^2, \omega_3^3, \dots$$

$$(4) \quad \omega_4^1, \omega_4^2, \omega_4^3, \dots$$

Na primjer, ako je prvih 16 brojeva početnog niza ovako smješteno na realnom pravcu



Sl. 3

onda prvih šest (odstranjenih) uzlaznih nizova počinje ovako

$$(1) \quad \omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_6, \omega_{10}, \omega_{12}, \omega_{16}, \dots$$

$$(2) \quad \omega_3, \omega_8, \omega_9, \omega_{15}, \dots$$

$$(3) \quad \omega_5, \omega_{14}, \dots$$

$$(4) \quad \omega_7, \dots$$

$$(5) \quad \omega_{11}, \dots$$

$$(6) \quad \omega_{13}, \dots$$

U sljedećem koraku svoje analize Cantor uočava segment $[\alpha, \beta]$, koji je smješten između bilo koja dva člana niza (1). Taj segment očito ne sadrži ni jedan član **uzlaznog** niza (1). Cantor zatim zaključuje: Ako nijedan član preostalih nizova nije sadržan u $[\alpha, \beta]$, onda se elementi iz $[\alpha, \beta]$ ne nalaze u početnom nizu i time je oborena pretpostavka da početni niz sadrži sve realne brojeve tj. dokazana je neprebrojivost kontinuum. Ako to nije slučaj, postoji prvi takav niz (k) čiji su neki članovi sadržani u $[\alpha, \beta]$. Budući da je niz (k) **uzlazan**, lako je naći segment $[\alpha_1, \beta_1]$ sadržan u $[\alpha, \beta]$, koji ne sadrži nijedan član niza (k). Sada se opet otvaraju dvije mogućnosti: ili nijedan član preostalih nizova ($k+1$), ($k+2$), ... nije sadržan u $[\alpha_1, \beta_1]$, odakle opet slijedi neprebrojivost; ili postoji prvi takav niz (k_1) čiji su neki članovi sadržani u $[\alpha_1, \beta_1]$, no tada je opet lako naći segment $[\alpha_2, \beta_2]$

sadržan u $[\alpha_1, \beta_1]$, koji ne sadrži nijedan član niza (k_1) . Ponavljanjem ovog postupka Cantor proizvodi beskonačni niz uklopljenih segmenata

$$[\alpha_1, \beta_1]; [\alpha_2, \beta_2]; [\alpha_3, \beta_3]; \dots$$

čiji lijevi krajevi čine uzlazni niz, omeđen gornjom međom β ,

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots < \beta$$

dok mu desni krajevi čine silazni niz, omeđen donjom međom α

$$\beta_1 > \beta_2 > \beta_3 > \dots > \alpha.$$

Dakle prvi niz određuje granicu $\alpha_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$, dok drugi niz određuje granicu $\beta_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$. Ukoliko je $\alpha_\infty = \beta_\infty$, Cantor tu zajedničku granicu mora naći u početnom nizu kao neki ω_p , a ukoliko je $\alpha_\infty < \beta_\infty$ onda se bilo koji, specificirani element segmenta $[\alpha_\infty, \beta_\infty]$ mora naći u početnom nizu kao neki ω_p . Međutim, prema konstrukciji uklopljenog niza segmenta, svaki je član početnog niza $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$, isključen iz svih segmenata sadržanih u $[\alpha_n, \beta_n]$, za dovoljno veliki n , što znači da ω_p nije uključen u početni niz. To obara početnu pretpostavku o prebrojivosti kontinuuma i dokazuje njegovu neprebrojivost.

Dva dana kasnije Cantor uviđa da je njegov dokaz nepotrebno zakompliciran uzlaznim nizovima (1), (2), (3), \dots pa samo kratko obavještava Dedekinda (u novom pismu 9. 12. 1873) da je argument moguće provesti bez te komplikacije. Dedekind je takvo uproštenje već našao i poslao ga Cantoru u pismu datiranom 8. 12. 1873. Taj uprošćeni dokaz nalazimo u radu objavljenom u *Crelleovom Journalu*. I u njemu se polazi od pretpostavke da su svi realni brojevi poredani u niz

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$$

Dedekind proizvodi niz uklopljenih segmenata na sljedeći način. Segment $[\alpha, \beta]$ je $[\omega_1, \omega_2]$ (pod pretpostavkom da je $\omega_1 < \omega_2$, inače $[\alpha, \beta] = [\omega_2, \omega_1]$). Segment $[\alpha_1, \beta_1]$, čine prvi sljedeći par $\omega_{i_1}, \omega_{j_1}$ početnoga niza, koji ima svojstvo da je $[\omega_{i_1}, \omega_{j_1}] \subset [\alpha, \beta]$. Segment $[\alpha_2, \beta_2]$, čini prvi sljedeći par $\omega_{i_2}, \omega_{j_2}$ početnoga niza, koji ima svojstvo da je $[\omega_{i_2}, \omega_{j_2}] \subset [\alpha_1, \beta_1]$. I tako dalje. Proizvedeni uklopljeni niz segmenata

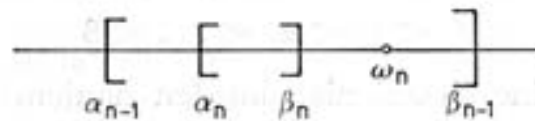
$$[\alpha, \beta]; [\alpha_1, \beta_1]; [\alpha_2, \beta_2]; \dots$$

može biti konačan, u kojem slučaju u zadnjem segmentu $[\alpha_n, \beta_n]$ leži još najviše jedan član ostatka početnog niza $\omega_{j_n}, \omega_{j_n+1}, \omega_{j_n+2}, \dots$. No onda, beskonačno mnogo elemenata segmenta $[\alpha_n, \beta_n]$ nije obuhvaćeno početnim nizom tj. kontinuum nije prebrojiv. Ako je uklopljeni niz segmenata beskonačan onda postoji $\alpha_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ (jer je niz $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ uzlazan i odozgo omeđen sa β), i postoji $\beta_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$ (jer je niz $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ silazan i odozdo omeđen sa α). Argument sa α_∞ i β_∞ sada je jednak prethodnom Cantorovom argumentu.

Do još jednostavnije varijante tog istog dokaza došao je autor ovoga članka prije pet godina (kasnije je upozoren da se ona može naći u jednom Freudenthalovom radu, ali nije uspio saznati gdje se ona prvi put pojavljuje). Neka je

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$$

bilo koji niz točaka linearnog kontinuuma. U prvom koraku odaberimo segment $[\alpha_1, \beta_1]$ koji ne sadrži točku ω_1 . U drugom koraku odabiremo segment $[\alpha_2, \beta_2]$ koji je sadržan u segmentu $[\alpha_1, \beta_1]$, ali koji ne sadrži točku ω_2 . I tako dalje. Jasno je da za svaki segment $[\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}]$ i svaku točku ω_n , možemo naći segment $[\alpha_n, \beta_n]$, koji je sadržan u prethodnom, a koji ne sadrži točku ω_n .



Sl. 4

Tako dobivamo niz uklopljenih segmenata

$$[\alpha_1, \beta_1]; [\alpha_2, \beta_2]; [\alpha_3, \beta_3]; \dots$$

Prema Dedekindovu načelu neprekinutosti ili Cantorovom aksiomu, postoji bar jedna točka η koja je sadržana u svim segmentima. S druge strane, prema konstrukciji niza segmenata, $\omega_n \notin [\alpha_n, \beta_n]$ što znači da se točka η razlikuje od svake točke početnog niza $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$. Dakle, sve točke linearnog kontinuuma nisu nabrojene u tom nizu. Budući da isti argument vrijedi za svaki niz, zaključujemo da je kontinuum neprebrojiv.

Dokazavši neprebrojivost kontinuuma Cantor je riješio dio njegove tajne. No, on je tim dokazom dao i prvi primjer razlikovanja beskonačnosti. Tu se prvi put egzaktno pokazalo da beskonačni skupovi mogu biti nejednakih veličina. Ta je činjenica, sama po sebi, *raison d'être* transfinitne teorije skupova, jer se njome jasno pokazuje da postoje distinkcije koje ta teorija treba istražiti. Ipak, Cantorov glavni interes, u to vrijeme, još je uvijek primjena njegovih novih metoda na daljnje istraživanje kontinuuma. Pojam dimenzije kontinuuma, bitan za osnovnu klasifikaciju kontinuuma, Cantor će pokušati objasniti razlikom u broju točaka. Time bi intuitivni pojam dimenzije bio objašnjen i egzaktno matematički definiran, a osim toga bi se nastavilo raslojavanje beskonačnosti, koje je osnovni preduvjet razvitka teorije skupova.

Dedekind će 5. 1. 1874. primiti još jedno Cantorovo pismo u kojem je formuliran novi problem:

Da li je moguće površinu (na primjer kvadrat sa njegovim stranicama) preslikati na krivulju (na primjer dužinu sa njenim krajevima), tako da svakoj točki površine odgovara jedna točka krivulje i obratno, da svakoj točki krivulje odgovara jedna točka površine?

Cantor dalje primjećuje da je problem vjerojatno težak, iako su mnogi skloni reći da je očiti odgovor „ne” i da je tu svaki dokaz suvišan. Ustvari, kada je Cantor, prilikom jedne posjete Berlinu u proljeće 1874, u krugu svojih prijatelja matematičara spomenuo taj problem, oni su bili zapanjeni apsurdnošću postavljenog pitanja. Bili su uvjereni da se dvije nezavisne varijable ne mogu reducirati na jednu i da je to evidentno bez ikakva dokaza. I Cantor je vjerovao u nemogućnost te redukcije, s tom razlikom što je on smatrao da je treba dokazati. Naravno, da bi, bilo dokazivanje, bilo opovrgavanje te očiglednosti uopće bilo moguće trebalo je jasnim matematičkim pojmovima objasniti što znači „reducirati dvije nezavisne varijable na jednu”. Cantor je svojom formulacijom problema učinio upravo to. Točke linearnog kontinuuma, krivulje, mogu se adresirati realnim brojevima, dakle jednom realnom varijablom, dok se točke dvodimenzionalnog kontinuuma, površine,

moгу adresirati parovima realnih brojeva, dakle s dvije realne varijable. To što je moguće, većina matematičara (bez ikakva dokaza) smatra nužnim, držeći da su za adresiranje točaka dvodimenzionalnog kontinuuma **nužno** potrebni parovi realnih brojeva, a da za to nedostaju sami realni brojevi. Na kraju krajeva upravo zato se dvodimenzionalni kontinuum i zove **dvo**-dimenzionalnim. Cantor ne sumnja u tu očiglednu činjenicu, on samo misli da je treba dokazati, i to tako da dokaže nemogućnost 1—1 pridruženja točaka linearnog i dvodimenzionalnog kontinuuma, tj. realnih brojeva i njihovih parova.

Tri i pol godine protekle su od formulacije problema do njegovog rješenja. A rješenje je bilo zapanjujuće. Apsurdno i očigledno nemoguće 1—1 pridruženje točaka linearnog i dvodimenzionalnog (čak i svakog konačno-dimenzionalnog) kontinuuma jest moguće. Točke svake površine, točke čitavog trodimenzionalnog prostora, čak i točke bilo kojeg konačno-dimenzionalnog prostora moderne geometrije Cantorova doba, mogu se adresirati realnim brojevima; za to nam nisu nužno potrebni ni parovi, ni trojke, ni n -torke realnih brojeva. Dvije, tri, n -varijabli mogu se reducirati na jednu jedinu. Dokaz te tvrdnje Cantor će skicirati u pismu poslanom Dedekindu 29. 6. 1877, poprativši ga usklikom *Je le vois, mais je ne le crois pas!* Definicija dimenzije kontinuuma, kao broja realnih varijabli potrebnih za njegov opis (tj. za adresiranje svih njegovih točaka), postaje besmislenom. Da li time i sam pojam dimenzije postaje besmislen? Ruše li se sami temelji modernog, Riemannovog poimanja geometrije? Vratit ćemo se tim pitanjima nakon prikaza Cantorovog dokaza.

Cantorov je dokaz savršeno jednostavan. Sve realne brojeve iz intervala $[0, 1]$ (oni adresiraju točke jedinične dužine, dok njihovi parovi adresiraju točke jediničnog kvadrata) možemo prikazati njihovim decimalnim razvojem. Na primjer

$$a = 0. a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$$

$$b = 0. b_1 b_2 b_3 b_4 \dots \text{ itd.}$$

Pridruženje realnih brojeva njihovim parovima Cantor je definirao, koristeći se decimalnim razvojem, na sljedeći način. Paru realnih brojeva (a, b) , s gore navedenim decimalnim razvojem, pridružio je realni broj c definiran ovim decimalnim razvojem:

$$c = 0. a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \dots$$

Tim je pravilom svakom paru realnih brojeva pridružen realni broj, a očito je da se iz svakog broja može rekonstruirati par kojemu je taj broj pridružen.

Pročitavši Cantorov dokaz, Dedekind je u njemu našao grešku, prouzrokovanu time što jedan te isti realni broj može imati dva decimalna razvoja. Na primjer, $0.5000 \dots = 0.4999 \dots$, pa broju $1/2$, ovisno o odabranom razvoju, može biti produžen par $(1/2, 0)$ ili par $(1/2, 1)$, a paru $(1/2, 0)$, opet ovisno o odabranom razvoju možemo pridružiti broj $1/2$ ili broj $81/18$. Ograničimo li se na interval $(0, 1]$ i definiramo li pridruženje isključivo preko razvoja „bez nula na kraju” suočit ćemo se s novim problemom. Broj koji počevši od nekog decimalnog mjesta na svakom parnom mjestu decimalnog razvoja ima znamenku 0, neće biti pridružen ni jednom paru brojeva. Na primjer, broj $0.11101010 \dots$ neće biti pridružen ni jednom paru brojeva. Cantor je grešku ispravio u sljedećih nekoliko dana, ali korektni dokaz jednakobrojnosti kontinuuma različitih dimenzija nije bio tako savršeno jednostavan kao prvi, pogrešni. Možda je najjednostavniji način da se korektno dokaže Cantorov rezultat taj, da se broju c pridružuje par brojeva (a, b) ,

pomoću **grupa znamenaka** koje završavaju znamenkom $\neq 0$ i čije su sve prethodnice znamenke $= 0$ (uključujući i pojedinačne znamenke $\neq 0$), a ne pomoću pojedinačnih znamenaka kao u Cantorovom nekorektnom dokazu. Na primjer broju

$$c = 0.3 | 5 | 07 | 9 | 001 | 2 | 6 | 0004 | \dots$$

pridružiti ćemo par brojeva: $0.3070016\dots$ i $0.5920004\dots$. Lako se vidi da je to pridruženje, 1–1 pridruženje realnih brojeva i njihovih parova.

Vratimo se problemima vezanim uz pojam dimenzije, koje je pokrenuo Cantorov dokaz. Postaje li pojam dimenzije besmislenim? Izgleda da je Cantor, na trenutak, pomislio baš to. Na istoj dopisnici, kojom Dedekinda obavještava da je ispravio grešku u prvoj jednostavnoj varijanti dokaza, on upozorava da je do sada, kao i svi ostali matematičari, pretpostavljao da su točke n -dimenzionalnog kontinuuma determinirane sa n nezavisnih realnih varijabli. On smatra da njegovo novo otkriće pokazuje „da su sve filozofske i matematičke dedukcije koje se koriste tom pogrešnom pretpostavkom nedopustive”. Dedekind, u svojem odgovoru 2. 7. 1877, čestita Cantoru na izvanrednom i značajnom rezultatu, ali dodaje da se ne može složiti s opovrgavanjem svih filozofskih i matematičkih radova koji pretpostavljaju invarijantnost dimenzije. On je uvjeren da je „dimenzija kontinuiranog prostora njegova prva i najvažnija invarijanta i, kada je o tome riječ, on mora stati u obranu svih ranijih autora.” Uostalom, dodatna i isto tako univerzalno prihvaćena pretpostavka (kao i ona o n varijabli) jest ta da kontinuitet igra ključnu ulogu u određenju invarijantnosti dimenzije. Dedekind je tu drugu pretpostavku (prvi!) eksplicitno formulirao:

Ako je moguće obostrano jednoznačno pridruženje točaka kontinuiranog područja A , dimenzije a , i kontinuiranog područja B , dimenzije b , onda je to pridruženje, nužno, potpuno diskontinuirano, ako su a i b **različiti**.

Dva dana kasnije, 4. 7. 1877, Cantor objašnjava da se radi o nesporazumu. On invarijantnost dimenzije nikada nije dovodio u pitanje. On ne osuđuje ranije autore zato što pretpostavljaju invarijantnost dimenzije, nego zato što pretpostavljaju „determiniranost broja nezavisnih koordinata, i što taj broj smatraju brojem dimenzija”. Naprotiv, kaže Cantor

... ako razmotrimo pojam koordinata sasvim općenito, bez ikakvih pretpostavki o prirodi upletenih funkcija, broj nezavisnih, jedinstvenih i potpunih koordinata, može biti, kao što sam pokazao, bilo koji broj.

Naravno, Cantor se slaže s Dedekindom da je tajna u **kontinuiranosti** pridruženja područja s različitim dimenzijama. Ali i pretpostavku da kontinuirano pridruženje nije moguće, treba dokazati. Cantor će to pokušati u *Über einen Satz aus der Theorie der Stetigen Mannigfaltigkeiten (Nachrichten von der Königlich-Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg Augustus Universität zu Göttingen, str. 127–135, 1879)*. Nažalost bezuspješno, dokaz je bio pogrešan. Korektan dokaz nemogućnosti obostrano kontinuiranog i obostrano jednoznačnog pridruženja 1-dimenzionalnog i ($n \geq 2$)-dimenzionalnog kontinuuma dao je Lüroth 1878. On je uspio dokazati isti rezultat za 2-dimenzionalni i ($n \geq 3$)-dimenzionalni kontinuum. Taj je dokaz bio toliko složen da je Lüroth odustao od daljeg istraživanja. Tek je razvoj moderne topologije omogućio da L. E. J. Brouwer 1911. g. riješi problem za proizvoljne vrijednosti dimenzija.

Jedna od posljedica Cantorovog rezultata, značajna za transfinitnu teoriju skupova, bila je ta da se beskonačnost nije dalje raslojavala kako je to Cantor očeki-

vao. Dužina i kvadrat sadrže jednaki broj točaka. Transfinitna teorija skupova ne obogaćuje se distinkcijom u dimenziji. Naravno, pored razlikovanja beskonačnosti, problem kontinuiranosti, tako jasno istaknut i promaknut u prvi plan novim Cantorovim rezultatima, ostaje i dalje glavnom temom njegovih istraživanja.

TRANSFINITNA ARITMETIKA. BESKONAČNO BROJANJE

Između 1879. i 1884. Cantor je objavio seriju od šest članaka, pod zajedničkim naslovom *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, u kojoj je izložio osnovne elemente svoje nove teorije skupova. U prva četiri članka sustavno su izloženi matematički rezultati o linearnim skupovima točaka do kojih je Cantor došao prethodnih godina. (Naime, dokazavši svoj rezultat iz 1878. o jednakobrojnosti kontinuiranih područja različitih dimenzija, Cantor je mogao zaključiti da se istraživanje skupova točaka može ograničiti na kontinuirano područje dimenzije jedan tj. na realni pravac.) Tokom 1883. Cantor je shvatio da njegova nova teorija beskonačnog zahtjeva temeljniju i razrađeniju prezentaciju (pa i obranu od mnogih skeptika) no što su je nudila prva četiri članka. Peti članak bio je zamišljen upravo tako da se suoči sa filozofskim i matematičkim problemima koje je pokrenula nova teorija transfinitnih skupova (taj članak između ostaloga sadrži i Cantorove odgovore na mnoge prigovore, koji su se uglavnom odnosili na njegovu aktualnu interpretaciju beskonačnosti). Cantor je taj članak smatrao dovoljno značajnim da kod svojeg izdavača, B. G. Teubnera, uredi da se izda kao posebna monografija pod naslovom *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen*. Za dalji razvoj teorije skupova, najznačajniji Cantorov doprinos u ovoj monografiji, jest uvođenje transfinitnih rednih brojeva (*Anzahlen*), kao autonomnog i legitimnog proširenja područja prirodnih brojeva. To će proširenje omogućiti Cantoru da precizno definira pojam moći (*Mächtigkeit*) skupa, te da se posveti općem problemu moći i posebnom problemu moći kontinuuma.

Opći problem moći sastojao se u iznalaženju računa moći tj. računa apsolutnih mjera adekvatnih za opise veličina proizvoljnih skupova točaka. Do 1878. Cantor je potpuno usvojio načelo 1—1 korespondencije kao relativnu mjeru veličine skupova (načelo koje su Bolzano i drugi ranije odbacili), a implicitno je prihvatio ideju da beskonačni skupovi imaju **apsolutnu** mjeru, koju je zvao njihovom moći (*Mächtigkeit*). Time je otvorio mnoga pitanja. Kako reprezentirati beskonačne moći? Je li moguće ustrojiti skalu apsolutnih mjera beskonačnih skupova i njihovu efektivnu aritmetiku, analognu skali i aritmetici konačnih brojeva koji su mjere konačnih skupova? Koliko moći uopće postoji?

Svojim prethodnim radovima Cantor je barem djelomično odgovorio na zadnje pitanje. Dokazao je da svi euklidski intervali, bez obzira na dimenziju, imaju istu moć. Taj iznenađujući rezultat pokazao je da su moći euklidskih skupova točaka reprezentirane već u linearnom kontinuumu. Osim toga je dokazao da postoje barem dvije različite moći među beskonačnim linearnim skupovima točaka. Dapače, dokazao je i to da skup algebarskih (dakle i racionalnih) brojeva ima moć niza prirodnih brojeva. To je Cantora moglo navesti na misao da u euklidskim prostorima nalazimo „vrlo malo“ različitih moći. Tako je 1878. postavio hipotezu da nalazimo svega dvije: „Beskonačni linearni skup točaka ima moć skupa prirodnih brojeva ili pak moć kontinuuma“. Bila je to prva verzija slavne Cantorove hipoteze kontinuuma. Želja da dokaže tu hipotezu bila je glavni kreativni poticaj Cantorovu

daljnem radu, pa i razlog da se bavi općim problemom moći. Definirajući aritmetičku skalu beskonačnih moći, možda će u njoj odrediti mjesto moći kontinuuma i tako dokazati ili opovrći svoju hipotezu; dokazati ako je to mjesto drugo, opovrći ako nije.

Uostalom konstitutivni element Cantorove koncepcije beskonačnosti bio je taj da se transfinitni skupovi mogu tretirati kvantitativno (tj. numerički) i da brojanje u beskonačnom području treba biti analogno brojanju u konačnom. No to je značilo da moći, ako su uistinu kardinalni brojevi, moraju biti komparabilne tj. linearno uređene. Monografijom iz 1883. Cantor rješava upravo taj problem i to u duhu moderne, von Neumannovske, ordinalne teorije kardinalnih brojeva. On definira *Anzahlen*, transfinitne redne brojeve, i pretpostavlja kao evidentnu istinu (koju će dokazati tek Zermelo uz pomoć aksioma izbora) da njima može prebrojati svaki skup. To mu omogućava da dokaže usporedivost svaka dva skupa. Osim toga, definicija brojevni klasa kao skupova ordinala istog kardinaliteta, omogućava mu da dokaže da je kardinalitet svake brojevnice klase veći od kardinaliteta pojedinih ordinala koji je sačinjavaju. To dokazuje da postoji po volji mnogo kardinalnih brojeva. Pojavu novih kardinala, koju povećanje dimenzije nije omogućilo u euklidiskom području, omogućile su brojevnice klase u području ordinalnih brojeva.

Te su ideje dovele teoriju transfinitnih skupova do pune zrelosti. Njen dalji razvoj je uglavnom poznat i njime se više nećemo baviti. Spomenimo samo da je Cantorov ordinalni pristup kardinalima u jednoj fazi zapostavljen, da bi ga u novije doba von Neumann opet inaugurirao, i danas je opće prihvaćen (pokazalo se čak da je nezaobilazan, tj. da je implicate bio prisutan i u prethodnoj fazi).

CANTOROV DIJAGONALNI POSTUPAK

Cantorova teorija iz 1883. temeljila se na nekoliko nedokazanih pretpostavki. Usporedivost skupova temeljila se na nedokazanoj mogućnosti njihove ordinalne reprezentacije (tj. mogućnosti njihovog dobrog uređenja), dok se egzistencija skupova po volji velikih moći temeljila na definiciji brojevni klasa, koju Cantor nije općenito formulirao. On je definirao samo I i II brojevnice klasu, te dodao da je tako moguće definirati i ostale (no „tako” sigurno nije moguće definirati granične klase). Osjećajući te nedostatke već je sam Cantor počeo razvijati teoriju kardinalnih brojeva nezavisnu (koliko je to moguće) od teorije ordinalnih brojeva. Mi ćemo se osvrnuti samo na jedan moment tog razvoja, na slavni Cantorov dijagonalni postupak kojim se dokazuje egzistencija po volji velikih kardinalnih brojeva.

Cantor je svoj novi dokaz izložio 1891. godine na prvom sastanku novoosnovanog *Deutsche Mathematiker Vereinigung*. Svoje je izlaganje započeo opaskom da je „... moguć mnogo jednostavniji dokaz tog teorema (teorema o neprebrojivosti iz 1874), koji je nezavisan od razmatranja iracionalnih brojeva”. U stvari njegov osnovni interes više i nije neprebrojivost realnih brojeva već naprotiv jedan mnogo impresivniji zaključak:

Taj dokaz nije značajan samo zbog svoje jednostavnosti, već zbog toga što se načelo koje on slijedi može neposredno proširiti do dokaza općeg teorema da moći dobro definiranih skupova nemaju maksimuma, to jest da se svaki skup L može zamijeniti drugim skupom M čija je moć veća od moći skupa L . (*Über eine elementare Frage der Manigfaltigkeitslehre, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung* 1, 1891.)

Spomenuto načelo jest slavni Cantorov postupak dijagonalizacije, u ovom slučaju preko nizova s dvije vrijednosti m i w . Naime, Cantor je razmotrio skup M elemenata $E = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ takvih da je svaki x_n jednak m ili w . Kao primjere dao je elemente

$$E' = (m, m, m, m, \dots)$$

$$E'' = (w, w, w, w, \dots)$$

$$E''' = (m, w, m, w, \dots).$$

Zatim je ustvrdio da skup M svih takvih elemenata nije prebrojiv, dokazujući to na sljedeći način. Za svaki niz elemenata

$$E_1 = (Q_{11}, Q_{12}, Q_{13}, \dots, Q_{1n}, \dots)$$

$$E_2 = (Q_{21}, Q_{22}, Q_{23}, \dots, Q_{2n}, \dots)$$

$$E_m = (Q_{m1}, Q_{m2}, Q_{m3}, \dots, Q_{mn}, \dots)$$

definirao je element $E_0 = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots)$, zahtjevom $b_n \neq Q_{nn}$, za koji je mogao dokazati da je različit od svakog elementa E_n . Tako je dokazao da nijedan niz elemenata iz M ne obuhvaća sve elemente skupa M tj. da je skup M neprebrojiv.

Kao još jedan primjer primjene istog načela Cantor dalje razmatra linearni kontinuum L , realnih brojeva iz intervala $(0, 1)$, i skup M svih funkcija $f(x)$ definiranih za $x \in (0, 1)$, s dvije moguće vrijednosti 0 i 1. Bilo koja 1–1 korespondencija skupova L i M pridruživala bi svakom $z \in L$ funkciju $f_z(x) \in M$. Cantor za svaku takvu 1–1 korespondenciju može definirati funkciju $g(x) \in M$, zahtjevom $g(x) \neq f_z(x)$, za koju može dokazati da je različita od svake funkcije $f_z(x)$ korespondirane nekom elementu $z \in L$. Naime $g(x)$ se razlikuje od $f_z(x)$ baš na argumentu z , budući da je $g(z)$ definirano tako da je $g(z) \neq f_z(z)$. Tako je dokazao da nijedna korespondencija skupa L i skupa M ne obuhvaća sve elemente skupa M tj. moć skupa M veća je od moći skupa L (očito je naime da skup L jest u 1–1 korespondenciji s nekim podskupom od M , npr. korespondiranjem svakog $x \in L$ funkciji $f_x \in M$ definiranoj sa $f_x(z) = 0$ za $x \neq z$ i $f_x(x) = 1$). Budući da su elementi skupa M karakteristične funkcije podskupova skupa L , Cantor je dokazao da je moć partitivnog skupa od L veća od moći samoga skupa L . Očito je da se isti postupak može provesti za svaki skup L pa Cantor neposredno zaključuje da nema skupa s najvećom moći (njegov partitivni skup uvijek ima veću moć). Tako je konačno i bez ostatka dokazano da se beskonačnost beskonačno raslojava.

Cantorov novi, dijagonalni dokaz neprebrojivosti i njegovo poopćenje imali su, a i danas imaju, mnoge zanimljive primjene, pa i različite interpretacije. Spomenućemo jednu od primjena i jednu značajnu interpretaciju različitu od Cantorove

Cantorovim dijagonalnim postupkom dokazujemo da nijedna funkcija f definirana na S ne može primiti svaku vrijednost iz partitivnog skupa $\mathcal{P}(S)$, i to tako da za svaki f definiramo vrijednost C iz $\mathcal{P}(S)$ koju f ne prima. Tu vrijednost definiramo dijagonalno

$$C = \{x \in S : x \notin f(x)\}.$$

Očito je da ne postoji $a \in S$ takav da je $f(a) = C$, jer bi tada $a \in C$, tj. $a \in f(a)$ akko $a \notin f(a)$. Primjena tog zaključka, o kojoj ćemo nešto reći, je Russellova primjena iz 1902. godine (objavljena 1903. u Russellovim „The principles of mathematics“). Russell je uočio da Cantorov zaključak ne može vrijediti za univerzalni skup U svih skupova, budući da on kao skup svih skupova mora sadržavati i sve svoje

podskupove, dakle svoj partitivni skup, što povlači da najjednostavnija funkcija definirana na U , iddentitet, prima svaku vrijednost u $\mathcal{P}(U) \subseteq U$. Ali Cantor je dokazao da za svaku funkciju može naći C koji nije njena vrijednost. U ovom bi slučaju ta iznimka, nazovimo je u Russellovu čast R , bila definirana ovako

$$R = \{x \in U : x \notin x\}.$$

No sada je jasno zašto ta iznimka ne može potvrditi Cantorov opći zaključak. R je paradoksalni skup. Naime $R \in R$ ako i samo ako $R \notin R$. To je slavni Russellov paradoks, kojim je opovrgnuto načelo objedinjenja. Načelo po kojem svaki uvjet $\theta(x)$ određuje skup objekata koji udovoljavaju uvjetu. Uvjet $x \notin x$ ne određuje skup i time je ovo evidentno načelo zdravog razuma opovrgnuto. Rasprava ovog problema zahtijevala bi novi članak pa je ovdje nećemo nastavljati. Spominjemo još samo to da je autor ovoga članka u *Cantor's theorem and paradoxical classes, Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, Bd. 32, 1986*, pokazao da se i druge poznate, na drugi način otkrivene paradoksalne klase, kao i mnoge potpuno nove mogu dobiti sličnom primjenom Cantorovog dijagonalnog postupka.

I na kraju upozoravamo na jednu interpretaciju Cantorovog rezultata, koja je od njegove bitno različita. Ona je vrlo vjerovatno već dosta dugo poznata iako ne znamo gdje je, kada i kako prvi put formulirana. Možemo je nazvati konstruktivističkom jer je inherentna konstruktivnom fundiranju matematike. Izložit ćemo formulaciju do koje je autor ovoga članka nedavno došao i koja mu se čini izuzetno jednostavnom i razumljivom. Cantor je pokazao da funkcija definiranih na skupu prirodnih brojeva \mathbf{N} , a s vrijednostima u tom istom skupu, ima više no što ima samih prirodnih brojeva. Pokazao je da za svako jednoznačno pridruženje brojeva funkcijama, $n \rightarrow f_n$, može definirati funkciju ψ koja nije pridružena nijednom broju. Naime,

$$\psi(n) = f_n(n) + 1$$

će biti takva funkcija, jer će se ona od svake funkcije f_n razlikovati po vrijednosti koju prima na argumentu n . Ukratko Cantor će zaključiti da aritmetičkih funkcija ima neprebrojivo mnogo. Ali kako ovaj rezultat može shvatiti konstruktivist za kojeg je aritmetička funkcija f **pravilo kojim se propisuje kako za svaki broj n treba izračunati vrijednost funkcije $f(n)$** . Kako god općenito zamislili pojam pravila za izračunavanje ono mora biti konačno objašnjivo i konačno opisivo. Svaki konačni opis može se kodirati prirodnim brojem i (koji ćemo u slučaju da i jest kod opisa neke funkcije, nazovimo je φ_i , zvati indeksom te funkcije, dok ćemo tvrdnju „ i je indeks neke funkcije“ kraće označiti sa $F(i)$). Ali ako su funkcije opisive prirodnim brojevima onda ih ne može biti više no što ima prirodnih brojeva, kako to dokazuje Cantor. No s druge strane Cantor je za svaki niz funkcija egzaktno definirao funkciju koja tim nizom nije obuhvaćena. To bi isto moralo vrijediti i za naš niz funkcija φ_i takvih da je $F(i)$ tj. da i jest indeks funkcije. Cantor iznimku definira ovako

$$\psi(n) = \varphi_n(n) + 1.$$

Međutim, ne mora svaki n biti indeks funkcije (tj. ne vrijedi $F(n)$ za svaki n). To znači da Cantorov postupak ne definira iznimku u potpunosti. No to je lako popraviti. Definirajmo ψ ovako:

$$(*) \quad \psi(n) = \begin{cases} \varphi_n^{(n)+1} & \text{ako } F(n) \\ 0 & \text{ako nije } F(n). \end{cases}$$

Sada je ψ potpuno definirana i lako se vidi, a'la Cantor, da se razlikuje od svake naše funkcije-pravila. No to znači da sama definicija (*) nije pravilo, iako tako izgleda. Naime (*) nas upućuje da $\psi(n)$ računamo tako da pravilo-funkciju s indeksom n primjenimo na n i tome dodamo 1 **ako vrijedi** $F(n)$ ili da joj neposredno damo vrijednost 0 **ako ne vrijedi** $F(n)$. To bi stvarno bilo pravilo kada bismo imali pravilo kojim bismo mogli odrediti da li vrijedi $F(n)$ ili ne vrijedi $F(n)$ tj. da li je n indeks pravila ili on to nije. Budući da Cantorov postupak dokazuje da (*) nije pravilo slijedi da nema pravila koje bi odlučilo da li je n indeks pravila tj. da li je ono što n kodira pravilo. Ukratko, Cantorov dijagonalni postupak, konstruktivistički interpretiran, dokazuje da nema pravila koje bi odredilo što jest pravilo. Ili, drugim riječima, aritmetičkih funkcija ima (u Cantorovom smislu) isto toliko koliko i brojeva, pa njegov dijagonalni postupak ne pokazuje da ih ima više, nego dokazuje to da nema pravila kojim bismo uvijek mogli odlučiti da li nešto jest ili nije aritmetička funkcija.