O racionalnosti potencija

ZVONIMIR ŠIKIĆ, Zagreb

Dobro je poznato da potencija s racionalnom bazom i racionalnim eksponentom može biti i racionalna i iracionalna. Npr.

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

U daljnjem tekstu r_1, r_2 i r_3 su varijable čije su vrijednosti racionalni brojevi, a i_1, i_2 i i_3 su varijable čije su vrijednosti iracionalni brojevi. Navedenu tvrdnju o potenciji s racionalnom bazom i racionalnim eksponentom možemo, dakle, zapisati ovako:

(1) $(\exists r_1)\,(\exists r_2)\,(\exists r_3) \qquad r_1^{r_2} = r_3,$

(2) $(\exists r_1)\,(\exists r_2)\,(\exists i_1) \qquad r_1^{r_2} = i_1.$

Što se događa u ostalim slučajevima? Jesu li i ove tvrdnje istinite?

(3) $(\exists i_1)\,(\exists r_1)\,(\exists r_2) \qquad i_1^{r_1} = r_2,$

(4) $(\exists i_1)\,(\exists r_1)\,(\exists i_2) \qquad i_1^{r_1} = i_2,$

(5) $(\exists i_1)\,(\exists i_2)\,(\exists r_1) \qquad i_1^{i_2} = r_1,$

(6) $(\exists i_1)\,(\exists i_2)\,(\exists i_3) \qquad i_1^{i_2} = i_3,$

(7) $(\exists r_1)\,(\exists i_1)\,(\exists i_2) \qquad r_1^{i_1} = i_2,$

(8) $(\exists r_1)\,(\exists i_1)\,(\exists r_2) \qquad r_1^{i_1} = r_2.$

Dokazat ćemo da su sve ove tvrdnje istinite.

Tvrdnje (3) i (4), slično kao tvrdnje (1) i (2), dokazujemo jednostavnim izračunavanjem vrijednosti odgovarajućih potencija:

$$\sqrt{2}^{\,2} = 2 \quad \text{i} \quad \sqrt{2}^{\,\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{2}.$$

Dokazi tvrdnji (5) i (6) i (7) bitno su drukčiji. Naime, ti dokazi nisu konstruktivni, tj. tvrdnje (5), (6) i (7) nećemo dokazati izračunavanjem vrijednosti odgovarajućih potencija.

Počnimo s tvrdnjom (5). Treba dokazati da potencija s iracionalnom bazom i iracionalnim eksponentom može biti racionalna. Razmislimo o broju $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Ako je $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ racionalan broj, onda vrijedi (5). Ako $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ nije racionalan broj, onda (5) slijedi iz činjenica da je

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2.$$

Dakle, tvrdnja (5) je istinita bez obzira na to kakav je broj $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.

Tvrdnju (6) dokazujemo slično. Ako je $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ iracionalan broj onda vrijedi (6). Ako $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ nije iracionalan broj, onda (6) slijedi iz činjenice da je

$$\sqrt{2}^{(\sqrt{2}+1)} = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}.$$

Da bismo dokazali (7), razmislimo o broju $2^{\sqrt{2}}$. Ako je $2^{\sqrt{2}}$ iracionalan broj, onda vrijedi (7). Ako $2^{\sqrt{2}}$ nije iracionalan broj, onda (7) slijedi iz činjenice da je

$$2^{\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)} = \left(2^{\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}.$$

Uočite da ovi "lagani" dokazi egzistencije ništa ne govore o tome kakvi su uistinu brojevi $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ i $2^{\sqrt{2}}$. Odgovore na ova konkretna pitanja daju samo "teški" dokazi "teške" teorije brojeva.

Tvrdnju (8) opet dokazujemo jednostavnim izračunavanjem vrijednosti odgovarajuće potencije*

$$1^{\sqrt{2}} = 1.$$

* Može se postaviti pitanje je li ovdje bitno da je baza potencije 1. Naime, vrijedi li
(8') $(\exists r_1 \neq 1)\ (\exists i_1)\ (\exists r_2)\ \ r_1^{\,i_1} = r_2$?
Ostavljamo čitatelju da sam riješi ovaj problem.