

dinih tvrdnji ovako bogatog asertoričkog govora? Koja su značenja tih tvrdnji?

Dokle god se u našem govoru zadovoljavamo jednostavnim vezanjem tvrdnji pomoću tzv. propozicionalnih veznika (uključujući i negaciju), značenja i kriterije istinitosti tako dobivenih tvrdnji u potpunosti razumijevamo dvovaljanim (klasičnim) shvaćanjem istine i laži kao predikata, koji se tvrdnjama pridaju ili odriču u skladu s tzv. tablicama istinosnih vrijednosti pojedinih veznika.

Da je to razumijevanje u skladu s razumijevanjem jednostavnih tvrdnji i da je taj sklad moguće na izvjestan način proširiti i na univerzalne tvrdnje pokazuje nam primjerom rekurzivna aritmetika kako ju je razvio Skolem 1923<sup>\*</sup>. On je pokazao kako je moguće u rekurzivnoj aritmetici u potpunosti simulirati govor, propozicionalnim veznicima vezanih tvrdnji, čisto računskim govorom jednostavnih tvrdnji. Na taj je način čisto aritmetički fundirana jedna logika, ali lišena neposredne upotrebe partikularnog (egzistencijalnog) i univerzalnog kvantora. Jedna vrlo jaka aritmetika može se razviti na taj način.

Ostaje otvoreno pitanje, koje značenje imaju univerzalne i partikularne (egzistencijalne) tvrdnje? U čemu je i što je istinitost tih tvrdnji? Konkretno što znači tvrdnja: Bar jedan neparan broj je savršen, ili tvrdnja: Svaki neparan broj je nesavršen? Ukoliko pritisnuti ontološkim pritiskom razumijemo ovakve tvrdnje kao deskripcije aktualno postojećeg područja brojeva (najčešće shvaćenog isključivo po analogiji s aktualno ostvarljivim tj. konačnim skupovima) tada su značenja tih tvrdnji deskripcije stanja stvari u tom području. Uvjet istinitosti određen tim značenjem je adekvacija deskripcije stanju stvari. Nesigurnost koja proizlazi iz tog razumijevanja već je naznačena. (Nadalje, ovaj uvjet istinitosti neke tvrdnje ne pruža ujedno i kriterij istinitosti.)

Ukoliko nam je i ovdje stalo do sigurnosti čiste matematike, mi već znamo gdje leži njen izvor. (On je opisan u prvom odjeljku.) Sada se dakle radi o tome da se zasnjuje jedna (recimo po analogiji) *matematika* asertoričkog govora neopterećena ontološkim pritiskom. Ta matematika tj. matematička logika u jednom smislu čak i prethodi onoj ranije opisanoj (slobodno rečeno u onom smislu u kojem govor prethodi brojanju). Rekao bih još samo toliko da se tu radi o zasnivanju konstruktivne matematičke logike<sup>\*\*</sup>.

<sup>\*</sup>SKOLEM, Th. Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich. Skripter Norske Videnskaps-Akademi, I, No. 6b, Oslo.

<sup>\*\*</sup>Jedan drugi način suočavanja s tom nesigurnošću je Hilbertova metoda idealnih elemenata, koja se treba opravdati ispunjenjem njegovog programa. Bit metode je da se problematizirane tvrdnje (idealni elementi), liše svakog značenja i shvate samo kao pomoćno sredstvo putem kojega se omogućuje lakše utvrđivanje istinitosti jednostavnih tvrdnji, čije nam je značenje jedino neposredno dano. U tu svrhu dopušta se izvodjenje tih tvrdnji i izvodjenja iz tih tvrdnji u skladu s manipulativnim principima, koji su slike logičkih principa, bilo konstruktivno bilo ontološki zasnovanih (kao što je npr. princip tertium non datur – naime jedno stanje stvari ili je aktualno ostvareno u aktualno postojećem području ili nije). Među-

III Iscrpljuje li čista matematika, kako smo je ovdje razumjeli, svu onu aktivnost, prošlu i sadašnju, koja je kulturno i povijesno označena kao matematika? Sigurno ne. Van opsega čiste matematike ostaje primijenjena matematika tj. ona matematika koja prihvaća ontološki pritisak, koja je po intenciji deskriptivna. To je, primjerice, geometrija shvaćena kao deskripcija *postojećeg* prostora ili matematička analiza shvaćena kao *deskripcija* brojevnog pravca (kontinuum) i promjenljivih veličina čija se promjenljivost mjeri funkcijama, koje ovise o argumentima s brojevnog pravca.

Po čemu je takva, *primijenjena* matematika još uvijek matematika? Može li se njena matematičnost uskladiti sa onim što smo do sada rekli?

U jednom smislu može. Primijenjena je matematika, istina, deskriptivna po svojoj intenciji, ona upućuje na svoj *predmet*, ali u samoj izvedbi ona teži onoj apodiktčnosti čiste matematike o kojoj je ranije bila riječ. Ta težnja očituje se u samom odnosu prema *predmetu* primijenjene matematike. Pretpostavke o prirodi tog predmeta uvijek se pokušavaju svesti na minimum. To je karakteristično.

Poučan primjer je aritmetizacija matematičke analize; zamjena infinitezimala, koji je tipičan proizvod ontološkog pritiska, graničnim procesom, procesom približavanja.

Programi koji su išli za tim da pruže sigurnost čiste matematike primijenjenoj matematici, oslobadajući je ontološkog pritiska njenog predmeta, često su uspijevali samo u tome da zamjene njen predmet jednim novim predmetom, dakle da premjeste ontološki pritisak u jednu novu sferu (vidi str. 18). Poznati primjer je skupovno-teorijsko zasnivanje matematike.

Moja posljednja teza je da je teorija skupova (razvijena od Cantora na dalje kao teorija transfinitnih ordinala i kardinala), primijenjena matematika, u ovdje jasno naznačenom smislu, i da kao takva ne može služiti zasnivanju matematike. Naprotiv, pravi je zadatak da se upravo njoj pokuša pružiti sigurnost čiste matematike, zasnivanjem jedne *matematike* skupljanja i transfinitnog nabiranja, u ontološki neonterećenom smislu. Mislim da je to do jedne mjere moguće, i to onda kada se radi o teoriji transfinitnih ordinala. (Možda je to i najznačajniji zadatak čiste matematike.) U slučaju transfinitnih kardinala sumnjam da je takvo zasnivanje uopće moguće. Zašto?

Teorija skupova se nakon burnog razdoblja svoje mladosti, u kojem je bila teško potresena antinomijama, koje su zbunjivale, konačno konstituirala kao deskripcija kumulativne, po tipovima izrasle, strukture skupova u Zermelovom smislu. Treba priznati da se od tada u teoriji skupova nije pojavila niti jedna antinomija. Međutim, isto tako treba priznati da je kumulativna struktura prilično varljiva. Uglavnom je prihvaćamo školskim treningom i teško da imamo bilo kakav uvid u tu bogatu struk-

---

tim porijeklo tih manipulativnih principa se metodički zanemaruje i previdja, tako da matematika postaje igra u kojoj samo mali dio ima direktno značenje i smisao. Ona se naknadno kao cijelina opravdava metamatematičkim dokazima konzistencije, koji bi trebali osigurati slijedeće (?): Svaka tvrdnja, koja ima direktno značenje (realni element) i koja se u okviru igre može dokazati, po samom svom značenju je istinita.

turiranost. Ontološki je ona potpuno nezasnovana. Sigurno nije zadatak čiste matematike da je *ontološki* zasnuje, ali tu se i ne radi o čistoj matematici nego o njenoj primjeni na nešto što se mora, ukoliko nam je stalo do sigurnosti, samo sobom tj. vanmatematički, ontološki osigurati. Takvi pokušaji su rijetki i prilično neuvjerljivi\*.

S druge strane matematičkim izvođenjem teorije skupova (za koje je karakteristično da se ne opterećuje ontološkim problemima) pokušava se, koliko je to moguće, zaobići ontološka obaveznost, koju nameće *predmet* izučavanja. Pokušava se s aksiomatikom; dakle, obavezati se što manje, što određenije, jasno to iskazati aksiomima i potom djelovati čisto matematički. Međutim:

1. Matematički tretman se u ovakvim slučajevima, gotovo uvijek, služi i principima, koji su ontološki zasnovani (na primjer, tertium non datur), bez ispitivanja njihove matematičke opravdanosti (npr. Hilbertovom metodom spomenutom u fusnoti). Tu je prisutna jedna *prešutna* pretpostavka o ontološkoj zasnovanosti predmeta izučavanja.
2. Skolemov paradoks pokazuje da matematički tretman, bez obzira na snagu aksioma, sam po sebi ne obavezuje na velike kardinale. Drugim riječima, da bi rezultate takve teorije skupova shvatili kao rezultate o transfinitnim kardinalima nužna je interpretacija tih rezultata na kumulativnoj strukturi, što zahtijeva uvid u tu strukturu i njeno *ontološko* zasnivanje. To je i najjači odgovor na „Zašto?” iz pretprošlog pasusa.

#### LITARATURA

1. Goodstein, R.L., *Recursive Number Theory*, SL. Nort Holland, 1957.
2. Goodstein, R.L., *Recursive Analysis*, SL. North Holland, 1961.
3. Lorenzen, P., *Normative Logic and Ethics*, Bibliographisches Institut – Mannheim, 1969.

---

\*J.A. Benardete, *Infinity—an Essay in Metaphysics*, Oxford University Press, 1964.

## O RAZLCI ČISTE I PRIMIJENJENE MATEMATIKE U SVIJETLU MATEMATIČKOG POSTOJANJA

Zvonimir Šikić, Zagreb

I Što je predmet matematike? *Opisuje* li matematika predmete i koji je modus egzistencije tih predmeta? O čemu je riječ u matematici? Već kada je riječ o najosnovnijem prvom predmetu matematike, (prirodnom) broju, naše se razumijevanje vrti u mnoštvu neodređenosti. Pokušat ću objasniti odakle izvire ta neodređenost, a time i nesigurnost koja je karakteristična za susrete s ovim pitanjima.

Konkretizirajmo pitanje do kraja: Na što možemo uputiti onoga koji pita što je broj 3? Nudjeni su razni odgovori, vezani uz realne predmete, njihova količinska svojstva, znakove, urodjene ideje, objektivne ideje itd. Po mojem mišljenju najjednostavnije i najpoučnije je upućivanje na određenu skupinu, na primjer palac, kažiprst i srednjak, kombinirano, a to je najbitnije, sa govorno–pokaznom podukom iz brojenja. Ova se sastoji u izricanju brojeva jedan, dva i tri, popraćenom pokazivanjem pojedinih članova uočene skupine (palac, kažiprst i srednjak). Osnovni prigovor ovoj poduci je upravo to da je ona puka poduka o upotrebi brojeva i da stoga unaprijed pretpostavlja jedan odgovor na pitanje, gdje su i što su brojevi, koji se tim postupkom prebrajanja vežu uz uočenu skupinu. Iz tog prigovora izrasta poznata Fregeova definicija prirodnog broja. Naime postupak u kojem se brojevi već unaprijed spominju, a koji je gore opisan, zamijenjuje se postupkom kojim se dovode u 1–1 korespondenciju dva skupa. U tom novom postupku brojevi se više ne spominju i time se na poznati način broj pokušava razumijeti putem razumijevanja korespondencije skupova tj. kao zajedničko svojstvo međusobno korespondentnih (sličnih) skupova. Način egzistencije brojeva je time vezan uz način egzistencije skupova i njihovih korespondencija.

Ranije spomenuti prigovor i ovo razjašnjenje izvire iz jednog ontološkog pritiska – jednog zahtjeva da se za ono o čemu je riječ eksplicite utvrdi da jest i da se nadalje utvrdi što jest, to što jest, i gdje jest, to što jest (u kojoj sferi onoga što jest). Jedan daljnji ontološki pritisak (sada potaknut *svojstvom*, koje je zajedničko sličnim skupovima) dovodi Russella do ekstenzionaliziranja tog zajedničkog svojstva tj. do zaključka da je broj upravo skup svih međusobno sličnih skupova. Ovaj

pristup nosi u sebi sve one teškoće, koje donosi pokušaj razumijevanja korespondencije, pogotovo pokušaj razumijevanja korespondencije mimo svakog brojanja.

Sam ontološki pritisak ovime nije ukinut nego je premješten u jednu drugu sferu (no to i nije neki prigovor).

Ono na što sam želio upozoriti je to da je ovaj tip argumentacije, kojom dominira ono što sam nazvao ontološkim pritiskom, atipičan za matematiku. Moja je teza da je za matematiku, kada je zovemo čistom matematikom, konstituirajuće upravo to da je oslobođena svakog ontološkog pritiska i da je u određenom smislu matematika upravo ono što je moguće mimo ontološkog pritiska. Konkretizirat ću tu tezu na već pokrenutom problemu (postojanja) broja u matematici.

*Matematika* brojeva ili aritmetika primjerom pokazuje kako je moguća znanost (i znanje) o brojevima mimo ontologiziranja broja. Predmet aritmetike nisu brojevi u Frege–Russellovom ili bilo kojem drugom ontologiziranom smislu, nego je njen predmet uloga brojeva u brojanju, a potom i spajanju, odbijanju, umnažanju, podjeli itd. Prisutnost te uloge u aritmetici realizirana je nosiocem uloge tj. brojevnim znakom (brojkom) i ta prisutnost omogućuje izvođenje aritmetike. Uloga tih nosilaca određena je prvo njihovim nabrojanjem, u smislu potencijalne ostvarljivosti brojki, a potom njihovim zbrajanjem u smislu potencijalne ostvarljivosti zbrajanja brojki itd. Tu potencijalnu ostvarljivost obično kodiramo u obliku pravila:

Nabrojanje brojki

$$\Rightarrow 0$$

$$m \Rightarrow m|$$

Sumiranje brojki

$$\Rightarrow m, 0, m$$

$$m, n, p \Rightarrow m, n|, p|$$

Kada ovako određene uloge shvatimo kao transformaciona pravila brojevnih znakova možemo se složiti, ali samo u tom, a ne nekom poigravajuće formalnom smislu, s često ponavljanom tvrdnjom da aritmetika nije studij samih brojeva nego transformacionih pravila (potencijalno ostvarljivih) brojevnih znakova. To što u aritmetici ipak govorimo o brojevima implicate pokazuje neopterećenost tog govora ontološkim pritiskom. Razliku broj–brojka eksplikiramo tek onda kada želimo kao gore eksplicirati tu neopterećenost.

U vezi s postojanjem brojevnih znakova i transformacionim pravilima, koja određuju njihove uloge, potrebno je još reći slijedeće. Transformaciona pravila imaju normativni, a ne deskriptivni karakter. Takvim pravilom, kao što smo vidjeli, postavlja se *norma* potencijalnog ostvarivanja brojki, njihovog sumiranja itd. S druge strane brojevni znak se opire ontološkom pritisku svojom proizvoljnošću. Bilo što,

što jest, može biti brojevni znak (i nije jedino što jest). Upravo ta ontološka proizvoljnost brojki temelj je *izvodjenja* aritmetike, jer u njoj leži mogućnost (potentio) ostvarenja nove brojke, što omogućuje iskazivanje potencijalne ostvarljivosti u obliku ranije navedenih pravila.

U normativnom karakteru čiste matematike i ontološkoj proizvoljnosti, koja omogućuje njeno izvodjenje, leži njena sigurnost, ili kako se to katkada s ponosom i češće s nerazumijevanjem kaže njena vječna istinitost.

Dešava se međutim, da se suočimo s tom sigurnošću, a da još nismo (ili možda više nismo) svjesni njenog izvora i tada ga, pritisnuti ontološkim pritiskom, želimo otkriti i pokazati tako, da (ontološki) zasnujemo *predmet* matematike, a nju shvatimo kao deskripciju tog negdje prisutnog predmeta. Jasno je da se u ontološkoj obaveznosti (inače izuzetno značajnoj) i deskriptivnom karakteru tako shvaćene *matematike* gubi ona sigurnost s kojom smo bili suočeni i do čijeg nam je izvora bilo stalo. U potrazi za samim izvorom sigurnosti mi postajemo nesigurni, pa se, zbunjeni time, počinjemo vrjetiti u mnoštvu neodređenosti.

Treba stoga biti svjestan da jedno ontološko zasnivanje matematike (tj. zasnivanje matematike kao deskriptivne znanosti putem zasnivanja njenog predmeta) ne može imati onaj karakter sigurnosti, koji ima čista matematika.

- II Nakon ovog, svakako ne dovoljno detaljnog, uvida u karakter čiste matematike i njenog zasnivanja, kazat ću nekoliko riječi o apodiktičkoj istinitosti matematičkih tvrdnji, kao i o logici te apodiktičnosti.

Gore prikazano razumijevanje čiste matematike brojeva, navelo nas je, da je u jasno odredjenom smislu shvatimo kao izučavanje transformacionih pravila brojevni znakova. To izučavanje zahtjeva jedan govor, asertorički govor, govor kojim se tvrdi, govor tvrdnji.

Jedna jednostavna aritmetička tvrdnja je tvrdnja o potencijalnoj ostvarljivosti nekog izračunavanja (sumiranja, množenja itd.). Npr. jednom takvom tvrdnjom tvrdimo potencijalnu ostvarljivost trojke  $m, n, p$  primjenom pravila zbrajanja. Toj tvrdnji o potencijalnoj ostvarljivosti ili o konstruktibilnosti dajemo oblik  $\vdash m, n, p$  ili uobičajenije  $m + n = p$ .

Apodiktička istinitost jedne takve tvrdnje leži upravo u potencijalnoj ostvarljivosti normativno usmjerenih izračunavanja. Ona je *osigurana* ostvarljivošću propisane konstrukcije, dakle ostvarljivošću jedne sinteze, koja nije deskriptivna nego normativno usmjerena (kazano starijim riječnikom apriorna). Možemo reći da je *značenjem* tvrdnje (u našem slučaju to je potencijalna ostvarljivost jedne konstrukcije) određen kriterij njene istinitosti.

Ne ostaje međutim sve na govoru jednostavnih tvrdnji. Tvrdnje vežemo veznici-ma, negiramo, partikulariziramo, univerzaliziramo itd. U čemu je i što je istina poje-