O TAYLOROVOM TEOREMU

Zvonimir ŠIKIĆ, Zagreb

Upoznavanje studenata infinitezimalnog računa s Taylorovim teoremom vezano je uz dva problema:

A. Kako motivirati Taylorov polinom? Odakle baš taj polinom? Kako dolazimo do toga da funkciju aproksimiramo baš Taylorovim polinomom te funkcije?

B. Kako dokazati teorem, tj. kako naći grešku koju činimo aproksimirajući funkciju njenim Taylorovim polinomom?

U literaturi koju smo analizirali (popis je na kraju članka) nailazimo na razna rješenja problema A. Navest ćemo ih.

A0. Taylorov polinom ne motiviramo ni na koji način. Takvo „rješenje" nalazimo u [Ba], [Ha], [J], [Kw], [Ma], [MĐ], [S] i [UMT].

A1. Najprije dokazujemo da je Taylorov polinom svakog polinoma sam taj polinom. Zatim zaključujemo ovako: kada bi funkcija bila polinom, bila bi jednaka svojem Taylorovu polinomu — **dakle**, ako funkciju želimo aproksimirati polinomom najbolje je aproksimirati je njenim Taylorovim polinomom. Ova je motivacija najčešća. Nalazimo je u [Be], [Bl], [Bo], [C], [F], [Mi] i [N].

A1.a. Metodom A1 (između ostalog) pokazujemo da se prvih n derivacija funkcije f i prvih n derivacija Taylorova polinoma funkcije f poklapaju u točki a (koja određuje Taylorov polinom). Taylorov polinom možemo motivirati tim svojstvom neovisno o motivaciji A1. Takav pristup nalazimo u [T].

A2. Definiramo mjeru dodira dviju funkcija u točki a, pa zatim za danu funkciju nalazimo polinom koji s tom funkcijom u točki a ima maksimalni dodir (u smislu prije definirane mjere). Pokazujemo da je traženi polinom Taylorov polinom. Takav pristup nismo našli ni u jednom od analiziranih udžbenika. Mi ga detaljno izlažemo u [Š1].

A3. Dokazujemo da je svaki red potencija Taylorov red. Dakle, ako funkciju možemo razviti u red potencija, onda je taj red Taylorov red. No Taylorov red je granična vrijednost niza Taylorovih polinoma. Ovaj pristup nalazimo u [Ku] i [BA].

A4. Tražimo polinom čije su vrijednosti u n međusobno različitih točaka jednake vrijednostima dane funkcije u tim točkama. Granični slučaj tog polinoma, slučaj u kojem svih n točaka teži prema jednoj jedinoj točki jest Taylorov polinom dane funkcije. U [C] smo našli samo naznaku ovog pristupa (u jednom apendiksu) pa ga zato detaljno izlažemo u [Š2].

Studentu koji je izložen „metodi" A0 ostaje da se čudi kako je ikada ikome palo na pamet da konstruira Taylorov polinom funkcije f i uspoređuje ga s funkcijom f.

Slabost najčešće metode A1 je u podvučenom dakle (vidi stranu 1). Trivijalno je, naime, da je najbolja polinomska aproksimacija **polinoma** njegov Taylorov polinom, budući da je to on sam. Nije jasno zašto bi zato i najbolja polinomska aproksimacija **funkcije koja nije polinom** bio Taylorov polinom te funkcije. Moguće je jedno naknadno opravdanje. Kada dokažemo Taylorov teorem možemo (služeći se njime) dokazati da Taylorov polinom funkcije f u točki a ima s funkcijom f (u toj točki) dodir najvišega reda. To naknadno opravdanje uistinu i nalazimo u [C] str. 458, [Ma] str. 372. i [Ha] str. 296. Međutim, iako bolja od nikakve, naknadna motivacija je ipak *contradictio in adjecto*.

Metoda A1a. još je slabija motivacija od metode A1, a ima sve njezine nedostatke.

Metoda A2 je način da se spomenuta naknadna motivacija pretvori u pravu motivaciju.

Metoda A3 je odlična za studenta koji razumije značaj razvijanja funkcija u redove potencija i koji već ponešto zna o redovima funkcija (ili bar potencija). Njezina je slabost da odlaže uvođenje Taylorova teorema u kursu infinitezimalnog računa. U udžbenicima koji se koriste ovom metodom Taylorov teorem nalazimo mnogo kasnije no inače (usp. [BA] i [Ku] s ostalim udžbenicima).

Metoda A4 numerički je orijentirana, što joj može biti prednost, ali i nedostatak. Naime, ona zahtijeva da se Taylorovu teoremu posveti dosta vremena u kursu infinitezimalnog računa (što često nije moguće), ali zbog toga otkriva neke numerički značajne veze koje drugi pristupi ne otkrivaju.

I na kraju, problem A možemo riješiti i tako da ga ukinemo kao problem (što ne znači da ga ignoriramo kao u A0). Dokaz Taylorova teorema može biti takav da ne pretpostavlja Taylorov polinom, nego da ga sam generira; u tom slučaju Taylorov polinom ne trebamo posebno motivirati. Analizirajući dokaze Taylorova teorema, susrest ćemo se i s takvim slučajevima.

Evo sada nekih rješenja problema B.

B0. Teorem izričemo, ali ga ne dokazujemo. Npr. u [J], [Mi] i [S].

Prije klasifikacije dokaza Taylorova teorema uvedimo neke oznake. Taylorov polinom n-toga stupnja funkcije f u točki a označavamo s $T_a(x)$ (naime, u svim dokazima se funkcija f i stupanj n drže konstantnim):

$$(1)\qquad T_a(x) = f(a) + f'(a)\frac{(x-a)}{1!} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}.$$

Grešku koju činimo aproksimirajući funkciju f njenim Taylorovim polinomom $T_a(x)$ označavamo s $G_a(x)$:

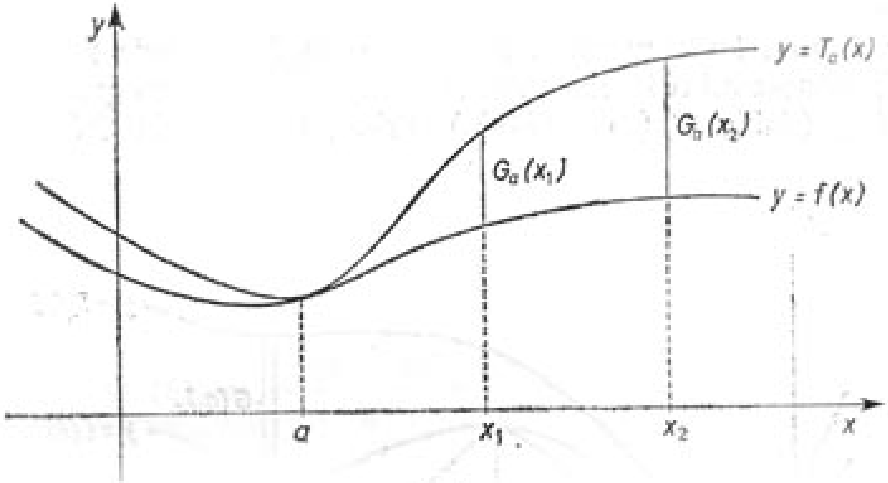
$$(2)\qquad G_a(x) = f(x) - T_a(x).$$

Taylorovim teoremom rješavamo problem nalaženja te greške.

Prva i najbrojnija skupina dokaza Taylorova teorema je ona u kojoj se koristimo (isključivo) metodama diferencijalnog računa. Unutar nje razlikujemo ove dokaze:

B1. Grešku $G_a(x)$ izračunavamo držeći a konstantom, a x varijablom. Evo takva dokaza:

Kada parametar a držimo konstantnim, tok tražene funkcije $G_a(x)$ izgleda kao na sl. 1.



Sl. 1

Lakim računom nalazimo da je

$$T_a^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \text{ za } k \leqslant n. \tag{3}$$

Dapače, ako smo $T_a(x)$ prethodno motivirali, onda smo već tada nužno došli do tog osnovnog svojstva polinoma $T_a(x)$. Iz (1), (2) i (3) proizlazi

$$G_a^{(k)}(a) = 0 \quad \text{za} \quad k \leqslant n \qquad \text{i} \tag{4}$$

$$G_a^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x). \tag{5}$$

Po Cauchyjevu teoremu srednje vrijednosti (C) proizlazi

$$\frac{G_a(x)}{(x-a)^{n+1}} \overset{(4)}{=} \frac{G_a(x) - G_a(a)}{(x-a)^{n+1} - (a-a)^{n+1}} \overset{C}{=} \frac{G_a'(x_1)}{(n+1)(x_1-a)^n} \overset{(4)}{=}$$

$$\overset{(4)}{=} \frac{G_a'(x_1) - G_a'(a)}{(n+1)(x_1-a)^n - (n+1)(o-a)^n} \overset{C}{=} \frac{G_a''(x_2)}{(n+1)\,n\,(x_2-a)^{n-1}} \overset{(4)}{=}$$

$$\overset{(4)}{=} \frac{G_a''(x_2) - G_a''(a)}{(n+1)\,n\,(x_2-a)^{n-1} - (n+1)\,n\,(a-a)^{n-1}} \overset{C}{=} \ldots \overset{C}{=} \frac{G_a^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!} \overset{(5)}{=}$$

$$\overset{(5)}{=} \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_{n+1})$$

za $x_{n+1} = a + \Theta x$, $0 \leqslant \Theta \leqslant 1$. Dakle,

$$G_a(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \Theta x) \qquad 0 \leqslant \Theta \leqslant 1.$$

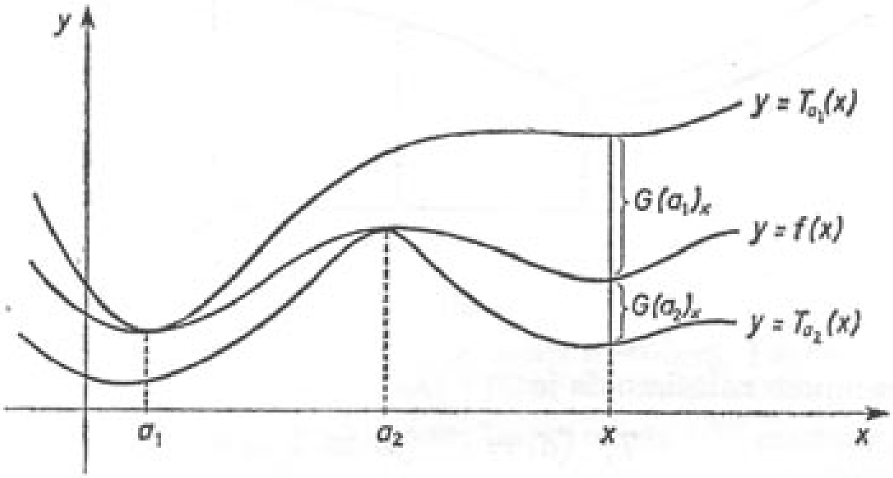
Ovakav dokaz ne nalazimo ni u jednom od analiziranih udžbenika.

B1a. Grešku $G_a(x)$ izračunavamo držeći a konstantom, a x varijablom služeći se pri tome jednom pomoćnom funkcijom.

Ovakav je dokaz teorema 4. u [Š1]. Ne nalazimo ga ni u jednom od analiziranih udžbenika.

B2. Grešku $G_a(x)$ izračunavamo držeći x konstantom, a a varijablom. Evo takvog dokaza.

Kada x držimo konstantom, tok funkcije $G_a(x)$ izgleda kao na sl.2. Da bi naglasili varijabilnost od a i konstantnost od x, označit ćemo grešku $G_a(x)$ novom oznakom $G(a)_x$ (dakle $G_a(x) = G(a)_x$). Primijetimo da je $G(x)_x = 0$.



Sl. 2

Iz (2) proizlazi

$$\frac{dG(a)_x}{da} = -\frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n+1)}(a). \tag{6}$$

Tada (zbog $G(x)_x = 0$) po Cauchyjevu teoremu srednje vrijednosti slijedi

$$\frac{G(a)_x}{(x-a)^p} = \frac{G(a)_x - G(x)_x}{(x-a)^p - (x-x)^p} \overset{C}{=} \frac{G'(\xi)^x}{-p(x-\xi)^{p-1}} \overset{(6)}{=}$$

$$\overset{(6)}{=} \frac{-\frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi)}{-p(x-\xi)^{p-1}} = \frac{(x-\xi)^{n-p+1}}{pn!} f^{(n+1)}(\xi),$$

tj.

$$G(a)_x = \frac{(x-a)^p (x-\xi)^{p-n+1}}{pn!} f^{(n+1)}(\xi) \quad \text{za} \quad \xi = a + \Theta x, \quad 0 \leqslant \Theta \leqslant 1.$$

Za $p = 1$ dobivamo Cauchyjev oblik ostatka, a za $p = n + 1$ Lagrangeov.

Ovakav dokaz nalazimo u [F], [B1] i [UMT]. Nešto općenitiju verziju (u nazivniku se umjesto $(x-a)^p$ nalazi bilo koja funkcija $\Phi(a)$) nalazimo u [B0], a jednu posebnu u [Kw] (u nazivniku se prvo nalazi $(x-a)$ a potom $(x-a)^{n+1}$).

B2a. Grešku $G_a(x)$ izračunavamo držeći x konstantom, a a varijablom služeći se pri tome jednom pomoćnom funkcijom. Evo takvog dokaza.

Do jednakosti (6) dolazimo kao i u B2. Tada uvodimo pomoćnu funkciju

(7) $$\Phi(y)_x = G(y)_x - H(x-y)^p \qquad 0 < p \leqslant n+1$$

u kojoj konstantu H određujemo tako da bude

(8) $$\Phi(a)_x = 0.$$

Očito je (vidi B2) $G(x)_x = 0$ dakle i

(9) $$\Phi(x)_x = 0.$$

Iz (8) i (9) po Rolleovu teoremu proizlazi

(10) $$\Phi'(\xi)_x = 0 \qquad \text{za} \qquad \xi = a + \Theta x, \quad 0 \leqslant \Theta \leqslant 1.$$

No iz (6) i (7) proizlazi

(11) $$0 = \Phi'(\xi)_x = -\frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi) + Hp(x-\xi)^{p-1}.$$

Dakle,

(12) $$H = \frac{(x-\xi)^{n-p+1}}{pn!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Iz (7), (8) i (12) dobivamo

$$G(a)_x = \frac{(x-\xi)^{n-p+1}(x-a)^p}{pn!} f^{(n+1)}(\xi) \qquad \text{za} \qquad \xi = a + \Theta x, \quad 0 \leqslant \Theta \leqslant 1.$$

Cauchyjev oblik greške dobivamo za $p = 1$, a Lagrangeov za $p = n+1$.

Ovakav dokaz nalazimo u [BA], [Ba], [Be], [Ha], [Ma], [MĐ], [N] i [UMT].

Taylorov polinom $T_a(x)$ je polinom varijable x (svaki parametar a daje polinom varijable x). Greška $G_a(x)$ je razlika funkcije $f(x)$ i **polinoma** $T_a(x)$ (tako govorimo našim studentima), dakle, ta je razlika funkcija varijable x (određena parametrom a). Dokazi B1 i B1a, kao i sl.1. usklađeni su s takvim pristupom problemu nalaženja funkcije $G_a(x)$. Dokazi B2 i B2a. sadrže za studente vrlo težak korak. U njemu se nepoznata funkcija $G_a(x)$ nalazi **variranjem parametra** a i **deriviranjem po parametru** a. Dakle, sliku 1 zamjenjuje slika 2, a funkciju varijable x, $G_a(x)$ (koja je razlika **funkcije** $f(x)$ i **polinoma** $T_a(x)$) zamjenjuje funkcija varijable a, $G(a)_x$ (koja je razlika **konstante** $f(x)$ i funkcije $T(a)_x$, **koja nije polinom**). Student kojeg uvodimo u ovu problematiku rješavanjem problema A (na način A1, A2, A3 ili A4), uvijek shvaća funkciju $G_a(x)$ kao razliku **funkcije** $f(x)$ i **polinoma** $T_a(x)$ (dakle pred očima uvijek ima sl.1), pa mu je ova teškoća gotovo nepremostiva. Čini nam se da upravo zato u [Ba], [Ha], [Kw] i [Ma] ne nalazimo nikakve motivacije polinoma $T_a(x)$. Ona, naime, smeta dokazima B2 i B2a. kojima se koriste ovi udžbenici. U [Be], [B1], [B0], [F] i [N], koji motiviraju $T_a(x)$ metodom A1 ova se teškoća „rješava" preimenovanjem varijabli, koje od motivirane funkcije $G_a(x)$ vodi k novoj pomoćnoj (tako se najčešće zove [1]) funkciji $G(a)_x$.

Dokaz B1 razlikuje se od dokaza B1.a, a B2 od B2.a, samo po tome što se prvi koriste Cauchyjevim teoremom srednje vrijednosti (i zato se ne koriste po

[1] Ova (nova pomoćna funkcija nije (stara) pomoćna funkcija Φ iz dokaza B1a i B2a

moćnom funkcijom Φ) a drugi se neposredno svode na Rolleov teorem (ali se zato koriste pomoćnom funkcijom Φ). Dokaz B2a opterećen je još i time što se u njemu pomoćna funkcija Φ gradi iz (jedne druge; vidi podlistak 1)) pomoćne funkcije koja je konstruirana preimenovanjem varijabli.

Upravo je nevjerojatno da se ni u jednom od analiziranih udžbenika ne radi neposredno s dobro motiviranom funkcijom $G_a(x)$, iako je to moguće, kao što smo vidjeli u B1 i B1a. Možda je razlog tome to što se metodom B1 i B1a dobiva samo Lagrangeov oblik ostatka, a ne i Cauchyjev, koji daju metode B2 i B2a. Međutim, to što smo mi u B1 i B1a uspjeli doći samo do Lagrangeova oblika ne znači da ne postoji metoda B1b, koja bi se koristila dobro motiviranom funkcijom $G_a(x)$ i koja bi davala Cauchyjev oblik ostatka. (Mi je nismo uspjeli naći iako vjerujemo da postoji: Možda će čitalac imati više uspjeha?).

Evo sada jednog rješenja problema B koje se koristi i metodama integralnog računa.

B3. (6) izvodimo kao u B2. Integriranjem dobivamo

$$G(a)_x = -\int_x^a \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n+1)}(a)\, da.$$

Odavde, po teoremu srednje vrijednosti integralnog računa, proizlazi

$$G(a)_x = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-\xi)^n}{n!}(x-a) \qquad \text{za} \qquad \xi = a + \Theta x, \quad 0 \leqslant \Theta \leqslant 1$$

što je Cauchyjev oblik ostatka, ili po poopćenom teoremu srednje vrijednosti integralnog računa

$$G(a)_x = -f^{(n+1)}(\xi)\int_x^a \frac{(x-a)^n}{n!}\, da = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{za}$$

$$\xi = a + \Theta x, \quad 0 \leqslant \Theta \leqslant 1$$

što je Lagrangeov oblik ostatka.

Takav dokaz nalazimo u [C]. Prigovori koji vrijede za B2 ($G(a)_x$ *vs.* $G_a(x)$) vrijede i ovdje.

Sada dolaze na red oni (već ranije spomenuti) dokazi koji ukidaju problem A, dakle, oni koji sami generiraju Taylorov polinom i kojima njegova (od njih nezavisna) motivacija ne treba.

AB1. Koliku grešku činimo kada vrijednost $f(b)$ aproksimiramo vrijednošću $f(a)$?

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\, dt = \int_a^b \underbrace{f'(t)}_{u}\, \underbrace{d(t-b)}_{dv} =$$

$$= f'(t)(t-b)\Big|_a^b - \int_a^b f''(t)(t-b)\, dt = f'(a)(b-a) - \int_a^b \underbrace{f''(t)}_{u}\, \underbrace{d\left(\frac{(t-b)^2}{2}\right)}_{dv} =$$

$$= f'(a)(b-a) - f''(t)\frac{(t-b)^2}{2}\Big|_a^b + \int_a^b f'''(t)\frac{(t-b)^2}{2}\, dt =$$

$$= f'(a)(b-a) + f''(a)\frac{(b-a)^2}{2} + \int_a^b \underbrace{f''(t)}_{u}\, \underbrace{d\left(\frac{(t-b)^3}{3!}\right)}_{dv} = \ldots =$$

$$= f'(a)(b-a) + f''(a)\frac{(b-a)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(b-a)^n}{n!} +$$

$$+ \int_a^b f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}\, dt.$$

Ostatak u Lagrangeovu i Cauchyjevu obliku nalazimo kao u B3.

Takav dokaz možemo naći u [C], [Ku], [T] i [W]. Vidimo kako Taylorov polinom doslovno nastaje parcijalnom integracijom, pa mu ne treba posebna motivacija. Ali tko će se sjetiti parcijalne integracije?

AB2.

(0) Neka su m i M gornja i donja međa funkcije $f'(x)$ na intervalu $[a, x]$:

(i) $m \leqslant f'(x) \leqslant M.$

Integrirajući ovu relaciju od a do x, dobivamo

$$m(x-a) \leqslant f(x) - f(a) \leqslant M(x-a), \text{ tj.}$$

(i') $$m \leqslant \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \leqslant M.$$

Iz (i) i (i') proizlazi

(ii) $$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi) \quad \text{za} \quad \xi = a + \Theta x, \quad 0 \leqslant \Theta \leqslant 1, \text{ tj.}$$

$$f(x) = f(a) + f'(\xi)(x-a).$$

(1) Neka su m i M gornja i donja međa funkcije $f''(x)$ na intervalu $[a, x]$:

(ii) $m \leqslant f''(x) \leqslant M.$

Integrirajući ovu relaciju od a do x, dobivamo

$$m(x-a) \leqslant f'(x) - f'(a) \leqslant M(x-a).$$

Još jedna integracija daje

$$m\frac{(x-a)^2}{2} \leqslant f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \leqslant M\frac{(x-a)^2}{2}, \quad \text{tj.}$$

(ii') $$m \leqslant \frac{2}{(x-a)^2}\left(f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)\right) \leqslant M.$$

Iz (ii) i (ii') proizlazi

$$\frac{2}{(x-a)^2}\left(f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)\right) = f''(\xi) \quad \text{za} \quad \xi = a + \Theta x,$$

$$0 \leqslant \Theta \leqslant 1, \text{ tj. } f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(\xi)\frac{(x-a)^2}{2}.$$

(2) Neka su m i M gornja i donja međa funkcije $f''(x)$ na intervalu $[a, x]$:

(iii) $m \leqslant f''(x) \leqslant M$.

Integrirajući ovu relaciju triput zaredom od a do x, dobivamo

$$m \frac{(x-a)^3}{3!} \leqslant f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} \leqslant M \frac{(x-a)^3}{3!}, \quad \text{tj.}$$

(iii') $$m \leqslant \frac{3!}{(x-a)^3}\left(f(a) - f'(a)(x-a) - f''(a)\frac{(x-a)^2}{2}\right) \leqslant M.$$

Iz (iii) i (iii') proizlazi

$$\frac{3!}{(x-c)^3}\left(f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - f''(a)\frac{(x-a)^2}{2}\right) = f''(\xi)$$

za $\quad \xi = a + \Theta x, \quad 0 \leqslant \Theta \leqslant 1 \quad$ tj.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + f''(\xi)\frac{(x-a)^3}{3!}.$$

Nastavljajući ovaj postupak, dobivamo

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots + f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + $$
$$+ f^{(n)}(\xi)\frac{(x-a)^n}{n!}.$$

Takav dokaz nismo našli ni u jednom od analiziranih udžbenika. Taylorov polinom sada nastaje n-strukom integracijom $(n+1)$ — e derivacije funkcije f i njenih međa. Ali tko će se sjetiti uzastopne integracije $(n+1)$ — e derivacije i njenih međa?[2]

Dokazi AB1 i AB2 su zanimljivi, ali ih student doživljava kao dosjetke (trikove) kojih se sam nikada ne bi dosjetio.

Zaključimo naše razmatranje. Idealan bi dokaz Taylorova teorema trebao generirati Taylorov polinom (dakle ukinuti problem A) i biti tako prirodan da mu se student u načelu (tj. uz vodstvo predavača) može sam dosjetiti. Postoji li uopće takav dokaz? Da, evo takvog dokaza.

Mi učimo naše studente da probleme rješavaju ovom osnovnom metodom infinitezimalnog računa:

Trebate li naći nepoznatu funkciju $G(x)$ (čija je vrijednost $G(a) = 0$ poznata), nađite njezinu derivaciju $G'(x)$ pa je integrirajte od a do x.

Ova osnovna metoda rješava i naš problem. Da bismo našli koliku grešku činimo aproksimirajući vrijednost $f(a)$ vrijednošću $f(x)$, trebamo zapravo naći funkciju $G_0(x)$ takvu da je

(0) $$f(a) = f(x) + G_0(x).$$

[2] Mogli bi se toga sjetiti ovako: derivirajući $n+1$ puta jednakost (2) nalazimo da je $G_a^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$. Dakle, da bi našli $G_a(x)$ treba $n+1$ puta uzastopno integrirati $f^{(n+1)}(x)$. Međutim, u pretpostavljamo Taylorov polinom (u (2)), pa to onda više nije dokaz kojem njegova motivacija nije potrebna.

Lako uviđamo da je $G_0(a) = 0$, a derivirajući jednadžbu (0)

$$0 = f'(x) + G_0'(x)$$

nalazimo $G_0'(x)$

$$G_0'(x) = -f'(x).$$

Integrirajući od a do x, dobivamo

$$G_0(x) = -\int_a^x f'(x)\,dx,$$

odakle prema teoremu srednje vrijednosti integralnog računa proilazi

$$G_0(x) = f'(\xi)(a-x) \qquad \text{za} \qquad \xi = a + \Theta x, \qquad 0 \leqslant \Theta \leqslant 1.$$

Uvrstimo li to u (0), dobivamo

(T0) $$f(a) = f(x) + f'(\xi)(a-x) \qquad \text{za} \qquad \xi = a + \Theta x, \qquad 0 \leqslant \Theta \leqslant 1.$$

sljedeće je pitanje koliku grešku činimo zamjenjujući vrijednost $f'(\xi)$ vrijednošću $f'(x)$. Trebamo, dakle, naći funkciju G_1 takvu da je

(1) $$f(a) = f(x) + f'(x)(a-x) + G_1(x).$$

Opet je $G_1(a) = 0$, a deriviranjem jednadžbe (1)

$$0 = f''(x)(a-x) + G_1'(x)$$

ponovo nalazimo $G_1(x)$

$$G_1'(x) = -f''(x)(a-x).$$

Integrirajući od a do x, dobivamo

$$G_1(x) = -\int_a^x f''(x)(a-x)\,dx,$$

odakle prema teoremu srednje vrijednosti integralnog računa proizlazi

$$G_1(x) = -f''(\xi)\int_a^x (a-x)\,dx = f''(\xi)\,\frac{(a-x)^2}{2}$$

$$\text{za} \qquad \xi = a + \Theta x, \qquad 0 \leqslant \Theta \leqslant 1.$$

Uvrstimo li to u (1), dobivamo

(T1) $$f(a) = f(x) + f'(x)(a-x) + f''(\xi)\,\frac{(a-x)^2}{2}$$

$$\text{za} \qquad \xi = a + \Theta x, \qquad 0 \leqslant \Theta \leqslant 1.$$

Ponavljajući ovaj postupak, dobivamo

(Tn) $$f(a) = f(x) + f'(x)(a-x) + f''(x)\,\frac{(a-x)^2}{2} + \ldots + \\ + f^{(n-1)}(x)\frac{(a-x)^{n-1}}{(n-1)!} + f^{n}(\xi)\,\frac{(a-x)^{n}}{n!}\,[3].$$

[3] Pošto je napisan ovaj rukopis, saznali smo (od prof. S. Axlera) da se sličan dokaz može naći u R. C. Buck: Advanced Calculus, MxGraw-Hill 1965, str. 126.

LITERATURA

[BA] Bermant, A. F., Aramanovich, I. G., *Mathematical Analysis*, Mir Publishers, Moscow 1975 (prijevod s ruskog), str. 691

[Ba] Banach, S., *Rachunek Rozmiczkowy i Calkowy*, Panstwowe Widownictwo naukove 1952, glava VI 6. 7.

[Be] Bermant, A. F., *Kurs metematičeskogo analiza*, Moskva 1958, str. 249.

[Bl] Blanuša, D. *Viša matematika* I 2, Tehnička knjiga, Zagreb 1965, str. 762.

[Bo] Bogdanov, S., *Lekcii po matematičeskomu analizu*, Minsk 1974, str. 82.

[C] Courant, R., *Introduction to mathematical analysis I*, Willey 1965, str. 445.

[F] Fihtengoljc, G. M., *Kurs diferencijal'nogo i integral'nogo isčislenia*, Moskva 1962, str. 246.

[H] Hardy, G. H. *A Course of Pure Mathematics*, Cambridge 1960, str. 285.

[J] Javor, P. *Uvod u matematičku analizu*, Školska knjiga, Zagreb 1983, str. 194.

[Ku] Kurepa, S., *Matematička analiza II*, Tehnička knjiga, Zagreb 1971, str. 100.

[Kw] Kuratowski, K., *Introduction to Calculus*, Pergamon Press 1969 (prijevod s poljskog), str. 185.

[Ma] Marković, Ž., *Uvod u višu analizu* I, Zagreb 1961, str. 347.

[MĐ] Mamuzić, Z. P., Đerasimović B. P.: *Osnovi matematičke analize*, Naučna knjiga Beograd, 1974, str. 151.

[Mi] Myškis A. D., *Introductory mathematics for enginiers*, Mir Publisher, Moscow 1972, (prijevod s ruskog) ,str. 161.

[N] Nikolsky, S. M., *A Course of Mathematical Analysis* I, Mir Publisher, Moscow 1977, (prijevod s ruskog), str. 151.

[S] Stipanić, E., *Viša matematik..* I, Građevinska knjiga, Beograd 1974, str. 233.

[Š1] Šikić, Z., *Taylorova formula i dodiri višeg reda*, Matematika (ovaj broj) Školska knjiga, Zagreb.

[Š2] Šikić, Z., *Polinomske aproksimacije i Taylorova formula*, Matematika (ovaj broj) Školska knjiga, Zagreb.

[T] Thomas, G. B., *Calculus and Analytic Geometry*, Addison-Wesley 1951, str. 603.

[UMT] Uščumlić, M., Miličić, P., Trifunović, M., *Uvod u višu matematiku II*, Beograd 1983, str. 165.

[W] Van de Waerden, B. L., *Mathematik für Naturwissenschaftler*, Bibliographisches Institut Manheim 1975, str. 255.