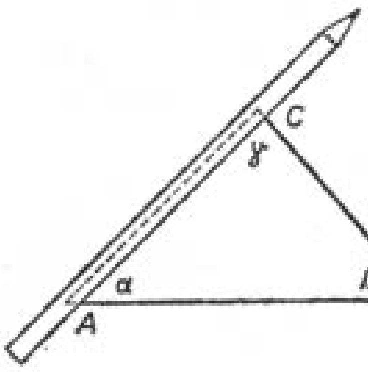
O ZBROJU KUTOVA U TROKUTU

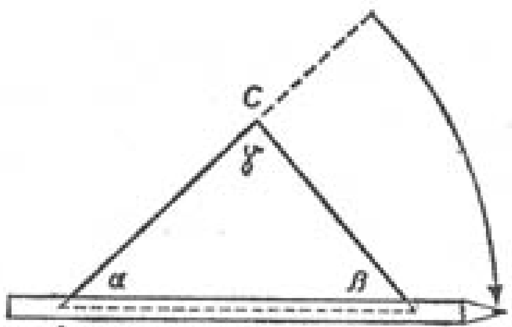
ZVONIMIR ŠIKIĆ, Zagreb

Zbroj kutova u trokutu je 180°. To učenici, u školama SR Hrvatske, nauče u 6. razredu osnovne škole. Nakon što nauče da kut mogu razumjeti kao mjeru promjene smjera (tj. kao mjeru zakreta), lako ih je uvjeriti u tu činjenicu, na sljedeći način:

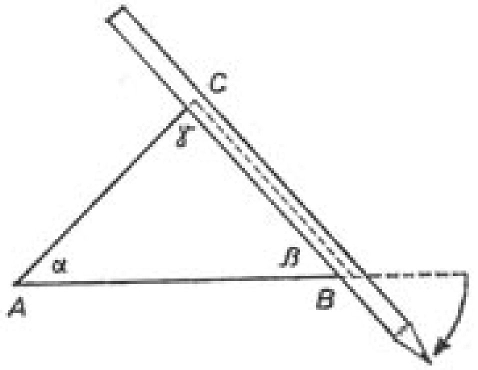
Postavimo olovku duž stranice $\overline{AC}$, trokuta ABC, kao na slici.



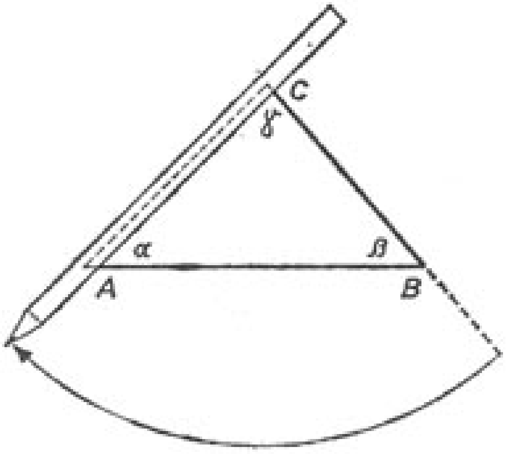
Zakrenimo olovku oko točke A za kut α, tako da pokazuje u novom smjeru duž stranice $\overline{AB}$, kao na sljedećoj slici.



Zatim zakrenimo olovku oko točke B za kut β, tako da pokazuje u novom smjeru duž stranice $\overline{BC}$, kao na sljedećoj slici.



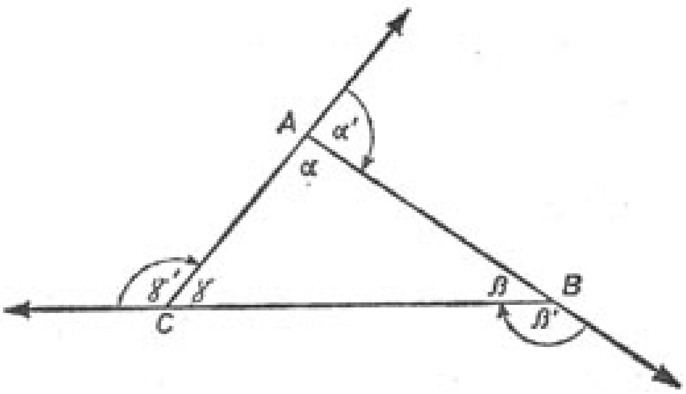
Zakrenimo olovku još jednom, sada oko točke C za kut γ, tako da pokazuje u novom smjeru duž stranice $\overline{AC}$, kao na sljedećoj slici:



Olovku smo zakrenuli tri puta. Najprije za kut α, zatim za kut β i na kraju za kut γ. Dakle, ukupna promjena smjera olovke je $\alpha + \beta + \gamma$. Usporedimo li početni smjer olovke s krajnjim, nalazimo da se razlikuju za 180°. Dakle,

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

Još je uvjerljivije sličan postupak provesti s vanjskim kutovima trokuta. Zakrenimo olovku, položenu na stranicu $\overline{CA}$, oko točke A za vanjski kut α', tako da padne na stranicu $\overline{AB}$. Zakrenimo je zatim oko točke B za vanjski kut β', tako da padne na stranicu $\overline{BC}$. Zakrenimo je na kraju oko točke C za vanjski kut γ', tako da opet padne na stranicu $\overline{CA}$ (vidi sliku).



Olovka je zakrenuta tri puta. Najprije za kut α', zatim za kut β' i na kraju za kut γ'. Dakle, ukupna promjena smjera olovke je $\alpha' + \beta' + \gamma'$. No olovka je od početnog do krajnjeg smjera napravila puni okret, dakle

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^\circ.$$

Uzmemo li u obzir da je

$$\alpha' = 180^\circ - \alpha, \qquad \beta' = 180^\circ - \beta \qquad \text{i} \qquad \gamma' = 180^\circ - \gamma,$$

nalazimo da vrijedi

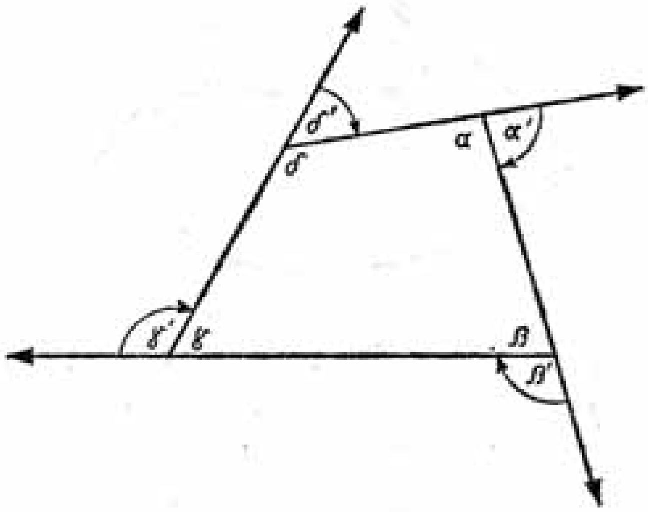
$$(180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta) + (180^\circ - \gamma) = 360^\circ, \text{ tj.}$$

$$540^\circ - (\alpha + \beta + \gamma) = 360^\circ,$$

odakle slijedi

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Prednost drugog postupka jest u tome da se njime s istom jednostavnošću može naći suma kutova bilo kojeg mnogokuta. Na primjer, sljedeća slika jasno pokazuje da je zbroj vanjskih kutova četverokuta 360°.



Dakle,

$$\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' = 360^\circ.$$

Uzmemo li u obzir da je

$$\alpha' = 180^\circ - \alpha, \quad \beta' = 180^\circ - \beta, \quad \gamma' = 180^\circ - \gamma \text{ i } \delta' = 180^\circ - \delta,$$

nalazimo da vrijedi

$$(180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta) + (180^\circ - \gamma) + (180^\circ - \delta) = 360^\circ$$

tj.

$$4 \cdot 180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 2 \cdot 180^\circ,$$

odakle slijedi

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = (4 - 2) \cdot 180^\circ = 360^\circ.$$

S učenicima možemo postupak ponoviti za peterokut (s kutovima $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$) i šesterokut (s kutovima $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$) i tako doći do rezultata

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = (5 - 2) \cdot 180^\circ = 540^\circ$$

odnosno

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = (6 - 2) \cdot 180^\circ = 720^\circ.$$

Tada će već mnogi naslutiti da je zbroj kutova u bilo kojem n-terokutu s kutovima $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = (n - 2) \cdot 180^\circ.$$

Odlični učenik moći će pratiti i opći dokaz tog rezultata:

$$\alpha_1' + \alpha_2' + \ldots + \alpha_n' = 360^\circ$$

$$\alpha_1' = 180^\circ - \alpha_1, \quad \alpha_2' = 180^\circ - \alpha_2, \ldots, \alpha_n' = 180^\circ - \alpha_n$$

Dakle,

$$(180^\circ - \alpha_1) + (180^\circ - \alpha_2) + \ldots + (180^\circ - \alpha_n) = 360^\circ \text{ tj.}$$

$$n \cdot 180^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) = 2 \cdot 180^\circ,$$

odakle slijedi

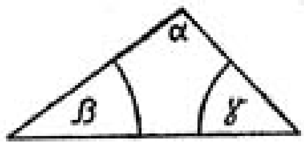
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = n \cdot 180^\circ - 2 \cdot 180^\circ = (n - 2) \cdot 180^\circ.$$

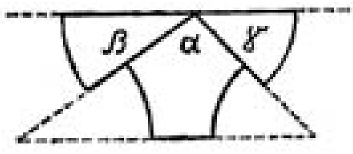
Ovakav pristup rješavanju problema zbroja kutova u trokutu spada u tzv. intuitivnu geometriju (ili kako ju je Hilbert nazivao „anshauliche Geometrie"), u kojoj se slobodno koristimo svim dostupnim geometrijskim intuicijama i znanjima.

Nasuprot tome, u okviru aksiomatske sistematizacije geometrije (npr. Euklidove ili Hilbertove) isti će se problem rješavati pozivom na što manji broj elementarnih pojmova, uz određeni broj do tada već definiranih pojmova odgovarajuće aksiomatizacije. Na primjer, u okviru spomenutih aksiomatskih sustava geometrije ravnine (Euklidovog i Hilbertovog), rotacija sigurno neće biti takav pojam, koliko god inače bila intuitivno prihvatljiva. Naravno, ideja aksiomatske sistematizacije određenog fonda matematičkih znanja teška je i većini učenika nedostupna, ponajprije stoga što je ograničavajuća. Učenik teško ili čak nikako ne prihvaća da se u razmatranju nekog problema ne smije koristiti svim svojim znanjima. Slobodnije kazano, njegovi su aksiomi sve ono što on zna (često i više od toga!), a nikako ne ono što su odredili Euklid, Hilbert ili njegov nastavnik. (Zbog toga često i studenti ne mogu razumjeti dokaze evidentnih činjenica, jer su one za njih aksiomi. Tko je svojim učenicima ili studentima pokušao dokazati da je $a + b = b + a$, ili da jednakokračni trokut ima dva jednaka kuta, ili da neprekinuta funkcija koja mijenja predznak ima nultočku, osjetio je taj problem.)

Kao dobar uvod u taj ograničavajući aspekt aksiomatiziranja, (a i dokazivanja, koje je u matematici često toga tipa, za razliku od dokazivanja u empirijskim znanostima, koje redovito dopušta upotrebu svih znanja) može poslužiti upravo problem zbroja kutova u trokutu. Naime, za usvajanje tog aspekta bitno je, osim rezultata koji se dokazuje, u fokus dovesti i sam dokaz i njegove osnovne karakteristike (što on pretpostavlja a što ne pretpostavlja, da li je lako uočiti sve njegove pretpostavke ili nije i sl.). Naravno, dovođenje u fokus samoga dokaza najlakše se postiže izvođenjem dvaju ili više (bitno) različitih dokaza istog rezultata.

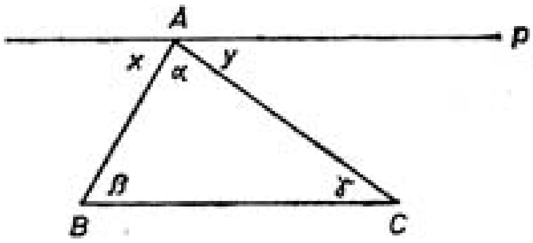
Na primjer, da je zbroj kutova u trokutu 180°, može se učeniku objasniti i na sljedeći način. Izrežimo iz trokuta ABC kutove β i γ i prislonimo ih uz kut α, kao na sljedećoj slici.





Prislonimo li ravnalo uz iscrtkanu liniju, možemo se uvjeriti da je ona pravac, tj. da je $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. To, naravno, nije dokaz da je zbroj kutova u trokutu 180°. Izrezivanje nikada nije sasvim precizno, pa kutovi možda ne prianjaju sasvim točno jedan uz drugoga. Zbroj se možda toliko malo razlikuje od 180° da to ne primjećujemo. Ipak, ovaj eksperiment jednoznačno upućuje na odgovarajući dokaz.

Neka je zadan bilo koji trokut ABC. Točkom A povucimo pravac p paralelan sa stranicom $\overline{BC}$ (vidi sliku).



Evidentno je, prema konstrukciji, da je

$$\alpha + x + y = 180°.$$

Pod pretpostavkom da znamo da je $\beta = x$ i $\gamma = y$, odmah slijedi

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

Naravno, učenici su već ranije naučili da su kutovi uz transverzalu jednaki (ili im se to predlaže kao evidentna činjenica; aksiom u školskoj sistematizaciji geometrije ravnine). Dakle, dokaz je proveden.

Prezentacijom dvaju dokaza iste tvrdnje, u žižu našeg interesa dolaze dokazi i njihove razlike. Odmah uviđamo da predloženi dokazi nemaju iste pretpostavke, što u prvi plan razumijevanja dokaza dovodi raslojenost svakog dokaza na njegove pretpostavke, određen broj međukoraka i konačni zaključak.

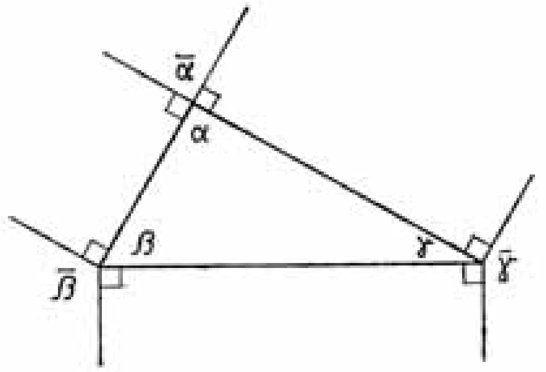
U prvom tipu dokaza, pretpostavljamo određena znanja o rotacijama i njihovom slaganju. Osim toga, pretpostavljamo da je poznato na koji način kut mjeri rotaciju, bilo da je kut uveden kao takva mjera, bilo da je to izvedeno svojstvo kuta. U drugom tipu dokaza, pretpostavljamo određena znanja o paralelama, kao i o jednakosti kutova uz transverzalu dvaju paralela.

Odlučiti se za jedan od ta dva dokaza znači odabrati jedne od tih pretpostavki kao prihvatljiva polazišta daljnjih razmatranja. To znači ograničiti se na te pretpostavke, a ne uzeti u obzir neke druge. Ili znanstvenije, to znači odlučiti se za jednu aksiomatizaciju (npr. Euklid—Hilbertovu), a ne za neku drugu (npr. transformacijsku). Razlozi za određeni odabir (koji znače i određena ograničenja) mogu biti različiti, i trebamo ih biti svjesni kada ga činimo. Na primjer, „rotacijski" dokaz intuitivno je prihvatljiviji početniku, ali je skopčan s određenim problemima, kao što je slaganje rotacija oko različitih središta, koje nije sasvim lako svesti na elementarne pretpostavke koje će ih razriješiti. „Paralelski" dokaz ima eksplicitno i jasno uočljive elementarne pretpostavke, no te su nešto apstraktnije. Njih upoznajemo matematičkim treningom, a ne, na primjer, konkretnim snalaženjem u prostoru.

No najvažnije je spoznati da dokazati znači, odabrati pretpostavke, ograničiti se na njih, te iz njih izvesti ono što se dokazuje. Krajnji rezultat takvih sistematskih odabira u određenom fondu matematičkih znanja jest aksiomatizacija tog fonda, npr. aksiomatizacija geometrije. I kao što se na razne načine može dokazati da je zbroj kutova u trokutu 180°, tako se isto (sistematskim grupiranjem raznih geometrijskih dokaza prema zajedničkim pretpostavkama kojima se koriste) na razne načine može aksiomatizirati geometrija.

I na kraju razmotrimo još jedan dokaz tvrdnje da je zbroj kutova u trokutu 180°, koji je zanimljiv zbog mogućih poopćenja. Vidjeli smo već da je „rotacijski" dokaz (s vanjskim kutovima) primjenljiv na proizvoljan n-terokut. Sljedeći dokaz bit će primjenljiv i u prostoru, a ne samo u ravnini.

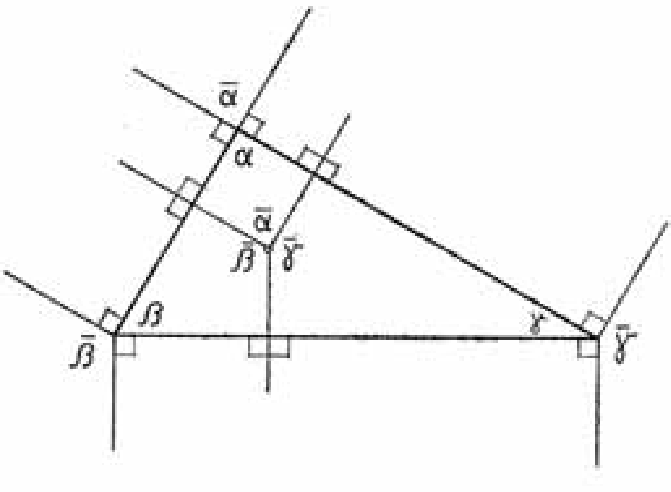
Za svaki kut trokuta ABC definiramo pridruženi mu **ortokut**, kao kut koji zatvaraju okomice na njegove krakove i koji je smješten izvan trokuta. Na sljedećoj slici nacrtan je trokut s kutovima α, β i γ i pridruženim im ortokutovima $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ i $\bar{\gamma}$.



Očigledno je

$$\bar{\alpha} = 180° - \alpha, \quad \bar{\beta} = 180° - \beta \quad \text{i} \quad \bar{\gamma} = 180° - \gamma.$$

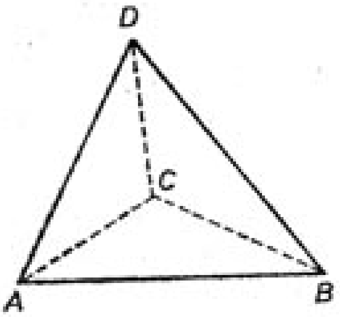
Translatiramo li krakove ortokutova $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ i $\bar{\gamma}$ do zajedničke točke (na slici unutar trokuta), po dva kraka okomita na zajedničku stranicu poklopit će se, pa ćemo dobiti tri kraka koji puni kut od 360° dijele na tri ortokuta $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ i $\bar{\gamma}$ (vidi sliku).



Dakle,

$$\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} = 360^\circ$$

$$(180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta) + (180^\circ - \gamma) = 360^\circ$$



tj.

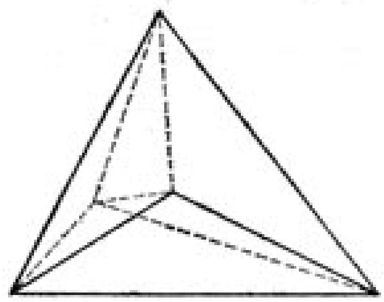
$$540^\circ - (\alpha + \beta + \gamma) = 360^\circ,$$

odakle odmah slijedi

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

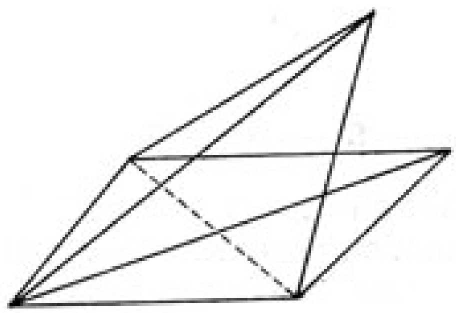
O kakvom je prostornom poopćenju riječ? Ono što je za ravninu trokut, najjednostavniji poligon, to je za prostor tetraedar, najjednostavniji poliedar.

Da li je zbroj prostornih kutova tetraedra konstantan, kao što je to zbroj (ravninskih) kutova trokuta? Nije! Pustimo li da se vrh tetraedra spušta prema točki suprotne mu stranice, vidimo da kut uz taj vrh teži prema 2π, dok ostali kutovi teže prema nuli (vidi sliku).



Dakle, zbroj kutova teži prema 2π, što znači da ima tetraedara u kojima je zbroj kutova blizu 2π.

Pustimo li da se vrh tetraedra spušta prema točki u ravnini suprotne stranice, ali izvan te stranice, vidimo da kut uz taj vrh teži prema nuli, dok ostali kutovi također teže prema nuli (vidi sliku).



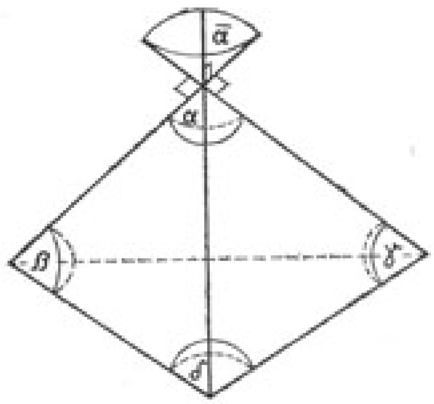
Dakle zbroj kutova teži prema 0, što znači da ima tetraedara u kojima je zbroj kutova blizu 0.

Dakle, zbroj kutova tetraedra sigurno nije konstantan (inače, lako se vidi da zbroj može primiti bilo koju vrijednost između 0 i 2π). Drugim riječima teorem o zbroju kutova ne može se u toj formi poopćiti na prostor. Međutim, teorem o zbroju ortokutova trokuta

$$\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} = 360^\circ$$

može se poopćiti na prostor. Prostorni ortokut $\bar{\alpha}$, prostornog kuta α, tetraedra $ABCD$, definiramo kao prostorni kut što ga čine kraci (izvan tetraedra) okomiti na strane koje zatvaraju kut α (vidi sliku).

Translatiramo li krakove ortokutova $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ i $\bar{\delta}$ do zajedničke točke, po tri kraka okomita na zajedničku stranicu poklopit će se, pa ćemo dobiti četiri kraka koja puni prostorni kut od 4π radijana dijele na četiri ortokuta $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ i $\bar{\delta}$. Dakle,



$$\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} + \bar{\delta} = 4\pi.$$

Željeno poopćenje ravninskog teorema o zbroju kutova glasi:

Zbroj ortokutova u svakom tetraedru jest 4π.

„Ortokutski" dokaz teorema o zbroju kutova u trokutu upućuje na onaj kriterij odabira dokaza, koji se u matematici najčešće koristi. Odabire se onaj dokaz koji je najlakše poopćiti. Po tom su kriteriju i „rotacijski" dokaz, koji se lako poopćuje na n-terokute, i „ortokutski" dokaz, koji se lako poopćuje na (prostorne) tetraedre, bolji od „paralelskog" dokaza.

No, važno je upozoriti na jednu zloupotrebu tog kriterija. Često se komplicirani dokazi, koje je moguće poopćiti, odabiru i onda kada se poopćenje ne provodi, iako je moguće odabrati jednostavniji dokaz, koji istina nije moguće poopćiti, ali je to sasvim nevažno kada ga već ne poopćujemo. To bi bilo kao da se netko u 6. razredu osnovne škole odluči za „ortokutski" dokaz, iako mu ne pada na pamet da razmatra tetraedre i njihove (prostorne) kutove. Takav slučaj na sreću nije poznat (možda samo zato što „ortokutski" dokaz nije poznat?), ali su zato udžbenici matematike puni takvih primjera u slučaju drugih matematičkih teorema. Najčešći je uzrok tome taj da pisac udžbenika poznaje samo jedan dokaz odgovarajućeg matematičkog teorema, pa niti nema mogućnost odabira. On najčešće dokaz preuzima iz nekog konteksta u kojem taj odabir ima smisla, i smješta ga u kontekst svojeg udžbenika u kojem taj odabir nema smisla. On često uopće nema svijest o tome da treba **odabrati,** a kamoli da bi razumio zašto odabire baš taj dokaz.

Ponovimo stoga još jednom, razlozi za određeni odabir dokaza (to znači i njihovih pretpostavki, a u krajnjoj liniji i aksiomatizacija u koje su oni prirodno smješteni) mogu biti, i najčešće jesu, različiti i trebamo ih biti svjesni kada ga činimo. Inače su naši odabiri slučajni, što ih čini međusobno neusklađenima, a na taj način skalupljene udžbenike pretvara u nesuvisle cjeline.