OD PISMENOG DIJELJENJA DO LAURENTOVIH I TAYLOROVIH RAZVOJA

Z. Šikic, Zagreb

Kako bismo 29 jabuka podijelili na 4 ucenika. Podjelu možemo poceti tako da svakom uceniku podijelimo po 5 jabuka. Time smo podijelili $5 \cdot 4 = 20$ jabuka, a za daljnju podjelu ostaje $29 - 20 = 9$ jabuka. To krace zapisujemo ovako:

$$\begin{array}{rl} 29 & : 4 = 5 \\ \underline{-\,20} & \\ 9 & \end{array}$$

Od preostalih 9 jabuka svakom uceniku možemo podijeliti po 2 jabuke. Time smo podijelili $2 \cdot 4 = 8$ jabuka, a ostalo ih je $9 - 8 = 1$. To dalje zapisujemo ovako:

$$\begin{array}{rl} 29 & : 4 = 5 + 2 = 7 \\ \underline{-\,20} & \\ 9 & \\ \underline{-\,8} & \\ 1 & \end{array}$$

Dakle, svaki je ucenik dobio 7 jabuka i 1 je ostala nepodijeljenja.

Ovakav postupak pismenog dijeljenja ima tri koraka koji se ciklicki ponavljaju.

1) Procjena kvocijenta. (U našem slucaju 5 odnosno 2.)
2) Množenje kojim se odreduje iznos koji je podijeljen. (U našem slucaju $5 \cdot 4 = 20$ odnosno $2 \cdot 4 = 8$.)
3) Oduzimanje kojim se odreduje iznos koji je preostao za daljnje dijeljenje. (U našem slucaju $29 - 20 - 9$ odnosno $9 - 8 = 1$.)

Postupak smatramo završenim kada je iznos koji je preostao za dijeljenje takav da ga više ne želimo dijeliti (ili zato što je 0 ili zato je je dovoljno malen ili zato što ga dalje ne znamo dijeliti ili iz nekog drugog razloga).

U dekadskom sustavu postupak se obicno provodi tako da procjene kvocijenata budu višekratnici dekadskih jedinica. Na primjer,

$$\begin{array}{rl} 797 & : 3 = 200 + 60 + 5 = 265 \\ \underline{-\,600} & \\ 197 & \\ \underline{-\,180} & \\ 17 & \\ \underline{-\,15} & \\ 2 & \end{array}$$

Obicno se to dijeljenje krace zapisuje ovako:

$$\begin{array}{l} 797 : 3 = 265 \\ \underline{-6} \\ 19 \\ \underline{-18} \\ 17 \\ \underline{-15} \\ 2 \end{array}$$

Oduzimanje se cesto obavlja napamet, pa se to isto dijeljenje još krace zapisuje ovako:

$$\begin{array}{l} 797 : 3 = 265 \\ 19 \\ 17 \\ 2 \end{array}$$

Dobro je znati da je to samo jedan od mnogih nacina da se podijeli 797 : 3. Razliciti nacini odgovaraju razlicitim procjenama kvocijenta tj. razlicitom izvodenju koraka 1). Evo jednog drugog nacina u kojem su ste procjene drukcije.

$$\begin{array}{l} 797 : 3 = 300 - 60 - 4 = 265 \\ \underline{-900} \\ -103 \\ \underline{+\ \ 90} \\ -\ \ 13 \\ \underline{+\ \ 12} \\ -\ 1 \end{array}$$

Naravno, postupak ne moramo završiti kada dodemo do ostatka 2 ili – 1. Postupak dijeljenja možemo i nastaviti. U dekadskom sustavu to se obicno radi tako da daljnje procjene kvocijenata budu višekratnici decimalnih jedinica 1/10, 1/100, 1/1000,… . Dakle,

$$\begin{array}{l} 797 : 3 = 200 + 60 + 5 + 6/10 + 6/100 + \ldots = 265.66\ldots \\ \underline{-600} \\ 197 \\ \underline{-180} \\ 17 \\ \underline{-15} \\ 2 \\ \underline{-1.8} \\ 0.2 \\ \underline{-0.18} \\ 0.02 \\ \ddots \end{array}$$

Obicno se to dijeljenje krace zapisuje ovako:

$$
\begin{array}{l}
797 : 3 = 265.66\ldots = 265.\overline{6} \\
\underline{-\,6} \\
\ 19 \\
\underline{-\,18} \\
\ \ \ 17 \\
\ \ \underline{-\,15} \\
\ \ \ \ \ 20 \\
\ \ \ \underline{-\,18} \\
\ \ \ \ \ \ \ 20 \\
\ \ \ \ \ \underline{-\,18} \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ 2 \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ddots
\end{array}
$$

Ako se oduzimanja obavljaju napamet, zapis je još kraci

$$
\begin{array}{l}
797 : 3 = 265.666\ldots = 265.\overline{6} \\
19 \\
\ \ 17 \\
\ \ \ \ 20 \\
\ \ \ \ \ \ 20 \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 20 \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ddots
\end{array}
$$

Opet je dobro biti svjestan da smo dijeljenje $797 : 3$ mogli završiti i na drugi nacin. Na primjer,

$$
\begin{array}{l}
797 : 3 = 200 + 60 + 5 + \dfrac{2}{3} = 265\dfrac{2}{3} \\
\underline{-\,600} \\
\ 197 \\
\underline{-\,180} \\
\ \ \ 17 \\
\ \ \underline{-\,15} \\
\ \ \ \ \ 2 \\
\ \ \ \underline{-\,2} \\
\ \ \ \ \ 0
\end{array}
$$

Polinome pismeno dijelimo na isti nacin na koji smo pismeno dijelili brojeve; dakle ciklicki ponavljajuci korake 1), 2) i 3). U srednjoškolskoj nastavi obicno se za procjene kvocijenta u koraku 1) koriste kvocijenti vodecih clanova polinoma koje dijelimo. Na primjer,

$$
\begin{array}{l}
\quad (x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 - 1) : (x^2 + x - 1) = x^3 - x \\
\underline{-(x^5 + x^4 - x^3)} \\
\qquad\qquad (-x^3 - x^2 - 1) \\
\qquad\quad \underline{-(-x^3 - x^2 + x)} \\
\qquad\qquad\qquad -x - 1
\end{array}
$$

U srednjoškolskoj nastavi postupak obicno završavamo kada dodemo do ostatka ciji je stupanj manji od stupnja djelitelja. Naravno, to nije nužno. Dapace, nastavimo li dijeliti dolazimo do matematicki veoma važnog Laurentovog razvoja. U ovom slucaju do razvoja racionalne funkcije $(x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 - 1)/(x^2 + x - 1)$ u Laurentov red.

$$
\begin{array}{l}
\quad (x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 - 1) : (x^2 + x - 1) = x^3 - x - x^{-1} - x^{-3} + x^{-4} - 2x^{-5} + \dots \\
\underline{-(x^5 + x^4 - x^3)} \\
\qquad\qquad (-x^3 - x^2 - 1) \\
\qquad\quad \underline{-(-x^3 - x^2 + x)} \\
\qquad\qquad\qquad (-x - 1) \\
\qquad\qquad\quad \underline{-(-x - 1 + x^{-1})} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad (-x^{-1}) \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-(-x^{-1} - x^{-2} + x^{-3})} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (x^{-2} + x^{-3}) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-(x^{-2} + x^{-3} - x^{-1})} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -2x^{-3} + x^{-4} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ddots
\end{array}
$$

Uocimo da pri takvom dijeljenju ostaci imaju (u apsolutnom iznosu) sve vece negativne eksponente. To znaci da ce za velike $|x|$ ostaci biti mali, tj. Laurentove aproksimacije bit ce dobre za velike $|x|$.

Naravno, odabirom drukcijih procjena kvocijenata dolazimo do drukcijih rezultata dijeljenja, tj. do drukcijih razvoja. Dobro je znati da postoje i takvi drukciji odabiri. Tako u koraku 1), kao procjene pri dijeljenju polinoma, možemo uzimati kvocijente njihovih clanova s najnižim eksponentima. Takve se procjene nikada ne koriste u srednjoškolskoj nastavi, iako su veoma važne buduci da vode k Taylorovim razvojima. U našem slucaju doci cemo do razvoja funkcije $(x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 - 1)/(x^2 + x - 1)$ u Taylorov red.

$$
\begin{array}{l}
(1 + x^2 + 2x^3 - x^4 - x^5) : (1 - x - x^2) = 1 + x + 3x^2 + 6x^3 + 8x^4 + 15x^5 + \dots \\
\underline{-(1 - x - x^2)} \\
\quad (x + 2x^2 + 2x^3 - x^4 - x^5) \\
\quad \underline{-(x - x^2 - x^3)} \\
\qquad (3x^2 + 3x^3 - x^4 - x^5) \\
\qquad \underline{-(3x^2 - 3x^3 - 3x^4)} \\
\qquad\qquad (6x^3 + 2x^4 - x^5) \\
\qquad\qquad \underline{-(6x^3 - 6x^4 - 6x^5)} \\
\qquad\qquad\qquad (8x^4 + 5x^5) \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-(8x^4 - 8x^5 - 8x^6)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 15x^5 + 8x^6 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ddots
\end{array}
$$

Primijetimo da pri takvom dijeljenju ostaci imaju sve vece eksponente. To znaci da ce za male $|x|$ ostaci biti mali, tj. Taylorove aproksimacije biti ce dobre za male $|x|$.

Na kraju ovoga puta od pismenog dijeljenja do Laurentovih i Taylorovih razvoja, pokažimo kako se obicnim dijeljenjem (koje je u tom slucaju razvijanje u Taylorov red) jednostavno može izvesti poznata formula za sumu geometrijskog reda:

$$
\begin{array}{ll}
\dfrac{1}{1-x} = & 1 : (1 - x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \\
& \underline{-(1 - x)} \\
& \qquad x \\
& \quad \underline{-(x - x^2)} \\
& \qquad\quad x^2 \\
& \qquad \underline{-(x^2 - x^3)} \\
& \qquad\qquad x^3 \\
& \qquad\quad \underline{-(x^3 - x^4)} \\
& \qquad\qquad\quad x^4 \\
& \qquad\qquad\qquad \ddots
\end{array}
$$