Od pismenoga dijeljenja do Laurentovih i Taylorovih razvoja

ZVONIMIR ŠIKIĆ, Zagreb

Kako 29 jabuka podijeliti na 4 učenika? Podjelu možemo početi tako da svakom učeniku damo po 5 jabuka. Time smo podijelili $5 \cdot 4 = 20$ jabuka, a za daljnju podjelu ostaje $29 - 20 = 9$ jabuka. To kraće zapisujemo ovako:

$$\begin{array}{rl} 29 & : 4 = 5 \\ \underline{-\,20} & \\ 9 & \end{array}$$

Od preostalih 9 jabuka svakom učeniku možemo dati po 2 jabuke. Time smo podijelili $2 \cdot 4 = 8$ jabuka, a ostalo ih je $9 - 8 = 1$. To dalje zapisujemo ovako:

$$\begin{array}{rl} 29 & : 4 = 5 + 2 = 7 \\ \underline{-\,20} & \\ 9 & \\ \underline{-\,8} & \\ 1 & \end{array}$$

Dakle, svaki je učenik dobio 7 jabuka i 1 je ostala nepodijeljenja.

Ovakav postupak pismenog dijeljenja ima tri koraka koji se ciklički ponavljaju.

1) Procjena kvocijenta. (U našem slučaju 5, odnosno 2.)

2) Množenje kojim se određuje iznos koji je podijeljen. (U našem slučaju $5 \cdot 4 = 20$, odnosno $2 \cdot 4 = 8$.)

3) Oduzimanje kojim se određuje iznos koji je preostao za daljnje dijeljenje. (U našem slučaju $29 - 20 = 9$ odnosno $9 - 8 = 1$.)

Postupak smatramo završenim kada je iznos koji je preostao za dijeljenje takav da ga više ne želimo dijeliti (ili zato što je 0 ili zato jer je dovoljno malen ili zato što ga dalje ne znamo dijeliti ili iz nekoga drugoga razloga).

U dekadskom sustavu postupak se obično provodi tako da procjene kvocijenata budu višekratnici dekadskih jedinica. Na primjer,

$$\begin{array}{rl}
797 & : 3 = 200 + 60 + 5 = 265\\
\underline{-\,600} & \\
197 & \\
\underline{-\,180} & \\
17 & \\
\underline{-\,15} & \\
2 &
\end{array}$$

Obično se to dijeljenje kraće zapisuje ovako:

$$\begin{array}{rl}
797 & : 3 = 265\\
\underline{-\,6} & \\
19 & \\
\underline{-\,18} & \\
17 & \\
\underline{-\,15} & \\
2 &
\end{array}$$

Oduzimanje se često obavlja napamet, pa se to isto dijeljenje još kraće zapisuje ovako:

$$\begin{array}{rl}
797 & : 3 = 265\\
19 & \\
17 & \\
2 &
\end{array}$$

Dobro je znati da je to samo jedan od mnogih načina da se podijeli 797 sa 3. Različiti načini odgovaraju različitim procjenama kvocijenta, tj. različitom izvođenju koraka 1). Evo jednoga drugoga načina u kojem su te procjene drukčije.

$$\begin{array}{rl}
797 & : 3 = 300 - 30 - 4 = 266\\
\underline{-\,900} & \\
-\,103 & \\
+\,\underline{90} & \\
-\,13 & \\
+\,\underline{12} & \\
-\,1 &
\end{array}$$

Naravno, postupak ne moramo završiti kada dođemo do ostatka 2 ili − 1. Postupak dijeljenja možemo i nastaviti. U dekadskom sustavu to se obično radi tako da daljnje procjene kvocijenata budu višekratnici decimalnih jedinica 1/10, 1/100, 1/1000,… . Dakle,

$$
\begin{array}{l}
797 : 3 = 200 + 60 + 5 + 6/10 + 6/100 + \ldots = 265.66\ldots \\
\underline{-\,600} \\
\;\;197 \\
\underline{-\,180} \\
\;\;\;\;17 \\
\;\;\underline{-\,15} \\
\;\;\;\;\;\;2 \\
\;\;\;\;\underline{-\,1.8} \\
\;\;\;\;\;\;0.2 \\
\;\;\;\;\underline{-\,0.18} \\
\;\;\;\;\;\;0.02 \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\ddots
\end{array}
$$

Obično se to dijeljenje kraće zapisuje ovako:

$$
\begin{array}{l}
797 : 3 = 265.66\ldots = 265.\overline{6} \\
\underline{-\,6} \\
\;\;19 \\
\underline{-\,18} \\
\;\;\;\;17 \\
\;\;\underline{-\,15} \\
\;\;\;\;\;\;20 \\
\;\;\;\underline{-\,18} \\
\;\;\;\;\;\;\;\;20 \\
\;\;\;\;\;\underline{-\,18} \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;2 \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\ddots
\end{array}
$$

Ako se oduzimanja obavljaju napamet, zapis je još kraći

$$
\begin{array}{l}
797 : 3 = 265.666\ldots = 265.\overline{6} \\
19 \\
\;\;17 \\
\;\;\;\;20 \\
\;\;\;\;\;\;20 \\
\;\;\;\;\;\;\;\;20 \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\ddots
\end{array}
$$

Opet je dobro biti svjestan da smo dijeljenje $797 : 3$ mogli završiti i na drugi način. Na primjer,

$$\begin{array}{r l}
797 & : 3 = 200 + 60 + 5 + \frac{2}{3} = 265\,\frac{2}{3} \\
\underline{-\,600} & \\
197 & \\
\underline{-\,180} & \\
17 & \\
\underline{-\,15} & \\
2 & \\
\underline{-\,2} & \\
0 &
\end{array}$$

Polinome pismeno dijelimo na isti način na koji smo pismeno dijelili brojeve; dakle ciklički ponavljajući korake 1), 2) i 3). U srednjoškolskoj nastavi obično se za procjene kvocijenta u koraku 1) koriste kvocijenti vodećih članova polinoma koji sudjeluju u dijeljenju. Na primjer,

$$\begin{array}{l}
(x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 - 1) : (x^2 + x - 1) = x^3 - x \\
\underline{-\,(x^5 + x^4 - x^3)} \\
\qquad (-\,x^3 - x^2 - 1) \\
\qquad \underline{-\,(-\,x^3 - x^2 + x)} \\
\qquad\qquad -\,x - 1
\end{array}$$

U srednjoškolskoj nastavi postupak obično završavamo kada dođemo do ostatka čiji je stupanj manji od stupnja djelitelja. Naravno, to nije nužno. Dapače, nastavimo li dijeliti dolazimo do matematički veoma važnog Laurentovog razvoja. U ovom slučaju do razvoja racionalne funkcije $(x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 - 1)/(x^2 + x - 1)$ u Laurentov red.

$$\begin{array}{l}
(x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 - 1) : (x^2 + x - 1) = x^3 - x - x^{-1} - x^{-3} + x^{-4} - 2x^{-5} + \ldots \\
\underline{-\,(x^5 + x^4 - x^3)} \\
\qquad (-\,x^3 - x^2 - 1) \\
\qquad \underline{-\,(-\,x^3 - x^2 + x)} \\
\qquad\qquad (-\,x - 1) \\
\qquad\qquad \underline{-\,(-\,x - 1 + x^{-1})} \\
\qquad\qquad\qquad (-\,x^{-1}) \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-\,(-\,x^{-1} - x^{-2} + x^{-3})} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad (x^{-2} - x^{-3}) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{-(x^{-2} + x^{-3} - x^{-4})} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -2x^{-3} + x^{-4} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ddots
\end{array}$$

Uočimo da pri takvom dijeljenju ostaci imaju (u apsolutnom iznosu) sve veće negativne eksponente. To znači da će za velike $|x|$ ostaci biti mali, tj. Laurentove aproksimacije bit će dobre za velike $|x|$.

Naravno, odabirom drukčijih procjena kvocijenata, dolazimo do drukčijih rezultata dijeljenja, tj. do drukčijih razvoja. Dobro je znati da postoje i takvi drukčiji odabiri. Tako u koraku 1), kao procjene pri dijeljenju polinoma, možemo uzimati kvocijente njihovih članova s najnižim eksponentima. Takve se procjene nikada ne koriste u srednjoškolskoj nastavi, iako su veoma važne budući da vode k Taylorovim razvojima. U našem slučaju doći ćemo do razvoja funkcije $(x^5+x^4-2x^3-x^2-1)/(x^2+x-1)$ u Taylorov red.

$$
\begin{array}{l}
\quad (1+x^2+2x^3-x^4-x^5) : (1-x-x^2) = 1+x+3x^2+6x^3+8x^4+13x^5+\ldots \\
\underline{-(1-x-x^2)} \\
\qquad (x+2x^2+2x^3-x^4-x^5) \\
\qquad \underline{-(x-x^2-x^3)} \\
\qquad\qquad (3x^2+3x^3-x^4-x^5) \\
\qquad\qquad \underline{-(3x^2-3x^3-3x^4)} \\
\qquad\qquad\qquad (6x^3+2x^4-x^5) \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-(6x^3-6x^4-6x^5)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad (8x^4+5x^5) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{-(8x^4-8x^5-8x^6)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 13x^5+8x^6 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ddots
\end{array}
$$

Primijetimo da pri takvom dijeljenju ostaci imaju sve veće eksponente. To znači da će za male $|x|$ ostaci biti mali, tj. Taylorove aproksimacije bit će dobre za male $|x|$.

Na kraju ovoga puta od pismenog dijeljenja do Laurentovih i Taylorovih razvoja, pokažimo kako se običnim dijeljenjem (koje je u tom slučaju razvijanje u Taylorov red) jednostavno može izvesti poznata formula za sumu geometrijskog reda:

$$
\begin{array}{l}
\frac{1}{1-x} = \quad 1 : (1-x) = 1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots \\
\qquad \underline{-(1-x)} \\
\qquad\qquad x \\
\qquad\qquad \underline{-(x-x^2)} \\
\qquad\qquad\qquad x^2 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-(x^2-x^3)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad x^3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{-(x^3-x^4)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x^4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ddots
\end{array}
$$