POLINOMSKE APROKSIMACIJE I TAYLOROVA FORMULA

Zvonimr ŠIKIĆ, Zagreb

Problem 1. Naći polinom P n-toga stupnja čije su vrijednosti u međusobno različitim točkama $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jednake vrijednostima funkcije f u tim točkama.

Teorem 1 (Lagrangeova formula). Postoji točno jedan polinom n-toga stupnja P čije su vrijednosti u međusobno različitim točkama $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jednake vrijednostima funkcije f u tim točkama:

$$(1) \qquad P(a_0) = f(a_0),\ P(a_1) = f(a_1), \ldots, P(a_n) = f(a_n).$$

Polinom P, koji zovemo Lagrangeovim polinomom funkcije f, jest oblika

$$(2) \qquad P(x) = f(a_0) L_0(x) + f(a_1) L_1(x) \times \ldots + f(a_n) L_n(x)$$

gdje je

$$L_k(x) = \frac{(x-a_0)\ldots(x-a_{k-1})(x-a_{k+1})\ldots(x-a_n)}{(a_k-a_0)\ldots(a_k-a_{k-1})(a_k-a_{k+1})\ldots(a_k-a_n)}$$

Dokaz. Najprije dokazujemo jedinstvenost polinoma (n-toga stupnja) P. Neka je, dakle, Q polinom n-toga stupnja takav da je

$$Q(a_0) = P(a_0) = f(a_0),\ Q(a_1) = P(a_1) = f(a_1), \ldots, Q(a_n) = P(a_n) = f(a_n).$$

Tada stupanj polinoma $R = P - Q$ nije veći od n, a osim toga je i

$$R(a_0) = R(a_1) = \ldots = R(a_n) = 0.$$

Dakle, stupanj polinoma R je manji od broja njegovih nultočaka. Odatle slijedi da je R identički jednak 0, tj. $P = Q$.

Polinom P koji ispunjava zahtjeve (1) vrlo je jednostavno naći upravo u obliku (2), jer se tada naš zadatak svodi na nalaženje polinoma $L_k(x)$ takvih da je

$$L_k(a_i) = \begin{cases} 0 \text{ za } i \neq k \\ 1 \text{ za } i = k \end{cases}$$

[Š] Šikić, Z.: Taylorova formula i dodiri višeg reda, Matematika (ovaj broj) Školska knjiga, Zagreb.

Lako se vidi da polinomi

$$L_k(x) = \frac{(x-a_0)\dots(x-a_{k-1})(x-a_{k+1})\dots(x-a_n)}{(a_k-a_0)\dots(a_k-a_{k-1})(a_k-a_{k+1})\dots(a_k-a_n)}$$

imaju tražena svojstva.

Q.E.D.

Problem 2. Naći polinom n-toga stupnja P, čije su vrijednosti u ekvidistantnim točkama a, $a+\Delta x$, . . . , $a+n\Delta x$ jednake vrijednostima funkcije f u tim točkama.

Ovaj posebni slučaj problema 1. dopušta nešto elegantnije rješenje, zahvaljujući **konstantnom** prirastu Δx (koji generira **ekvidistantni** sistem točaka). Označimo s Δf prirast funkcije f. Ovaj prirast ovisi o vrijednosti x, u kojoj promatramo prirast funkcije f, i prirastu nezavisne varijable Δx, koji izaziva prirast funkcije. Držimo li prirast Δx konstantim, bit će Δf funkcija jedne varijable x. Prirast funkcije Δf (uz konstantni Δx) ponovno je funkcija jedne varijable x, koju označavamo s $\Delta^2 f$, tj. $\Delta(\Delta f) = \Delta^2 f$. Isto je tako jasno da su (uz konstantni Δx) i sve funkcije $\Delta^{k+1} f = \Delta(\Delta^k f)$ funkcije jedne varijable x.

Formula

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta f(x) \tag{3}$$

pokazuje kako je moguće vrijednost funkcije f u točki $x+\Delta x$ izračunati iz vrijednosti funkcija f i Δf u početnoj točki x. Lema 1. poopćuje ovu formulu.

Lema 1. $f(x+k\Delta x) = \binom{k}{0} f(x) + \binom{k}{1} \Delta f(x) + \dots + \binom{k}{k} \Delta^k f(x)$ ili kraće $f(x+k\Delta x) = (1+\Delta)^k f(x)$.

Dokaz. Operator ∇ definiramo sa

$$\nabla f(x) = f(x+\Delta x) \qquad (\Delta x \text{ je konstanta}).$$

Budući da je

$$\nabla f(x) = f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta f(x) = (1+\Delta) f(x)$$

to je i

$$f(x+k\Delta x) = \nabla^k f(x) = (1+\Delta)^k f(x)$$

Q.E.D.

Problem 2. se prema lemi 1. svodi na nalaženje polinoma n-tog stupnja P takvog da je

$$P(a) = \binom{0}{0} f(a)$$

$$P(a+\Delta x) = \binom{1}{0} f(a) + \binom{1}{1} \Delta f(a)$$

$$(4) \qquad P(a + 2\,\Delta x) = \binom{2}{0} f(a) + \binom{2}{1} \Delta f(a) + \binom{2}{2} \Delta^2 f(a)$$

$$\vdots$$

$$P(a + n\,\Delta x) = \binom{n}{0} f(a) + \binom{n}{1} \Delta f(a) + \binom{n}{2} \Delta^2 f(a) + \ldots + \binom{n}{n} \Delta^n f(a)$$

Prema teoremu 1. proizlazi

$$(5) \qquad P(x) = f(a)\, L_0(x) + \left(\binom{1}{0} f(a) + \binom{1}{1} \Delta f(a)\right) L_1(x) + \ldots +$$

$$+ \left(\binom{n}{0} f(a) + \binom{n}{1} \Delta f(a) + \ldots + \binom{n}{n} \Delta^n f(a)\right) L_n(x)$$

tj.

$$(6) \qquad P(x) = f(a)\, N_0(x) + \Delta f(a)\, N_1(x) + \ldots + \Delta^n f(a)\, N_n(x),$$

gdje su polinomi $N_k(x)$ odgovarajuće linearne kombinacije polinoma $L_i(x)$ (za $i \leqslant k \leqslant n$). Međutim, polinom oblika (6) ispunjavat će uvjete (4) ako bude

$$N_0(x) = 1$$

$$N_1(x) = \frac{1}{\Delta x}(x - a)$$

$$(7) \qquad N_2(x) = \frac{1}{2!\,\Delta x^2}(x - a)(x - a - \Delta x)$$

$$\vdots$$

$$N_n(x) = \frac{1}{n!\,\Delta x^n}(x - a)(x - a - \Delta x) \ldots$$

$$(x - a - (n - 1)\,\Delta x)$$

(što se lako vidi uspoređivanjem oblika (6) s uvjetima (4)), tj. polinom

$$(8) \qquad P(x) = f(a) + (x - a)\frac{\Delta f(a)}{\Delta x} + \frac{(x - a)(x - a - \Delta x)}{2!}\frac{\Delta^2 f(a)}{\Delta x^2} +$$

$$+ \ldots + \frac{(x - a)(x - a - \Delta x) \ldots (x - a - (n - 1)\,\Delta x)}{n!}\frac{\Delta^n f(a)}{\Delta x^n}$$

rješenje je problema 2.

Vrijedi dakle sljedeći teorem:

Teorem 2 (Newtonova formula). Postoji točno jedan polinom n-tog stupnja P, čije su vrijednosti u točkama a, $a + \Delta x, \ldots, a + n\,\Delta x$ jednake vrijednostima funkcije f u tim točkama. Polinom P je oblika (8).

Napomena: Polinom P jednoznačno je određen (prema teoremu 1).

Polinom (8) zovemo n-tom Newtonovom $(a, \Delta x)$-aproksimacijom funkcije f.

Problem 3. Kakvu grešku činimo aproksimirajući funkciju f njenom n-tom Newtonovom $(a, \Delta x)$-aproskimacijom?

Teorem 3. Neka je $a = a_0$, $a + \Delta x = a_1, \dots, a + n\,\Delta x = a_n$ i neka je $f \in C^{n+1}$. Greška R koju činimo aproksimirajući funkciju f njenom n-tom Newtonovom $(a, \Delta x)$-aproksimacijom P je

$$R(x) = f(x) - P(x) = \frac{(x - a_0)(x - a_1)\dots(x - a_n)}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi) \tag{9}$$

za neki

$$\xi \in [\min\{a_0, \dots, a_n, x\}, \max\{a_0, \dots, a_n, x\}].$$

Dakle, vrijedi

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + (x - a)\frac{\Delta f(a)}{\Delta x} + \dots + \\ &+ \frac{(x-a)(x-a-\Delta x)\dots(x-a-(n-1)\,\Delta x)}{n!}\frac{\Delta^n f(a)}{\Delta x^n} + \\ &+ \frac{(x-a)(x-a-\Delta x)\dots(x-a-n\Delta x)}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi). \end{aligned} \tag{10}$$

Dokaz. Prema definiciji n-te Newtonove $(a, \Delta x)$-aproksimacije funkcije f

$$f(a_0) = P(a_0), \dots, f(a_n) = P(a_n),$$

tj.

$$R(a_0) = R(a_1) = \dots = R(a_n) = 0. \tag{11}$$

Nađimo funkciju F koja uz ove iste uvjete

$$F(a_0) = F(a_1) = \dots = F(a_n) = 0 \tag{12}$$

ispunjava i uvjet

$$F(x) = 0. \tag{13}$$

Očito je (prema (11)) da funkcija

$$F(z) = R(z) - (z - a_0)(z - a_1)\dots(z - a_n)\,H \tag{14}$$

uz ovaj odabir konstante H

$$H = \frac{R(x)}{(x - a_0)(x - a_1)\dots(x - a_n)} \tag{15}$$

ispunjava sve tražene uvjete (12) i (13).

Do dokaza teorema 3. doći ćemo vrlo jednostavnom primjenom leme 2.

Lema 2 (Poopćeni Rolleov teorem). Ako za funkciju F iz C^{n+1} vrijedi $F(a_0) = F(a_1) = \ldots = F(a_n) = F(x)$ onda postoji ξ iz intervala [min $\{a_0, \ldots, a_n, x\}$, $\{\max a_0, \ldots, a_n, x\}$] takav da je $F^{(n+1)}(\xi) = 0$.

Dokaz leme 2. Dokaz provodimo indukcijom. Za $n = 0$ radi se o Rolleovu teoremu. Razmotrimo sada slučaj $(n + 1)$-točke $(F(a_0) = \ldots = F(a_{n+1}) = F(x) = 0)$, pod pretpostavkom da teorem vrijedi za n točaka. Po pretpostavci postoji ξ_1 takav da je

$$(16) \qquad F^{(n+1)}(\xi_1) = 0 \text{ za } \xi_1 \in [\min\{a_0, \ldots, a_n, x\}, \{\max a_0, \ldots, a_n, x\}]$$

i ξ_2 takav da je

$$(17) \qquad F^{(n+1)}(\xi_2) = 0 \text{ za } 2_2 \in [\min\{a_0, \ldots, a_n, a_{n+1}\}, \max\{a_0, \ldots, a_n, a_{n+1}\}].$$

Po Rolleovu teoremu iz (16) i (17) proizlazi da postoji ξ takav da je

$$F^{(n+2)}(\xi) = 0 \text{ za } \xi \in [\min\{\xi_1, \xi_2\}, \max\{\xi_1, \xi_2\}]$$

odakle lako slijedi da je

$$\xi \in [\min\{a_0, \ldots, a_{n+1}, x\}, \max\{a_0, \ldots, a_{n+1}, x\}].$$

Q.E.D.

No sada iz (12) i (13), prema lemi 2. proizlazi da je

$$(18) \qquad F^{(n+1)}(\xi) = 0 \text{ za neki } \xi \in [\min\{a_0, \ldots, a_n, x\}, \max\{a_0, \ldots, a_n, x\}].$$

Uzmemo li u obzir da je $R(x) = f(x) - P(x)$ i da je $P(x)$ polinom n-toga stupnja, tada uzastopnim deriviranjem funkcije $F(z)$ iz (14) dobivamo

$$(19) \qquad F^{(n+1)}(z) = f^{(n+1)}(z) - (n+1)!\,H.$$

Iz (18) i (19) proizlazi

$$(20) \qquad H = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Iz (20) i (15) proizlazi (9). (10) proizlazi iz (9) i (8).

Q.E.D.

Problem 4. Što se dešava s n-tom Newtonovom $(a, \Delta x)$-aproksimacijom kada Δx ide prema nuli, tj. kada se $(n + 1)$ zajednička točka grafa funkcije f i grafa n-te Newtonove $(a, \Delta x)$-aproksimacije P stapaju u jednu jedinu „n-struku" točku a?

Newtonova n-ta $(a, \Delta x)$-aproksimacija funkcije f polinom je određen parametrima n, a, Δx i f, tj. $P(x) = P_{a,n,\Delta x,f}(x)$. Držimo li a, n i f konstantnim, problem 4. svodi se na nalaženje granične funkcije

$$O(x) = \lim_{\Delta x \to 0} P_{\Delta x}(x).$$

Teorem 4. Granična vrijednost n-te Newtonove $(a, \Delta x)$-aproksimacije funkcije f (označili smo je gore s $O(x)$) je n-ta oskulacijska aproksimacija funkcije f u točki a.

Napomena: Definiciju n-te oskulacijske aproksimacije funkcije f u točki a, kao i izvod njena oblika

(21) $$O_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

možete naći u [Š].

Dokaz. Uspoređujući oblik n-te oskulacijske aproksimacije funkcije f u točki a (vidi (21)) s oblikom n-te Newtonove $(a, \Delta x)$-aproksimacije funkcije f (vidi (8)) Jako uviđamo da teorem proizlazi iz jednakosti

(22) $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta^k f(a)}{\Delta x^k} = f^{(k)}(a).$$

Iednakost (22) dokazujemo indukcijom po k.

Za $k = 1$ jednakost (22) je definicija derivacije. Pretpostavimo da jednakost (22) vrijedi za k:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta^k f(x)}{\Delta x^k} = f^{(k)}(x),$$

tj.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta^k f(x)}{\Delta x^k}}{f^{(k)}(x)} = 1$$

što znači da je

(23) $$\frac{\Delta^k f(x)}{\Delta x^k} \underset{\Delta x \to 0}{\sim} f^{(k)}(x),$$

Uz tu pretpostavku možemo dokazati da jednakost (22) vrijedi i za $k+1$:

$$\lim_{\Delta x \to x} \frac{\Delta^{k+1} f(x)}{\Delta x^{k+1}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\left(\frac{\Delta^k f(x)}{\Delta x^k}\right)}{\Delta x} \overset{(23)}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\nabla f^{(k)}(x)}{\Delta x} = f^{(k+1)}(x).$$

Q.E.D.

Dodatak.

Iz jednakosti (23) proizlazi jedna zanimljiva kombinatorička formula. Naime,

$$f^{(k)}(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta^k f(a)}{\Delta x^k} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\nabla - 1)^k f(a)}{\Delta x^k} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\nabla^k f(a) - \binom{k}{1}\nabla^{k-1} f(a) + \binom{k}{2}\nabla^{k-2} f(a) - \ldots + (-1)^k \binom{k}{k}\nabla^{k-k} f(a)}{\Delta x^k} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+k\Delta x) - \binom{k}{1} f(a+(k-1)\Delta x) + \binom{k}{2} f(a+(k-2)\Delta x) - \ldots + (-1)^k \binom{k}{k} f(a)}{\Delta x^k}$$

nakon k primjena L'Hospitalovog pravila[1]

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k^k f^{(k)}(a+k\Delta x) - \binom{k}{1}(k-1)^k f^{(k)}(a+(k-1)\Delta x) + \binom{k}{2}(k-2)^k f^k(a+(k-2)\Delta x) - \ldots}{k!}$$

$$\frac{\ldots + ((-1)^k \binom{k}{k} 0}{} = f^{(k)}(a) \frac{\binom{k}{0} k^k - \binom{k}{1}(k-1)^k + \binom{k}{2}(k-2)^k - \ldots}{k!}$$

$$\frac{\ldots + (-1)^k \binom{k}{k} 0^k}{k!}$$

Dakle

$$(24) \quad k! = \binom{k}{0} k^k - \binom{k}{1}(k-1)^k + \binom{k}{2}(k-2)^k - \ldots + (-1)^k \binom{k}{k}(k-k)^k.$$

Obrnuto, formulu (24) možemo dokazati i direktno (služeći se npr. principom uključenja i isključenja) pa je potom iskoristiti za dokazivanje jednakosti (23). Time zaobilazimo upotrebu pojma $\underset{x\to 0}{\sim}$ u dokazu teorema 4 (što je poželjno) ali treba imati na umu da direktni dokaz formule (24) nije jednostavan (npr. zahtijeva poznavanje principa uključenja i isključenja).

Evo na kraju jednog dokaza formule (24) koji je našao P. Keglević (a koji ne zahtijeva poznavanje principa uključenja i isključenja):

Neka je

$$S_k^r = \binom{k}{0} k^r - \binom{k}{1}(k-1)^r + \binom{k}{2}(k-2)^r - \ldots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k-1} 1^r +$$

$$+ (-1)^k \binom{k}{k} 0^r,$$

tj.

$$S_k^r = k^r - \binom{k}{1}(k-1)^r + \ldots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k-1} 1^r$$

za

$$k, r \in N \cup \{0\}^2.$$

[1] Veći broj različitih teorema naziva se L' Hospitalovim pravilom. Mi mislimo na ovu verziju: ako su f i g iz $C^1[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ i $f(a) = g(a) = 0$ onda je $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (tj. ako postoji jedan limes onda postoji i drugi i jednaki su). U slučaju $g(x) = x^k$ dokaz je sasvim jednostavan.

[2] Uz konvenciju $0^0 = 1$.

Tada je

$$S_{k+1}^{r+1} = (k+1)^{r+1} - \binom{k+1}{1} k^{r+1} + - \ldots + (-1)^k \binom{k+1}{k} 1^{r+1} =$$

$$= (k+1)^{r+1} - \left[1 + \binom{k}{1}\right] k^{r+1} + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{2}\right] (k-1)^{r+1} - + \ldots +$$

$$+ (-1)^k \left[\binom{k}{k-1} + \binom{k}{k}\right] 1^{r+1} = (k+1)^{r+1} - k^{r+1} - \binom{k}{1} [k^{r+1} - (k-1)^{r+1}] +$$

$$+ - \ldots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} [2^{r+1} - 1^{r+1}] + (-1)^k \binom{k}{k} 1^{r+1} =$$

$$= (\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{i} [(k-i+1)^{r+1} - (k-i)^{r+1}]) + (-1)^k \binom{k}{k}.$$

Kako je prema binomnom teoremu

$$(k-i+1)^{r+1} = (k-i)^{r+1} + \binom{r+1}{1} (k-1)^r + \ldots + \binom{r+1}{r+1} (k-1)^\circ,$$

to je

$$(k-i+1)^{r+1} - (k-i)^{r+1} = \binom{r+1}{1} (k-i)^r + \ldots + \binom{r+1}{r+1} (k-i)^\circ =$$

$$= \sum_{j=1}^{r+1} \binom{r+1}{j} (k-i)^{r+1-j}.$$

Stoga je

$$S_{r+1}^{r+1} = (\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{i} \sum_{j=1}^{r+1} \binom{r+1}{j} (k-i)^{r+1-j}) + (-1)^k \binom{k}{k} =$$

$$= (\sum_{j=1}^{r+1} \binom{r+1}{j} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^{r+1-j}) + (-1)^k \binom{k}{k} =$$

$$= \binom{r+1}{1} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^r + \binom{r+1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^{r-1} + \ldots$$

$$\ldots + \binom{r+1}{r+1} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{i} + (-1)^k \binom{k}{k} =$$

$$= \binom{r+1}{1} S_k^r + \binom{r+1}{2} S_k^{r-1} + \ldots + \binom{r+1}{r+1} S_k^0.$$

Vrijedi, dakle

$$S_{k+1}^{r+1} = \sum_{j=1}^{r+1} \binom{r+1}{j} S_k^{r+1-j}. \tag{25}$$

No iz (25) indukcijom po k proizlazi

$$S_k^r = \begin{cases} 0 & \text{za} \quad r < k \\ k! & \text{za} \quad r = k \end{cases}. \tag{26}$$

Naime, za $k = 1$ je prema definiciji

$$S_1^1 = \binom{1}{0} 1^1 = 1! \qquad \text{i} \qquad S_1^0 = \binom{1}{0} - \binom{1}{1} = 0. \tag{27}$$

Korak indukcije proizlazi iz (25): Za $r < k$ je $r + 1 < k + 1$, a kako su tada svi S_k^{r+1-j} jednaki nuli, to je i $S_{k+1}^{r+1} = 0$. Ako je $r = k$ je onda je

$$S_{k+1}^{r+1} = S_{k+1}^{k+1} = \binom{k+1}{1} S_k^k = (k + 1)\, S_k^k (= (k + 1)!.$$

Time je dokazana formula (24), jer njome se baš tvrdi da je $S_k^k = k!$.