

PRINCIP PERMANENCIJE I EULEROVA FORMULA

ZVONIMIR ŠIKIĆ, Zagreb

Najjednostavnije brojke kao „jedan”, „dva” i „tri” (katkada i „četiri”) pripadaju u većini jezika gramatičkoj kategoriji pridjeva (dekliniraju se). One ipak pobliže ne označavaju imenovane stvari na način ostalih pridjeva. Kada kažemo da dva velika stabla rastu ispred neke kuće, tada ukazujemo na to da je svako od tih stabala veliko, a ne i na to da je svako od njih dva. Mogli bismo smatrati da brojke pobliže označavaju skupine stvari (a ne same stvari), iako to nije u skladu s njihovom gramatičkom upotrebom (iskaz „skup stabala što raste ispred ove kuće je dva” nije gramatički korektan). Ali to ne odgovara čak ni njihovoj matematičkoj upotrebi. Tu se one najčešće upotrebljavaju kao imenice: Dva je veći od jedan; Šest je najmanji savršeni broj. Gotovo je sigurno da se takva upotreba ne javlja prije pojave aritmetike, kojom brojevi postaju predmetom matematičkog znanja, a brojke njihovim imenima.

Koji su brojevi predmet toga znanja? Prirodni brojevi, koji određuju koliko je pojedinih članova neke skupine (koliko jedinica ima ova skupina), ali i racionalni brojevi (čija su imena razlomci), koji mjere odnos dviju cjelina nekom zajedničkom (po volji i mogućnosti odabranom) mjerom (nekom jedinicom iste vrste), kao odnos prirodnog broja mjernih jedinica što čine jednu cjelinu i prirodnog broja mjernih jedinica što čine drugu. Većina jezika poznaje najjednostavnije brojke, koje su imena najjednostavnijih racionalnih brojeva, kao što su „polovina”, „trećina” i „četvrtina”.

Ali oznake kao što su „ -1 ”, „ $\sqrt{2}$ ” i „ $\sqrt{-1}$ ” samo matematika, i to novija, smatra brojkama. Takva njihova upotreba povezana je s razvojem aritmetike i izvan tog konteksta ne može se razumjeti. I dok se $\sqrt{2}$ još može smatrati *mjerom* jedne kontinuirane *veličine*, pa je u tom smislu broj, -1 i $\sqrt{-1}$ teško da mjere ikoju veličinu (a još manje izbrajaju količinu). U kojem su dakle smislu -1 i $\sqrt{-1}$ brojevi? Očito je da brojke toga višeg tipa ne možemo upotrebljavati na isti način kao obične brojke „ 1 ”, „ $\frac{3}{2}$ ” ili čak „ $\sqrt{2}$ ”. Nema smisla kazati da se

ispred kuće nalazi -1 stablo, a još manje da je tamo $\sqrt{-1}$ stabala. Isto tako ne možemo reći da je $\sqrt{-1}$ duljina neke dužine, ili da je to -1 . Zašto onda uvodeći cijele i kompleksne „brojeve” i dalje govorimo o brojevima? Izgleda da je proširenje pojma broja (od prirodnog do kompleksnog) zapravo jedno proširenje upotrebe riječi „broj” na entitete raznih vrsta, i da se ono opravdava samo **moć-**

nošću računanja sa znakovima koji te entitete označuju, prema pravilima koja vrijede za računanje sa stvarnim brojkama:

$$\begin{array}{lll}
 a + b = b + a & a \cdot b = b \cdot a & \text{pravila komutacije} \\
 (a + b) + c = a + (b + c) & (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) & \text{pravila asocijacije} \\
 a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c & & \text{pravilo distribucije}
 \end{array}$$

Sistem brojeva, u tom proširenom smislu, skup je entiteta koji se pokorava tim zakonima, uz prikladne definicije zbrajanja i množenja. Posljednja kvalifikacija je značajna jer se pojam zbrajanja i množenja koji je podoban prirodnim brojevima ne može prenijeti na brojeve drugog tipa. Na primjer, množenje cijelih brojeva ne možemo shvatiti kao uzastopno ponavljanje operacije zbrajanja (jer što je to „negativno uzastopno ponavljanje“). Ipak množenje cijelih brojeva **moramo** definirati prema ovim pravilima:

$$\begin{array}{ll}
 (+a) \cdot (+b) = +(a \cdot b) & (+a) \cdot (-b) = -(a \cdot b) \\
 (-a) \cdot (+b) = -(a \cdot b) & (-a) \cdot (-b) = +(a \cdot b),
 \end{array}$$

gdje su vrijednosti varijabli a i b prirodni brojevi, a množenje na desnim stranama množenje prirodnih brojeva. Naime, samo će takvo proširenje biti prikladno, tj. samo uz takvo proširenje bit će sačuvana navedene pravila računanja. Na primjer:

$$\begin{aligned}
 a \cdot (-b) \text{ mora biti } -(a \cdot b) \text{ jer} \\
 a \cdot b + a \cdot (-b) &= (\text{ako je sačuvano pravilo distribucije}) = \\
 &= a \cdot (b + (-b)) = (\text{po definiciji od } -b) = a \cdot 0 = 0,
 \end{aligned}$$

dok je, s druge strane,

$$\begin{aligned}
 a \cdot b + (- (a \cdot b)) &= 0, \text{ dakle} \\
 a \cdot (-b) &= - (a \cdot b).
 \end{aligned}$$

Može se reći da je ^{to} uvođenja kompleksnih brojeva (uključujući i to uvođenje) takav razvoj bio nesvjestan u tom smislu što su matematičari proširivali upotrebu riječi „broj“ ne shvaćajući točno što čine. Oni su bez sumnje bili vođeni onim što je G. Peacock 1833. (u [P]) nazvao „principom permanencije ekvivalentnih formi“, tj. htijenjem da se zadrže navedena opća algebarska pravila i u proširenim računima; ali su ujedno smatrali da su radi rješavanja problema, koji su se nametnuli na jednom stupnju razvoja, prisiljeni prihvatiti nove formulacije na slijedećem stupnju razvoja, a nisu algebru razmatrali apstrahirajući konkretne račune, ili je pak razvijali iznalaženjem novih računa, kojima se proširuje područje važenja općih pravila do krajnjih granica. U 19. stoljeću situacija se mijenja. Prije svega priličan broj značajnih matematičara počinje misliti o algebri na apstraktan način. Već smo spomenuli Peacocka, a bilo je i drugih. D. F. Gregory napisao je 1838. članak „O stvarnoj prirodi simbolicke algebre“, ([G]); De Morgan je između 1839. i 1844. napisao seriju članaka o „Zaštivanju algebre“ ([M]). Bilo je međutim i pokušaja da se iznađu novi računi. H. Grassmann stvara 1884. svoje djelo „Ausdehnungslehre“ ([Gr]), kojim pokušava realizirati Leibnizov projekt geometrijskog računa. Od 1844. i dalje, kada je objavio svoj prvi rad o kvaternionima, W.

R. Hamilton (iz Dublina) posvetio je velik dio svoje energije dovršenju nove algebre hiperkompleksnih brojeva. Treba dakako upozoriti na to da Hamilton nije krenuo ni iz čega. Njegovi su naponi potaknuti željom da izgradi račun, koji će za gibanja u trodimenzionalnom prostoru učiniti ono što su kompleksni brojevi učinili tako uspješno za gibanja u ravnini. Kao što su kompleksni brojevi izrazivi u obliku $a + b \cdot i$ (gdje su a i b realni brojevi, a i pokratak za „broj“ $\sqrt{-1}$ koji predstavlja rotaciju ravnine) tako ~~da~~ su i njegovi kvaternioni izrazivi u obliku $a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k$, gdje i , j i k predstavljaju rotacije u tri međusobno okomite ravnine. Ali za razliku od kompleksnih brojeva njegov se sistem ne pokorava osnovnim algebarskim pravilima. Da bi zadržao ostala pravila, morao je odbaciti komutativnost množenja. Zbog toga kvaternion ~~ne~~ držimo uvijek brojevima. Isto se može reći i o drugim prijedlozima, npr. matricama, koje katkada možemo smatrati proširenjem pojma broja, preko područja kompleksnih brojeva. Poznato je da nema takvog proširenja kojim se ne bi žrtvovalo bar jedno od pravila koja određuju značenje riječi „broj“ u matematici. To ne znači da je glupo govoriti o hiperkompleksnim brojevima, nego samo to da je takva upotreba opravdana tek djelomičnom analogijom.

Sve što je do sada kazano standardno je tumačenje¹ proširenja pojma broja (slično se npr. može naći u [K]).

Međutim, nama je stalo do toga da te jednostavne ideje primijenimo i na operaciju potenciranja, te da tako ispitamo može li se pomoću njih doći do glasovite Eulerove formule

$$e^{i\omega} = \cos \omega + i \sin \omega,$$

koja daje značenje potenciji realnog broja imaginarnim eksponentom. Dakle, kao što zbrajanje i množenje brojeva treba da se pokorava prije navedenim općim algebarskim pravilima (a da bismo ga zvali zbrajanjem i množenjem brojeva), tako i potenciranje brojeva treba da se pokorava općim pravilima za potenciranje stvarnih (prirodnih) brojeva:

$$a^{b+c} = a^b \cdot a^c \quad (a^b)^c = a^{b \cdot c} \quad (a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c,$$

Zbog toga zahtjeva na primjer

2^{-2} mora biti $\frac{1}{2^2}$, jer

$$2^2 \cdot 2^{-2} = (\text{ako je prijelazom na racionalne brojeve sačuvano prvo pravilo}) = 2^{2+(-2)} = 2^0 = 1$$

dok je s druge strane (po definiciji recipročne vrijednosti)

$$2^2 \cdot \frac{1}{2^2} = 1, \text{ dakle } 2^{-2} = \frac{1}{2^2}.$$

Slično, $2^{3/2}$ mora biti $\sqrt{2^3}$ jer

$$(2^{3/2})^2 = (\text{ako je prijelazom na racionalne brojeve sačuvano drugo pravilo}) = 2^{3/2 \cdot 2} = 2^3,$$

¹ Da je to tumačenje standardno, znači samo to što ga prihvataju svi oni koji su se ozbiljnije pozabavili tim problemom; ne i to da je ono među matematičarima široko rasprostranjeno i poznato.

dok je s druge strane (po definiciji operacije $\sqrt{\quad}$)

$$(\sqrt{2^3})^2 = 2^3, \text{ dakle } 2^{3/2} = \sqrt{2^3}.$$

Mora li iz istih razloga $e^{i\omega}$ biti $\cos \omega + i \sin \omega$? Je li Eulerova formula nužna posljedica Peacockova principa permanencije ekvivalentnih formi? To je naše pitanje.

Svaki kompleksni broj z može se (algebarski) prikazati kao $z = x + iy$, gdje su x i y realni brojevi. Lako je pokazati da su slijedeće definicije zbrajanja i množenja jedine prikladne definicije zbrajanja i množenja u kompleksnom području, tj. jedino uz te definicije ostaju i u kompleksnom području sačuvani osnovni zakoni računanja (komutativnost, asocijativnost i distributivnost). Evo tih definicija:

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2).$$

Pretpostavit ćemo da je čitaocu poznat tzv. geometrijski oblik kompleksnog broja

$$z = r(\cos l + i \sin l),$$

koji je s odgovarajućim algebarskim oblikom

$$z = x + iy$$

vezan ovim relacijama:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos l$$

(r i l zovemo modulom odnosno argumentom kompleksnog broja z).

Množenje kompleksnih brojeva prikazanih u geometrijskom obliku vrlo je jednostavno:

$$\begin{aligned} r_1(\cos l_1 + i \sin l_1) \cdot r_2(\cos l_2 + i \sin l_2) &= \\ &= r_1 r_2 (\cos(l_1 + l_2) + i \sin(l_1 + l_2)). \end{aligned}$$

Odavde slijedi da se kompleksni broj potencira prirodnim brojem prema De Moivreovoj formuli

$$(r(\cos l + i \sin l))^n = r^n (\cos nl + i \sin nl).$$

Smatramo da su te činjenice čitaocu poznate.

Pitanje je: Na kakvu nas definiciju potenciranja realnog broja imaginarnim eksponentom sili princip permanencije, tj. određuje li, i u kojoj mjeri, princip permanencije značenje izraza $a^{i\omega}$?

Prije nego počnemo tražiti odgovor na to pitanje uočimo jednu činjenicu. Kompleksni brojevi nastaju proširenjem realnog brojnog područja novim elementom i (čije je definiciono svojstvo $i^2 = -1$) i svim elementima koji se dobivaju kombiniranjem toga novog elementa sa starim elementima, upotrebom osnovnih računskih operacija $+$ i \cdot . Već smo kazali da su svi ti elementi oblika $x + iy$ (npr. element $x_1 + x_2i + x_3i^2 + x_4i^3$ je, zbog $i^2 = -1$, u stvari $(x_1 - x_3) + (x_2 - x_4)i$). S obzirom na osnovne računске operacije (zapravo s obzirom na množenje) element $-i$ udovoljava osnovnom definicionom svojstvu elementa i , tj. $(-i)^2 =$

$= -1$. Dakle, ako je rezultat određenog računa sa i , označimo ga s $R(i)$, jednak $x + iy$, tj.

$$R(i) = x + iy,$$

tada će rezultat istog računa s $-i$ biti

$$R(-i) = x - iy.$$

Želja nam je da potenciranje $a^{i\omega}$ uvedemo u okviru područja kompleksnih brojeva, područja koje je određeno osnovnim računskim operacijama (kao podčje elemenata $x + iy$, gdje su x i y realni brojevi). Mi ne želimo (ako je moguće) uvoditi nove elemente kao rezultate potenciranja $a^{i\omega}$. Dakle, hoćemo da bude

$$a^{i\omega} = x + iy \quad (1).$$

a zadaća nam je vidjeti određuje li princip permanencije x i y u ovisnosti o a i ω

Nadalje, $a^{i\omega}$ smatramo računskom operacijom u kompleksnom području (opet jedna vrsta principa permanencije), stoga mora biti

$$a^{-i\omega} = x - iy \quad (2)$$

Množenjem izraza (1) i (2) dobivamo

$a^{i\omega} \cdot a^{-i\omega} =$ (prema principu permanencije i dalje treba da vrijedi pravilo za umnožak potencija) $= a^{i\omega - i\omega} = a^0 = 1 = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2$.

Dakle, modul broja $a^{i\omega}$ je 1, tj.

$$a^{i\omega} = \cos l + i \sin l.$$

Ostaje da se nađe argument l , koji ovisi o a i ω , tj. da se nađe funkcija $l(a, \omega)$.
Određuje li princip permanencije funkciju $l(a, \omega)$?

Dokazat ćemo dvije tvrdnje koje daju odgovor na to pitanje.

1. Funkcija $l(a, \omega)$ je linearna u drugom argumentu:

$$l(a, m\omega) = ml(a, \omega).$$

Naime,

$\cos l(a, m\omega) + i \sin l(a, m\omega) = a^{im\omega} =$ (prema principu permanencije) $=$
 $= (a^{i\omega})^m = (\cos l(a, \omega) + i \sin l(a, \omega))^m = \cos ml(a, \omega) + i \sin ml(a, \omega)$, tj

$$l(a, m\omega) = ml(a, \omega).$$

2. Funkcija $l(a, \omega)$ je linearna u logaritmu prvog argumenta, tj.

$$l(a^m, \omega) = ml(a, \omega).$$

Naime,

$\cos l(a^m, \omega) + i \sin l(a^m, \omega) = (a^m)^{i\omega} =$ (prema principu permanencije) $=$
 $= a^{im\omega} =$ (prema principu permanencije) $= (a^{i\omega})^m = (\cos l(a, \omega) +$
 $+ i \sin l(a, \omega))^m = \cos ml(a, \omega) + i \sin ml(a, \omega)$ tj.

$$l(a^m, \omega) = ml(a, \omega).$$

Svojstva 1. i 2. određuju funkciju $l(a, \omega)$ „do konstante”:

Prema 1. funkcija $l(a, \omega)$ je linearna u drugom argumentu, tj.

$$l(a, \omega) = k(a) \cdot \omega, \quad (3)$$

gdje je $k(a)$ za sada nepoznata funkcija prvog argumenta.

Prema 2. funkcija $l(a, \omega)$ je linearna u logaritmu prvog argumenta, tj.

$$l(a, \omega) = \log a \cdot h(\omega)^2, \quad (4)$$

gdje je $h(\omega)$ za sada nepoznata funkcija drugog argumenta.

Iz (3) i (4) slijedi

$$k(a) \cdot \omega = h(\omega) \cdot \log a, \text{ tj.}$$

$$\frac{k(a)}{\log a} = \frac{h(\omega)}{\omega} \text{ za svako } a \text{ i } \omega, \text{ tj.}$$

$$\frac{k(a)}{\log a} = \frac{h(\omega)}{\omega} = \text{'const.} = c,$$

odakle uvrštavanjem u (3) ili (4) dobivamo

$$l(a, \omega) = c \cdot \omega \cdot \log a \quad (5)$$

ili ekvivalentno

$$l(a, \omega) = \omega \cdot \log a, \quad (6)$$

gdje se logaritmiraju po nekoj drugoj bazi, koja je i tako neodređena (vidi podlistak 3)).

2 Zaključimo. Princip permanencije sili nas na slijedeću definiciju:

$$a^{i\omega} = \cos(\omega \cdot \log a) + i \sin(\omega \cdot \log a), \quad (7)$$

u kojoj je baza logaritmiranja neodređena, tj. svakom izboru baze odgovara jedna definicija potencije. Lako je provjeriti da su tom definicijom (ili bolje svakom od tih definicija) sačuvani osnovni zakoni potenciranja. (Preporučamo čitatelju da to sam provjeri.)

Još jedno pitanje ostaje otvoreno. Za svaki odabir baze logaritmiranja u (7) dobivamo definiciju potenciranja koja je usklađena s principom permanencije. Posebno, za svaki odabir baze dobivamo formulu za $e^{i\omega}$, koja je usklađena s principom permanencije:

$$e^{i\omega} = \cos(\omega \log e) + i \sin(\omega \log e).$$

Čitatelj možda pomišlja na to da bi proširenje operacije potenciranja na kompleksne baze i kompleksne eksponente (u skladu s principom permanencije) dovelo do te odluke. To međutim nije točno. Želimo li definirati z_1^z u skladu s principom permanencije, prisiljeni smo postupiti na slijedeći način:

Ako je geometrijski oblik broja z_1

$$z_1 = \rho (\cos l + i \sin l),$$

a algebarski oblik broja z_2

$$z_2 = x + iy,$$

tada je

$$\begin{aligned} z_1^z &= (\rho (\cos l + i \sin l))^{(x+iy)} = (\text{prema principu permanencije})^3 \\ &= \rho^{x+iy} (\cos l + i \sin l)^{x+iy} = (\text{prema principu permanencije}) \\ &= \rho^x \rho^{iy} (\cos l + i \sin l)^x (\cos l + i \sin l)^{iy}. \end{aligned}$$

³ Baza logaritmiranja nije određena. Izraz (4) valjan je uz odabir bilo koje baze.

Prvi faktor je definiran u realnom brojnem području. Definiciju drugog faktora već smo našli. Treći faktor mora prema De Moivreovoj formuli (uz očuvanje neprekinutosti potenciranja) biti oblika $\cos xl + i \sin xl$.

Nedostaje definicija četvrtog faktora. Evo je:

$$(\cos l + i \sin l)^{ly} = \left(\cos \left(\frac{l}{\log a} \log a \right) + i \sin \left(\frac{l}{\log a} \log a \right) \right)^{ly} = (\text{prema definiciji potencije realnog broja imaginarnim eksponentom}) = (a^{l \cdot l / \log a})^{ly} = (\text{prema principu permanencije}) = a^{-ly / \log a}.$$

Lako se vidi da ta definicija ne ovisi o izboru realnog broja a jer je u realnom brojnem području

$$a^{-ly / \log a} b^{\frac{a}{b}} = B^{-ly} = b^{-ly / \log_B b}.$$

Definicija do koje smo došli

$$(\varrho (\cos l + i \sin l))^{x+iy} = \varrho^x \cdot B^{-ly} (\cos (xl + y \log_B \varrho) + i \sin (xl + y \log_B \varrho))$$

usklađena je s principom permanencije (što čitatelj može lako provjeriti), a u njoj je baza logaritmiranja B i dalje neodređena, tj. za svaki odabir baze B dobivamo definiciju usklađenu s principom permanencije.

Dakle, princip permanencije određuje definiciju potenciranja u kompleksnom području „do konstante B„. Odabir $B = e$ ne nameće se principom permanencije. Njegovo je porijeklo drugdje. Gdje?

1. Formula $e^{i\omega} = \cos \omega + i \sin \omega$ najčešće se opravdava ovako:

Razvoj funkcije e^{ω} u Taylorov red je

$$e^{\omega} = 1 + \frac{\omega}{1!} + \frac{\omega^2}{2!} + \frac{\omega^3}{3!} + \frac{\omega^4}{4!} + \dots,$$

stoga je razumno definirati

$$e^{i\omega} = 1 + \frac{i\omega}{1!} + \frac{(i\omega)^2}{2!} + \frac{(i\omega)^3}{3!} + \frac{(i\omega)^4}{4!} + \dots$$

(očito se iza riječi „stoga je razumno“ krije neka vrsta principa permanencije ekvivalentnih **beskonačnih** formi).

Međutim, razvoj funkcija $\cos \omega$ i $\sin \omega$ su

$$\cos \omega = 1 - \frac{\omega^2}{2!} + \frac{\omega^4}{4!} - \dots$$

$$\sin \omega = \frac{\omega}{1!} - \frac{\omega^3}{3!} + \frac{\omega^5}{5!} - \dots,$$

odakle sumiranjem redova jednostavno slijedi

$$e^{i\omega} = \cos \omega + i \sin \omega.$$

³ Čitatelj će uočiti da se tek sada koristimo očuvanjem „trećeg pravila za potenciranje, $(ab)^c = a^c b^c$.

2. Eulerov izvorni pristup primjenjuje se na drugi način, istim principom:

$$\begin{aligned}\cos \omega + i \sin \omega &= (\text{De Moivre}) = \left(\cos \frac{\omega}{n} + i \sin \frac{\omega}{n} \right)^n = \\ &= \cos^n \frac{\omega}{n} \left(1 + i \operatorname{tg} \frac{\omega}{n} \right)^n.\end{aligned}$$

Međutim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n \frac{\omega}{n} = 1, \text{ a}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + i \operatorname{tg} \frac{\omega}{n} \right)^n &= \lim_{\frac{\omega}{n} \rightarrow 0} \left(1 + i \operatorname{tg} \frac{\omega}{n} \right)^n = (\text{zamjenom ekvivalentnih infinite-} \\ \text{zimala}) &= \lim_{\frac{\omega}{n} \rightarrow 0} \left(1 + i \frac{\omega}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i\omega}{n} \right)^n.\end{aligned}$$

Dakle

$$\cos \omega + i \sin \omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i\omega}{n} \right)^n.$$

U realnom pak brojnem području

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\omega}{n} \right)^n = e^\omega,$$

stoga je razumno definirati

$$e^{i\omega} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i\omega}{n} \right)^n = \cos \omega + i \sin \omega$$

(očito se još jednom iza riječi „stoga se razumno“ krije neka vrsta principa permanencije ekvivalentnih **beskonačnih** formi).

3. U okviru teorije funkcija kompleksne varijable do formule za $e^{i\omega}$ dolazi se preko zahtjeva da funkcija e^z bude sama svoja derivacija (kao što je to u realnom području funkcija e^x), tj.

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z, \quad (8)$$

te da osim toga $e^z = e^{x+iy}$ bude proširenje realne funkcije e^x , tj.

$$e^z = e^x \quad \text{za} \quad y = 0. \quad (9)$$

Naime, neka je $e^z = u + iv$. Iz (8) slijedi

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz} (u + iv) &= (\text{po definiciji derivacije u kompleksnom području}) = \frac{\partial}{\partial x} \\ &= (u + iv) = (8) = u + iv, \text{ tj.}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u \quad \text{i} \quad (10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = v. \quad (11)$$

Iz (10) slijedi da je

$$u = e^x \cdot f(y). \quad (12)$$

Iz (11) i (12), prema Cauchy-Riemannovu uvjetu diferencijabilnosti $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$, slijedi

$$v = -e^x f'(y). \quad (13)$$

Iz (10) i (13), prema drugom Cauchy-Riemannovu uvjetu diferencijabilnosti $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, slijedi

$$u = -e^x f''(y). \quad (14)$$

Iz (12) i (14) slijedi

$$\begin{aligned} e^x (f(y) + f''(y)) &= 0, \quad \text{tj.} \\ f(y) + f''(y) &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Opće rješenje diferencijalne jednačdbe (15) je

$$f(y) = c_1 \cos y + c_2 \sin y.$$

Iz uvjeta (9) slijedi da je

$$\begin{aligned} e^{x+iy} &= ((12) \text{ i } (13)) = e^x (f(y) - if'(y)) = e^x \text{ za } y = 0, \text{ tj.} \\ f(0) &= 1, \quad \text{a } f'(0) = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

Početni uvjeti (16) daju traženo rješenje

$$\begin{aligned} f(y) &= \cos y, \quad \text{tj.} \\ e^z &= e^x (\cos y + i \sin y). \end{aligned}$$

Za $x = 0$ dobivamo Eulerovu formulu.

U ovom slučaju, s obzirom na uvjet (8), možemo govoriti o principu permanencije ekvivalentnih **diferencijalnih** formi.

4. Pokazat ćemo da do odabira $B = e$ možemo doći koristeći se jednostavnijim principom.

Ne treba zahtijevati očuvanje (permanenciju) diferencijalnih ili beskonačnih formi, dovoljno je zahtijevati očuvanje (permanenciju) same diferencijabilnosti.

Drugim riječima, odabir $B = e$ nameće se kao jedini uz koji je potencija a^{z+iy} u kompleksnom brojnem području diferencijabilna funkcija argumenta $z = x + iy$. To da je e^z , pri tom izboru, sama svoja derivacija posljedica je zahtjeva diferencijabilnosti, koju stoga ne treba postulirati.

Naime, da bi funkcija

$$a^{z+iy} = u + iv = a^x \cos(y \log_B a) + ia^x \sin(y \log_B a)$$

bila diferencijabilna u kompleksnom brojnem području, moraju biti ispunjeni Cauchy-Riemannovi uvjeti

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{i} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Dakle mora biti

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a^x \ln a \cos(y \log_B a) = \frac{\partial v}{\partial y} = a^x \log_B a \cos(y \log_B a),$$

tj. mora biti

$$\ln a = \log_B a,$$

odakle slijedi

$$B = e.$$

Napominjem da je taj rezultat polučiv i u okviru teorije funkcija kompleksne varijable. On je naime posljedica teorema, po kojem je svaka **diferencijabilna** funkcija, u kompleksnom području, jednoznačno određena vrijednostima na prebrojivo mnogo svojih argumenata, i teorema po kojem je razvoj diferencijabilne funkcije u Taylorov red jedinstven. I ovdje se dakle vidi da je zahtjev (8) iz 3. prejak. Međutim, teoremi na kojima se temelji ovaj uvid posljedica su već razvijene teorije funkcija kompleksne varijable (kompleksna integracija, Cauchyjev teorem, Cauchyjeva integralna formula, razvoj u Taylorov red itd.), pa je uobičajeno (s obzirom na to da se elementarne funkcije e^z , $\cos z$, $\sin z$ itd. obično uvode na početku same teorije), uvoditi elementarne funkcije kao u 3, što ne zahtijeva razvijenu teoriju. **Postupak 4. omogućuje njihovo uvođenje, uz oslabljeni uvjet, na stupnju elementarnijem čak i od stupnja u 3.***

NAVEDENA LITERATURA

- [G] *Gregory D. F.:* On the Real Nature of Symbolical Algebra, Transactions of the Royal Society of Edinburgh, XIV (1840).
 [Gr] *Grassmann H.:* Die Lineale Ausdehnungslehre, Leipzig, 1844.
 [K] *Kneale W. & M.:* The Development of Logic, Oxford, 1962.
 [M] *DeMorgan:* The Foundations of Algebra, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, VII–VIII, 1839.
 [P] *Peacock G.:* Report on the Recent Progress and Present State of Certain Branches of Analysis, Third Meeting of the British Association for the Advancement of Science, 1833.

* Jedno upozorenje za čitatelja koji donekle poznaje teoriju funkcija kompleksne varijable. Potencija z_1^z , shvaćena kao funkcija argumenta z_2 , predstavlja u okviru te teorije beskonačno mnogo **nepovezanih** (u Riemannovu smislu) **jednoznačnih** analitičkih funkcija. Svi su ti elementi diferencijabilni, a beskonačno mnogo tih elemenata nije isto što i beskonačno mnogo prije definiranih potencija (ovisnih o izboru baze B). Glavna vrijednost funkcije z_1^z poklapa se s našom definicijom uz odabir $B = e$. To je i jedino poklapanje.