Zvonimir ŠIKIĆ

PRIRODNI LOGARITMI

Što su prirodni logaritmi? Suvremeni odgovor nalazimo u definicijama logaritamske *funkcije* $\ln x$. Tipične su dvije alterativne definicije.

Definicija 1. Funkcija $\ln x$ inverzna je funkcija eksponencijalne funkcije e^x. Eksponencijalna funkcija e^x neprekinuto je realno upotpunjenje funkcije $e^{m/n} = (\sqrt[n]{e})^m$, koja je definirana za $m \in Z$ i $n \in N$, tj. za svaki racionalni eksponent.

Definicija 2. $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$.

Za onoga koji prihvati definiciju 1. definicija 2. će biti važan teorem; obratno, definicija 1. bit će važan teorem onome koji krene od definicije 2. Svaki odabir ima svojih prednosti i svojih nedostataka. Definicijom 1. jasno je istaknuta veza eksponencijalne realne funkcije s elementarnim (školskim) eksponenciranjem racionalnim eksponentom. S druge strane, definicija 2. može biti i definicijom kompleksne funkcije $\ln x$, dok definicija 1. to nije i ne može biti. (Neprekinutih kompleksnih proširenja funkcije e^x ima mnogo; jedinstveno je semo analitičko proširenje, usp. [Š].)

Međutim, prirodni logaritmi nisu otkriveni niti tako što je otkrivena definicija 1, niti tako što je otkrivena definicija 2. Otkrićem logaritama držimo Bürgijevo i Napierovo otkriće „logaritamskog kanona", tj. postupak za izračunavanje logaritma. Pri tome logaritmi ne pretpostavljaju pojam *realne logaritamske funkcije*, čije su oni vrijednosti, jer za opći pojam realne funkcije matematika Bürgijevog i Napierovog vremena ne zna. Naprotiv, u tom je vremenu otkriće logaritama tek važan korak za buduće formiranje općeg pojma realne funkcije. Jasno je da su definicije 1. i 2. otkrića tog budućeg vremena.

Povijesno, dakle, otkriću logaritamske funkcije prethodi otkriće logaritamskog kanona, koje danas zovemo otkrićem logaritama. Ono se iznjedrilo iz pokušaja da se precizno numerički istraži korespondencija koja veže dva niza brojeva, jedan što raste (ili opada) po aritmetičkom zakonu, $a + nq$, s druge što raste po geometrijskom zakonu $A \times Q^n$, kada n prima cjelobrojne vrijednosti. Takve su korespondencije već od 14. stoljeća upotrebljavane u pokušajima da se matematički modeliraju prirodni fenomeni. Posebno je važna njihova upotreba u pokušajima nalaženja zakona gibanja. Aristotelijanski skolastički zakon gibanja tvrdio je da je brzina (V) proporcionalna omjeru pokretačke sile (M) i otpora (R), $V \sim M/R$. Thomas Bradwardine predložio je izmjenu ovog zakona, za koju se činilo da se bolje uklapa u fizičke činjenice: „Omjeri brzina u gibanju slijede omjere omjera pokretačke sile i otpora." Dakle, za korespondentne vrijednosti, koje odgovaraju cjelobrojnim n, vrijedi, ako početna brzina V_1 korespondira početkom omjeru M_1/R, onda n puta veća brzina nV_1 korespondira sa $(M_1/R_1)^n$. Bez obzira na pitanje fizikalne korektnosti Bradwardineovog zakona, za nas je važno da taj tip korespondencije već u to doba postaje predmetom matematičkih razmatranja. Zakon u *modernoj formi* možemo iskazati kao proporcionalnost $V \sim \log(M/R)$, ali, naravno, takve mogućnosti u doba njegove formulacije nema (usp. [W] u kojem se jasno iznosi da se takva formulacija ne može naći nigdje prije 17. stoljeća, iako mnogi suvremeni tekstovi, koji se bave ovim povijesnim problemom nekritički taj zakon citiraju u modernoj formi). Ovakve su korespondencije tipične za srednjovjekovna istraživanja. Numeričke karakteristike dvaju razmatranih fenomena tabeliraju se, pa se s vjerom u temeljni princip jednostavnosti prirode, pretpostavlja da će se veza razmatranih fenomena jasno očitovati pri usporedbi numeričkih vrijednosti međusobno korespondentnih primjeraka razmatranih fenomena.

Veza aritmetičke progresije $a+nq$, s geometrijskom progresijom $A \times Q^n$ postaje, zbog jednog specifičnog razloga, posebno zanimljiva u 16. stoljeću. Naime, *zbroju* primjeraka prve progresije odgovara *umnožak* primjeraka druge, što omogućuje da se prelazom iz jedne u drugu složeno množenje zamijeni jednostavnim zbrajanjem. Veliki razvoj astronomije 16. stoljeća suočava istraživače s glomaznim računima što ih nužno usmjerava na ostvaranje te mogućnosti. Na primjer, uzmemo li $a = 0$, $A = q = 1$ i $Q = 2$ dolazimo do tablice cjelobrojnih potencija s bazom 2.

x	0	1	2	3	4	5	6
y	1	2	4	8	16	32	64

Ona jasno pokazuje kako se množenje može svesti na zbrajanje. Dva broja x-retka možemo *pomnožiti* tako da *zbrojimo* odgovarajuće brojeve y-retka. Ovi „odgovarajući brojevi", koji se zbrajaju kada se njima odgovarajući brojevi množe, zovu se logaritmima. Naime, ako je $x_1 \cdot x_2 = x_3$ onda je $y_1 + y_2 = y_3$. Ipak, praktična vrijednost ovakve tablice je zanemariva zbog velikih razlika među raspoloživim x-evima. Pitanje je: kako dobiti finiju razdiobu x-eva? Ovo su si pitanje 1590-tih istovremeno i nezavisno postavili Bürgi i Napier.

Napierov odgovor pokazuje znakove dubljeg i maštovitijeg razmišljanja o problemu, uz pomoć geometrijskog modela, u koji unosi element gibanja, i tako postiže kontinuiranu razdiobu korespondentnih x-eva i y-a (neka vrsta kinematičkog surogata za pojam realne funkcije). No njegove su konstrukcije prilično dvosmislene pa povijesničari i danas nude različite rekonstrukcije njegove teorije. Bürgijev odgovor neusporedivo je jednostavniji jer on ni ne pokušava doći do finije razdiobe x-eva finijom razdiobom y-a; što bismo danas rekli razumijevanjem x-a kao kontinuirane (realne) funkcije kontinuiranog (realnog) argumenta y (npr. kao Napier uz pomoć gore spomenutog surogata). Bürgi nije matematičar Napierovog formata, on može naći samo jednostavno računsko rješenje, koje ne traži otklone od jednostavnog potenciranja cjelobrojnim pozitivnim eksponentom. Tako ga i nalazi.

Dakle, neka varijabla y prima cjelobrojne pozitivne vrijednosti. Kako ćemo potenciranjem $x = b^y$ doći do fine razdiobe x-eva? „Najfiniju" razdiobu dobijamo kada za bazu uzmemo $b = 1$. Tada se x-evi stapaju. Dakle, fina razdioba se dobiva za $b \approx 1$. Bürgi je odabrao bazu $b = 1.0001$. Za $y = 0, 1, 2, 3, \ldots$ odgovarajuće x-eve dobivamo potenciranjem $x = 1.0001^y$. Međutim, Bürgi neće potencirati 1.0001^{131} tako da broj 1.0001 pomnoži 131 puta sam sa sobom. Tko bi na takav način ikada zgotovio tablicu logaritama? On traži jednostavni algoritam: logaritamski kanon. Sigurno nam pada na pamet ideja da pri računanju vrijednosti 1.0001^{131} iskoristimo prethodno izračunatu vrijednost 1.0001^{130}. Dakle, $1.0001^{131} = (1.0001^{130}) \cdot 1.0001$. To je već mudrije. Ali Bürgi je još mudriji. On naprosto ne želi *množiti*. Naravno, iskoristiti će prethodno izračunati x, ali ne u računanju slijedećeg x-a nego u računanju *prirasta* do slijedećeg x-a. Dakle, ako je

$$x = 1.0001^y,$$

onda on traži Δx takav da je

$$x + \Delta x = 1.0001^{y+1}.$$

Dakle,

$$\Delta x = (x + \Delta x) - x = 1.0001^{y+1} - 1.0001^y = 1.0001^y(1.0001 - 1) = \frac{x}{10000}.$$

Kako se dakle računa tablica logaritama? Ovako!

y	x	Δx
0	1	0.0001
1	1.0001	0.00010001
2	1.00020001	0.000100020001
3	1.000300030001	itd.

Sve u svemu: pomakni zarez za četiri mjesta ulijevo pa pribroji dobivenu vrijednost početnoj vrijednosti, u tako dobivenoj vrijednosti opet pomakni zarez četiri mjesta ulijevo pa opet pribroji tako dobivenu vrijednost itd. Naravno, Δx i x će u stvarnom računu biti zaokruženi na neki broj decimala. Jednostavan algoritam. To je Bürgijev kanon.

Uočimo da je upravo Bürgijeva nemogućnost da se odmakne od diskretnih progresija (aritmetičke $y = 0, 1, 2, \ldots$ i odgovarajuće geometrijske $x = 1, 1.0001, 1.00020001, \ldots$), prema kontinuiranoj realnoj funkciji x koja ovisi o kontinuiranom realnom argumentu y, mogla biti prirodni izvor njegove ključne ideje da se umjesto računanja vrijednosti x-ova usredsredi na računanje vrijednosti prirasta Δx. Diskretne progresije baš nastaju diskretnim prirastima, čija jednostavnost omogućava da se nađe jednostavni logaritamski kanon. Dapače, sada i korak ka kontinuiranoj logaritamskoj funkciji postaje lakši.

Naime, nakon što je stvorena gornja tablica logaritama slijedi lagani korak ka finijoj razdiobi y-a. Vrlo je jednostavan. Svi y-i se proporcionalno umanje. Bürgijev faktor je $\frac{1}{10^4}$. Tako nastaje nova tablica:

y	x
0.0000	1.0000
0.0001	1.0001
0.0002	1.00020001
0.0003	1.000300030001

Da li je i ova tablica, tablica logaritama? Da li i u njoj množenje x-eva odgovara zbrajanje y-a? Naravno da odgovara. Označimo y-e stare tablice sa $\bar{y}$, a novi neka i dalje budu označeni sa y. Tada je $y = \frac{\bar{y}}{10^4}$. Ako je $x_1 \cdot x_2 = x_3$ onda je, vidjeli smo, $\bar{y}_1 + \bar{y}_2 = \bar{y}_3$, ali onda je i $\frac{\bar{y}_1}{10^4} + \frac{\bar{y}_2}{10^4} = \frac{\bar{y}_3}{10^4}$, tj. $y + 1 + y_2 = y_3$. Dakle i nova tablica je logaritamska tablica. Prednost nove tablice je ta da malim promjenama x-a odgovaraju male promjene y-a, i obrnuto, pa vezu x-a i y-a možemo lakše shvatiti kao kontinuiranu funkciju. Bürgi, tako daleko nije otišao. Uostalom glavna korist za računanje, a to je svođenje množenja na zbrajanje, nije ništa više sadržana u novoj tablici no što je u staroj.

Ipak, pogledajmo u svjetlu današnjega razumijevanja tablice, kao izvatka iz kontinuuma funkcijskih vrijednosti, o kakvom potenciranju i kakvim prirastima se radi u novoj tablici. Za staru tablicu (tj. za stare logaritme) vrijedi

$$x = 1.0001^{\bar{y}},$$

gdje je $\bar{y} = 0, 1, 2, 3, \ldots$ tj. $\Delta\bar{y} = 1$. Osim toga znamo da je $\Delta x = \frac{x}{10^4}$ tj. $\frac{\Delta\bar{y}}{\Delta x} = \frac{10^4}{x}$. Budući je u novoj tablici $y = \frac{\bar{y}}{10^4}$ onda za nove logaritme vrijedi

$$x = 1.0001^{10000y} \quad \text{i} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} \doteq \frac{1}{x}.$$

Uočimo li da je

$$1.0001^{10000y} = (1.00001^{10000})^y,$$

vidimo da nova logaritamska tablica ima bazu

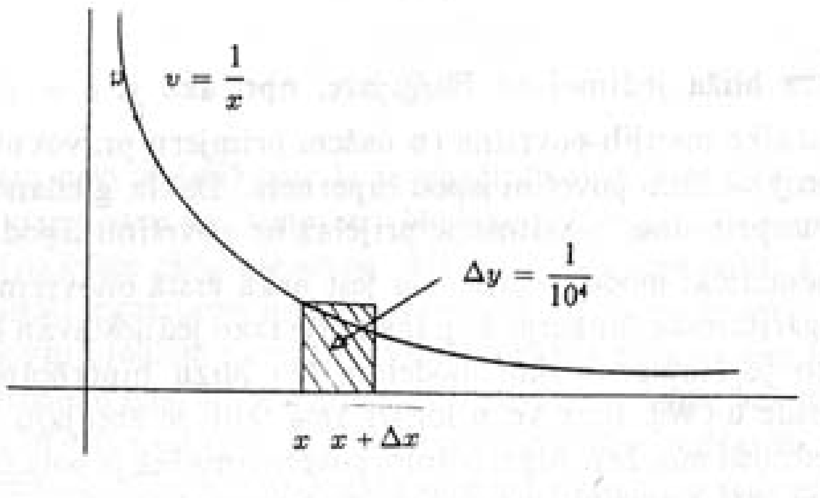
$$b = 1.0001^{10000} = \left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^{10^4} \approx e.$$

Dakle, nova tablica je tablica funkcija $y = \log_b x$ za $b \approx e$ tj. $y = \ln x$. Nova tablica daje približne vrijednosti funkcije $y = \ln x$ i u tom smislu je Bürgi otkrio prirodne logaritme. Da je u staroj tablici odabrao bazu još bližu broju 1, npr. $b = 1 + \frac{1}{n}$, gdje je $n = 10^{100}$, i da je potom prešao na novu tablicu dijeljenjem y-a sa $n = 10^{100}$ dobio bi još finiju razdiobu x-eva, čija bi tablica, kao tablica funkcije

$$y = \log_b x \quad \text{gdje je} \quad b = \left(1 + \frac{1}{10^{100}}\right)^{10^{100}},$$

još bolje aproksimirala funkciju $y = \ln x$.

No vratimo se povijesti. Bürgi je našao nakon za izračunavanje tablice jedne diskretne progresije, računski veoma korisne, ne misleći o toj tabilici kao diskretnom izvatku iz kontinuuma vrrijednosti naše realne kontinuirane logaritamske funkcije. Napier je našao u biti isti kanon, odabravši umjesto Bürgijeve baze $b = 1.0001$, bazu $b = 0.9999999$, povezujući je s gometrijsko kinematičkim modelom, koji jest „konkretni" model naše apstraktne realne funkcije $\ln x$. Utoliko je on bliži otkriću funkcije $\ln x$. Naravno, razumijevanje realne funkcije u današnjem apstraktnom smislu pretpostavlja razumijevanje realnog kontinuuma a ono je rezultat dugog razvoja sve do sredine 19. stoljeća. Jedini analogon tom našem apstraktnom pojmu, koji možemo naći u 17. stoljeću, jest kontinuirana krivulja koja utjelovljuje kontinuirane veze uz nju vezanih kontinuiranih veličina: apcisa, ordinata, površina, tangenti, suptangenti itd. Po toj bismo analogiji otkrićem logaritamske funkcije trebali locirati kao otkriće hiperbolnih logaritama tj. kao otkriće činjenice da su površine ispod hiperbole logaritmi odgovarajućih ordinata hiperbole (u tom smislu da se površine hiperbole zbrajaju kad se njene ordinate množe). Prelaz od Bürgijevih logaritama na tako shvaćenu logaritamsku funkciju danas je obična stvar, iako je neobično da se taj prelaz (koliko je autoru poznato) nigdje u udžbenicima ne koristi kao izvanredan metodički pristup logaritamskoj funkciji.



Sl. 1

Vratimo se dakle Bürgijevim algoritmima i interpretirajmo ih geometrijski. Sjetimo se da je

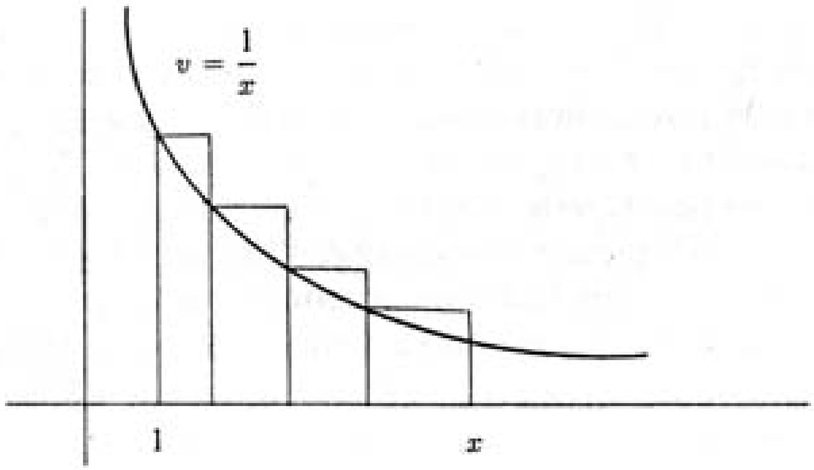
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \quad \text{tj.} \quad \Delta y = \frac{1}{x}\Delta x,$$

odakle slijedi da se prirast Δy (koji je uvijek jednak $1/10^4$) može geometrijski prikazati kao pravokutnik s visinom $v = \frac{1}{x}$ i takvom osnovicom Δx koja daje površinu pravokutnika $\frac{1}{x}\Delta x = \frac{1}{10^4}$

Naravno, sam y je suma prirasta Δy

$$y = \sum_{1}^{x} \Delta y = \sum_{1}^{x} \frac{1}{x}\Delta x,$$

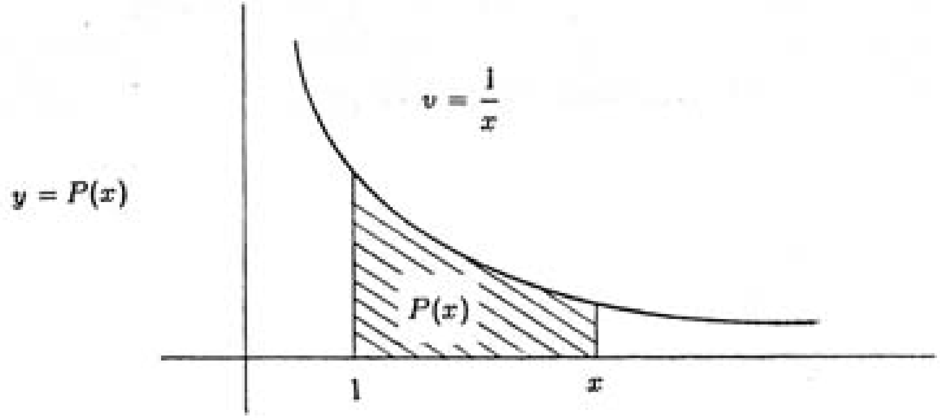
koja se geometrijski može prikazati kao suma pravokutnika, koji se protežu od 1 do x, kojima se visina proteže od osi x do grafa funkcije $v = \frac{1}{x}$ i kojima je površina $\frac{1}{10^4}$.



Sl. 2

Ako je (stara) baza bliža jedinici od Bürgijeve, npr. ako je $b = 1 + \frac{1}{10^{100}}$ onda dobivamo pravokutnike manjih površina (u našem primjeru pravokutnike površine $1/10^{100}$), čiji je zbroj još bliži površini ispod hiperbole. Dakle, gledano geometrijski, granični prijelaz na prirodne logaritme je prijelaz na površinu ispod hiperbole.

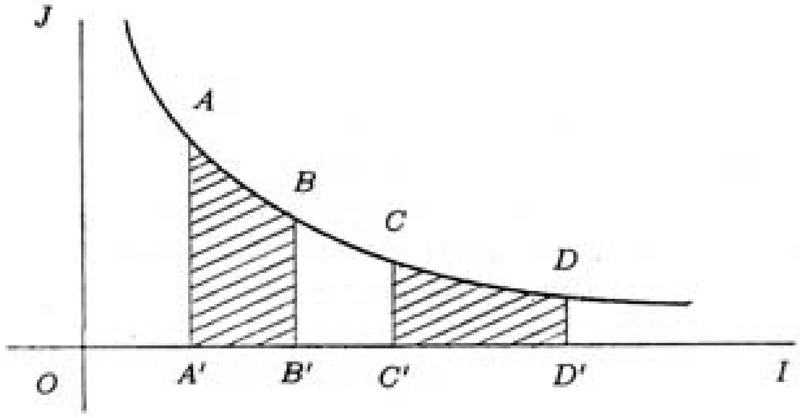
Napierov kinematički model logaritama jest neka vrsta onovremenog surogata za pojam realne logaritamske funkcije, koji ipak nije tako jednostavan kao hiperbolni logaritam. Koliko je Napier svojim modelom bio blizu hiperbolnom logaritmu pokazao je Whiteside u [W]. Ipak vezu logaritama (koji se zbrajaju kada se njima odgovarajuće vrijednosti množe) s hiperbolnim površinama tek je pola stoljeća kasnije otkrio gotovo nepoznati belgijski isusovac A. de Sarasa, čitajući *opus geometricum* svojeg prijatelja Gregoryja St. Vincenta. U stvari, u Gregoryjevom djelu možemo



Sl. 3

naći sve osim samog iskaza da hiperbolne površine imaju svojstvo logaritama. On je dokazao da za tačke A, B, C i D koje leže na pravokutnoj hiperboli s asimptotama OI i OJ vrijedi:

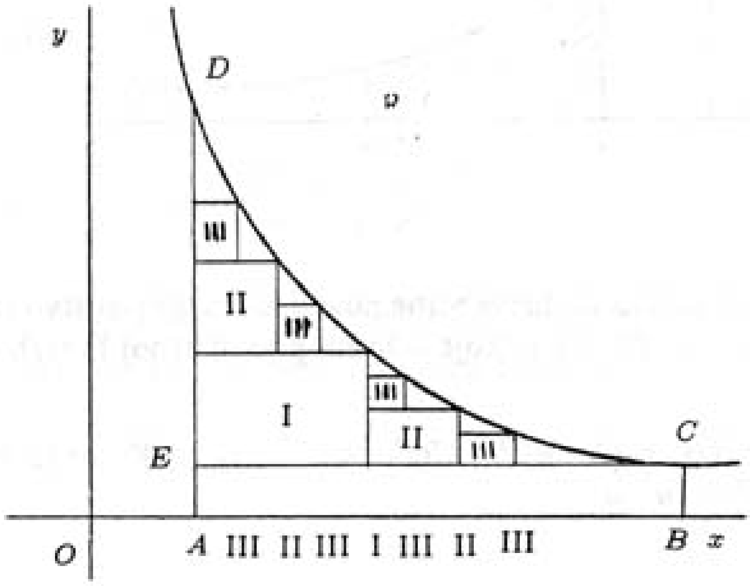
Ako je $AA' : BB' = (\lambda : \mu)^m$ *i* $CC' : DD' = (\lambda : \mu)^n$, *onda je* $\mathrm{Pov}(AA'B'B) : \mathrm{Pov}(CC'D'D) = m : n$.



Sl. 4

A. de Sarasa prvi je istaknuo da to znači da su hiperbolne površine logaritmi odgovarajućih vrijednosti na asimptoti. No iako je Gregoryjev *opus geometricum* bio poznat i čitan (najčešće zbog njegovog „dokaza" o nemogućnosti kvadrature kruga) hiperbolni se model logaritama među matematičarima širio veoma sporo. Vjerojatno stoga što se osnovni problem nalaženja logaritamskog kanona tim modelom svodi na jednako teški problem nalaženja hiperbolnih površina. Ipak, baš je taj problem, koji je postavljen 1650-tih a od tada se sve preciznije počeo i rješavati, bio problem koji je doveo do elementarnih razvoja logaritama u beskonačne redove.

Među prvim pokušajima da se hiperbolne površine sistematski izračunaju najvažniji je Brounckerov iz sredine 1650-tih. John Wallis, koji je imao određenih uspjeha u računanju kvadrature kruga, upotrebljavajući jednadžbu $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, pokušao je iste tehnike primijeniti i na kvadraturu hiperbole preko jednadžbe $y = \sqrt{R^2 + x^2}$. Ne postigavši neki uspjeh predložio je problem Brounckeru, koji ga je riješio spretnim disekcijama. Razmatrajući hiperbolnu površinu $ABCD$ Brouncker je siječe kao na slici.



Sl. 5

Najprije je iza hiperbolne površine $ABCD$ izdvojen pravokutnik $ABCE$. Zatim slijedi I bisekcija intervala AB i izdvajanje odgovarajućeg pravokutnika I (1. korak). Tome slijede dvije bisekcije II i izdvajanje dva odgovarajuća pravokutnika II (2. korak). Zatim slijede četiri bisekcije III i izdvajanje četiri odgovarajuća pravokutnika III (3. korak). I tako dalje. Sve u svemu:

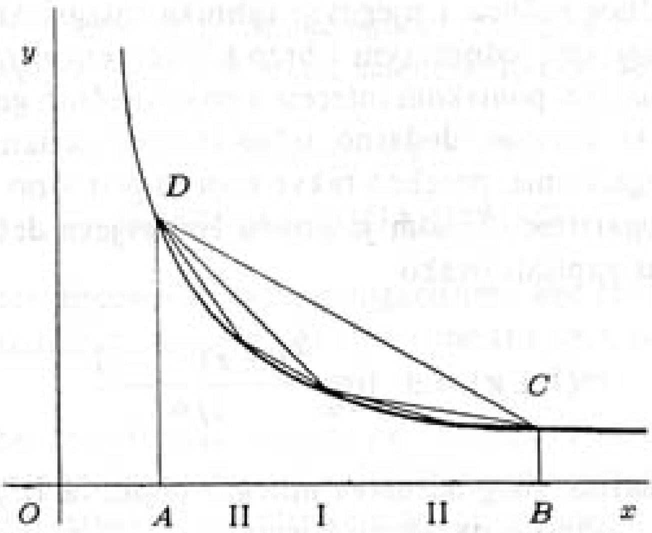
$$\mathrm{Pov}(ABCD) = \mathrm{Pov}(ABCE) + \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \dots .$$

Uzmemo li jednakostraničnu hiperbolu $y = \dfrac{1}{x}$, te $OA = 1$ i $OB = 2$ nalazimo:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pov}(ABCD) &= 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3} - \frac{2}{4}\right] + \frac{1}{4}\left[\left(\frac{4}{7} - \frac{4}{8}\right) + \left(\frac{4}{5} - \frac{4}{6}\right)\right] + \\
&\quad + \frac{1}{8}\left[\left(\frac{8}{15} - \frac{8}{16}\right) + \left(\frac{8}{13} - \frac{8}{14}\right) + \left(\frac{8}{11} - \frac{8}{12}\right) + \left(\frac{8}{9} - \frac{8}{10}\right)\right] + \cdots \\
&= \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right] + \\
&\quad + \left[\frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \frac{1}{15} - \frac{1}{16}\right] + \cdots \\
&= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{9 \cdot 10} + \frac{1}{11 \cdot 12} + \frac{1}{13 \cdot 14} + \frac{1}{15 \cdot 16} + \cdots .
\end{aligned}$$

što je poznati „Mercatorov" razvoj od $\ln 2$. Naravno, metoda je sasvim općenita i Brouncker je uistinu našao razvoj za mjeru svake površine koju bismo danas označili sa $\ln(1+x)$.

Do analognih je razvoja Brouncker došao polazeći i od trapeza $ABCD$, kojem je oduzimao niz u hiperbolu upisanih trokuta, kao na slici.



Sl. 6

Tako je došao do sljedećeg zanimljivog razvoja od $\ln 2$:

$$\ln 2 = 1 - \left(\frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 7\cdot 8} + \cdots\right).$$

U isto vrijeme, do slične je metode došao i Pietro Mengoli. Njegova metoda, kao i prva Brounckerova, daje „Mercatorov" razvoj od $\ln 2$, no ona je zanimljiva iz jednog drugog razloga. Mengoli pokušava razviti jednu čistu *analitičku teoriju logaritama*, naravno inspiriranu geometrijskim modelom, ali logički neovisnu o tom modelu. On kreće od dva komplementarna pojma na koje ga navode njegova izračunavanja hiperbolnih površina. To su hiperlogaritam

$$\overline{L}\left(\frac{m}{n}\right)_r = \sum_{rn\le\lambda\le rm-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

i hipologaritam

$$\underline{L}\left(\frac{m}{n}\right)_r = \sum_{rn+1\le\lambda\le rm}\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Očito je

$$\overline{L}\left(\frac{m}{n}\right)_r > \underline{L}\left(\frac{m}{n}\right)_r \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\overline{L}\left(\frac{m}{n}\right)_r - \underline{L}\left(\frac{m}{n}\right)_r\right) = 0,$$

i Mengoli *definira* logaritam od $\frac{m}{n}$ kao vrijednost koja je za svaki r smještena između $\overline{L}\left(\frac{m}{n}\right)_r$ i $\underline{L}\left(\frac{m}{n}\right)_r$.

I Brounckerovi i Mengolijevi razvoji glomazni su i nespretni, pa je i dalje ostao otvoren problem nalaženja metode kojom bi se preko hiperbolnih površina brzo i lako računale aproksimacije logaritama. Taj je problem, naravno, riješen skorašnjim razvojem infinitezimalnog računa i njegovih tehnika integriranja, uz pomoć kojih su otkriveni mnogi relativno jednostavni i brzo konvergentni razvoji za logaritme. Takav je razvoj matematike, pomakom interesa s pojedinačnih geometrijskih metoda na općenitije analitičke metode, dodatno jačao interes za iznalaženjem potpuno analitičke definicije logaritama, posebno takve koja bi prirodno i lako vodila do već poznatih razvoja za logaritme. U tom je smislu Halleyjeva definicija logaritma iz 1695, koju bismo danas zapisali ovako

$$\ln(1 \pm x) = \pm \lim_{n\to\infty} \frac{(1 \pm x)^{1/n} - 1}{1/n}$$

(a koju je on dao verbalno, zbog odsustva mnogih pojmova iz gornjeg zapisa u to doba) veliki napredak u odnosu na Mengolijevu.

Možemo zaključiti da su krajem 17. st. logaritmi prestali biti tek sredstvo za računanje, koje su otkrili Bürgi i Napier, nego su preko hiperbolnih površina inkorporirani u geometrijski pojam logaritamske funkcije, što je učinio Sarasa ili donekle već Napier (?). Kada se u Eulerovom 18. st. geometrijski temelj računa počeo napuštati u korist čistog analitičkog računa, takozvanom algebraizacijom analize, i kada se pojam funkcije odvojio od geometrijske krivulje i vezao uz analitičke izraze, kao prototip tom razvoju poslužila je baš logaritamska funkcija koja je taj razvoj već prošla (usp. Mengolijevu i Halleyjevu definiciju).

Uočimo na kraju da i današnji student matematike u svojim susretima s logaritmima prolazi sve te faze. U srednjoj se školi susreće s Bürgijevom tablicom logaritama, koji množenje svode na zbrajanje. U prvom kursu računa susreće se s geometrijskim modelom logaritama, kao hiperbolnih površina, u obliku formule $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$, budući da na tom nivou integral funkcije intuitivno razumije kao površinu ispod grafa podintegralne funkcije. U kursu analize oslobađa se geometrijskih intuicija računa, pa između ostalog savladava Riemannovu čisto analitičku definiciju integrala, što ga dovodi do toga da formulu $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ čita kao čisto analitičku definiciju prirodnog logaritma. Naravno, tu se otvara mogućnost za nalaženje mnogih ekvivalentnih definicija poput Halleyjeve i Mengolijeve, na primjer. Upozoravamo pritom da je prelaz od geometrijskog modela u prvom kursu računa na analitički u kursu analize (često su to faze istog kursa) opće mjesto matematičke visokoškolske nastave, dok se prelaz od srednjoškolske tablice logaritama na geometrijski model prvog kursa računa u matematičkoj nastavi ignorira iako je, vidjeli smo, vrlo jednostavan i povijesno opravdan. Željeli bismo da se ovaj članak shvati i kao prijedlog za uvođenje tog prelaza u našu nastavu, tim više što je to lijep primjer premošćivanja ponora koji dijeli srednjoškolsku nastavu od visokoškolske.

Literatura

[Š] Šikić, Z., *Peacock's principle and Euler's equation*, Proceedings of the conference „Algebra and logic", 165–170 (1984).

[W] Whiteside, D. T., *Patterns of Mathematical Thought in the later Seventeenth Century*, Archive for history of exact sciences, 1, 179–388 (1961).

Zvonimir Šikić

NATURAL LOGARITHMS

Bürgi and Napier discovered natural logarithms, but they did not discover the real continuous logarithmic function. At that time the very notion of real function did not exist.

Bürgi found the logarithmic canon, i.e. the algorithm for computation of logarithmically corresponding values of arithmetic and geometric progressions. He did not conceive these values of a continuous function, and that even helped him to find a very simple algorithm. Napier considered the logarithms as values of a concrete geometric continuous correspondence, but we had to wait for Sarasa to conceive the logarithmic correspondence as the correspondence between ordinates and areas of the hyperbola. He discovered these hyperbolic logarithms in Gregory's Opus geometricum, Analytical definition of logarithms, which is logically independent of geometry, arose from infinite expansions of logarithms in works of Brouncker, Mercator, Mengoli, Halley and others. All this was happening at the end of 16th century and during 17th century. In 18th century Euler and others dispensed with geometric bases of calculus and tried to create a pure analytic calculus. They tried to divorce the analytic notion of function from the geometric notion of curve, and they were able to do that because they already had an example of the notion which started as a discrete numerical correspondence, turned to a geometric correspondence and finally became an analytically defined notion: the natural logarithm.

We remark, at the end, that each student of calculus repeats this whole history. In high school he works with logarithms on Bürgi's level. In his first calculus course he works with the geometric model of hyperbolic logarithms. In the analysis course he works with the analytic (geometry-independent) definition of logarithms. The gap between high school logarithms and first calculus course logarithms is usually much wider than the one between calculus and analysis logarithms.

This history can teach us how to narrow this gap.