

Problem lažne kovanice

ZVONIMIR ŠIKIĆ

Vjerojatno ste čuli za problem 12 kovanica. Jedna od njih je lažna, tj. teža ili lakša od ostalih, i vi morate u samo 3 vaganja odrediti koja je kovanica lažna i je li teža ili lakša. Vaga kojom se koristite je jednostavna ravnotežna vaga (ako su na obje strane opterećenja ista vaga je u ravnoteži, ako je na jednoj strani opterećenje veće onda je vaga na toj strani niža, dok je na drugoj naravno viša). Naš je cilj dokazati sljedeći teorem.

Teorem 1. Ako se među $3 \cdot (3^0 + 3^1 + \dots + 3^n)$ kovanica nalazi jedna lažna (tj. teža ili lakša) onda u $n + 2$ vaganja možemo utvrditi koja je to kovanica i je li teža ili lakša.

Za $n = 1$ radi se o 12 kovanica, tj. problem 12 kovanica možemo riješiti u 3 vaganja. Problem 39 kovanica ($n = 2$) možemo riješiti u 4 vaganja, problem 120 kovanica ($n = 3$) u 5 vaganja itd. Prije samog teorema dokazat ćemo dvije jednostavne leme.

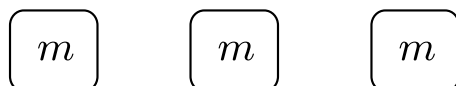
Lema 2. Ako se među 3^n kovanica nalazi jedna lažna kovanica, za koju znamo da je teža, onda u n vaganja možemo utvrditi koja je to kovanica. (Isto vrijedi ako znamo da je lažna kovanica lakša.)

Dokaz. U prvom vaganju po jednu trećinu kovanica stavimo na lijevu i desnu stranu vage, a preostalu trećinu ostavimo pored vage. Ako je vaga u ravnoteži, teža je kovanica u trećini ostavljenoj pored vage. Ako vaga nije u ravnoteži, teža je kovanica u onoj trećini koja je na nižoj strani vage. U svakom slučaju u 1. vaganju smo došli do 3^{n-1} kovanica među kojima je teža. Nastavimo li taj postupak, u n vaganja doći ćemo do 3^{n-n} kovanica među kojima je teža, tj. u n vaganja doći ćemo do kovanice koja je teža. \square

Lema 3. Na svakoj strani vage je po k kovanica koje ne smijemo micati s vage;



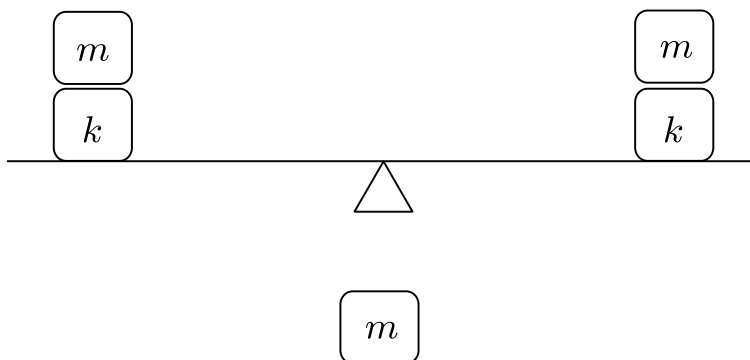
Osim toga imamo 3 skupine od po m kovanica:



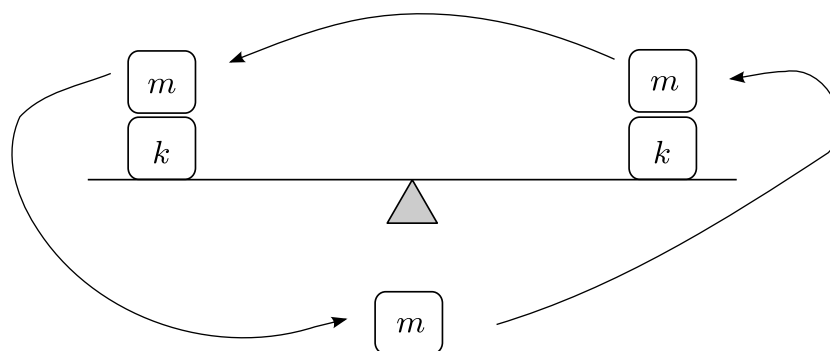
Među ukupno $3m + 2k$ kovanica jedna je lažna. U samo 2 vaganja možemo utvrditi:

- (i) u kojoj od tri m -skupine je lažna kovanica i je li ona teža ili lakša, ili
- (ii) da lažna kovanica nije ni u jednoj od tri m -skupine.

Dokaz. U 1. vaganju po jednu m -skupinu stavimo na lijevu i desnu stranu vage, a treću m -skupinu ostavimo pored vage:

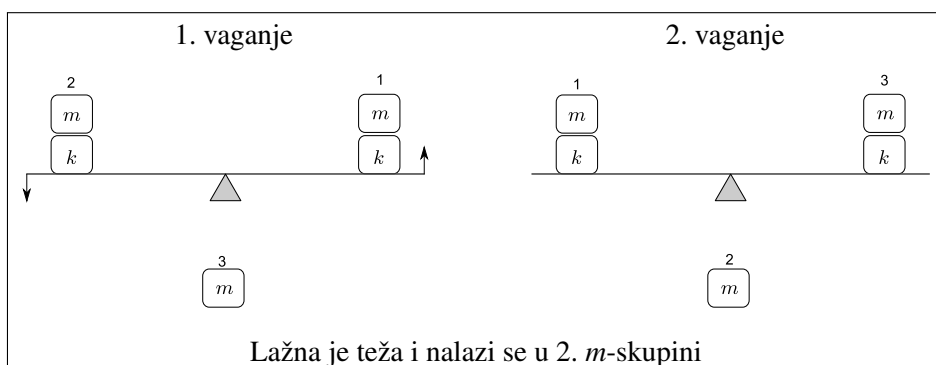
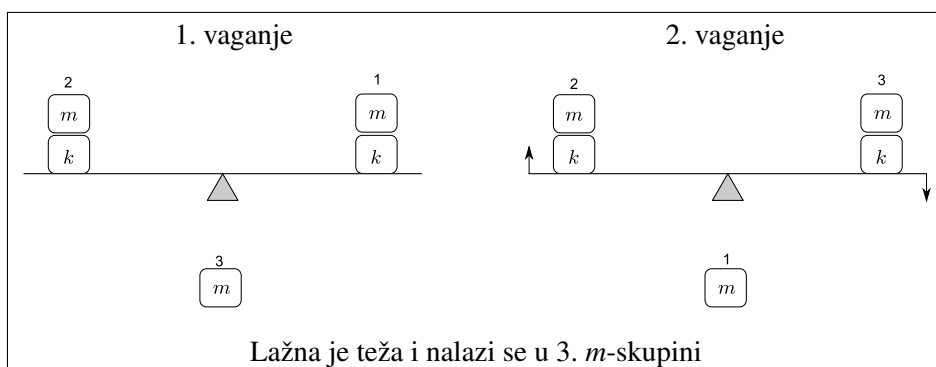
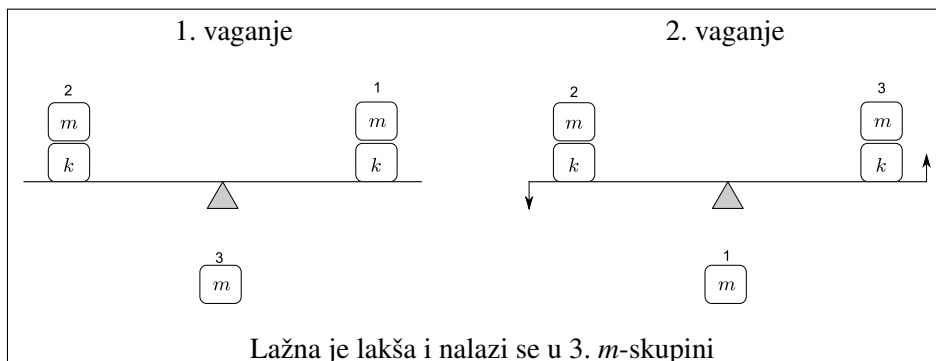


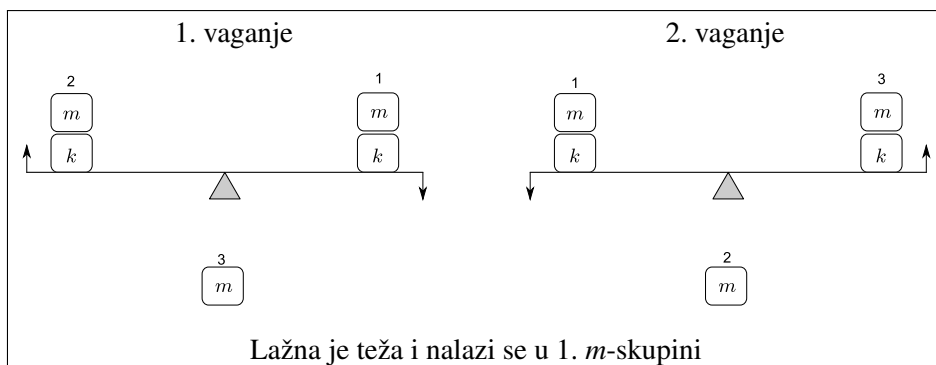
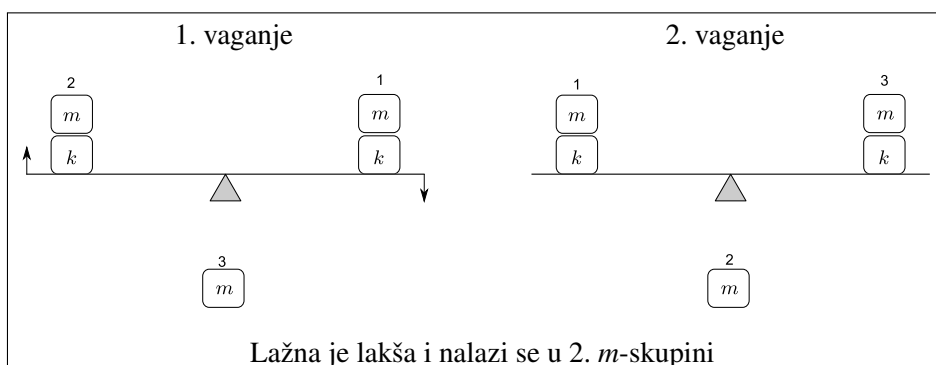
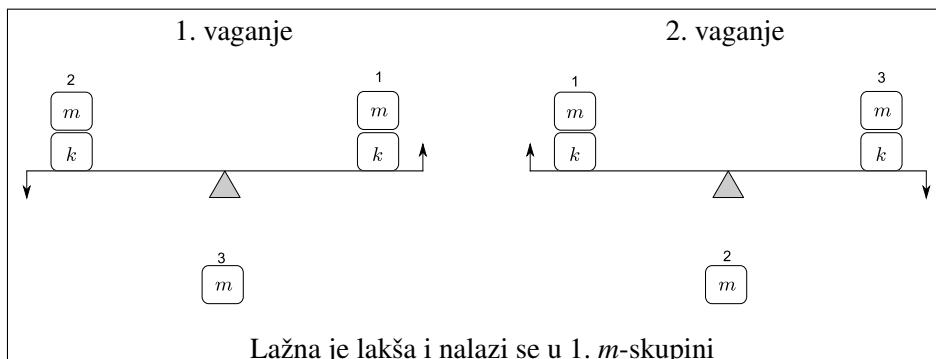
Vaga će doći u jedan od tri moguća položaja (ravnoteža, lijevo niže ili desno niže). Taj položaj zovemo referentnim. U 2. vaganju m -skupine ciklički zamijenimo, kako je prikazano na slici:



To će dovesti do očuvanja ili do promjene referentnog položaja.

- (i) Ako dođe do promjene referentnog položaja, lažna kovanica je očito u jednoj od m -skupina i mogući su sljedeći slučajevi (i nikoji drugi):



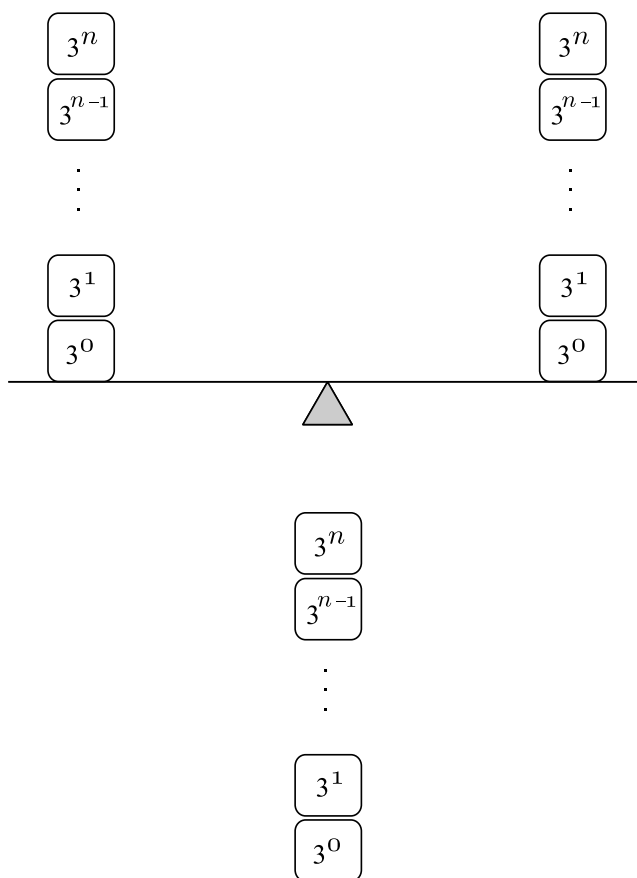


(ii) Ako ne dođe do promjene referentnog položaja lažna kovanica očito nije ni u jednoj od m -skupina. \square

Uz pomoć ove dvije leme konačno možemo dokazati i naš teorem.

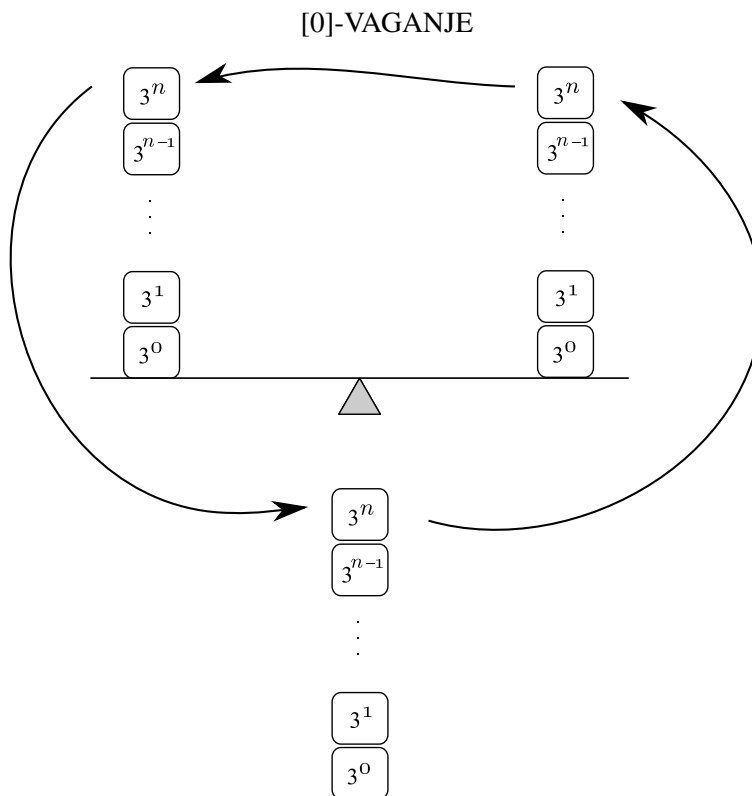
Dokaz teorema. Među $3 \cdot (3^0 + 3^1 + \dots + 3^n)$ kovanica jedna je lažna. Podijelimo kovanice u 3 skupine od po $(3^0 + 3^1 + \dots + 3^n)$ kovanica. U prvom vaganju, koje zovemo referentnim ili kraće [R]-vaganjem, dvije skupine stavimo na vagu (svaku na svoju stranu vage), a treću skupinu ostavimo pored vage.

[R]-VAGANJE



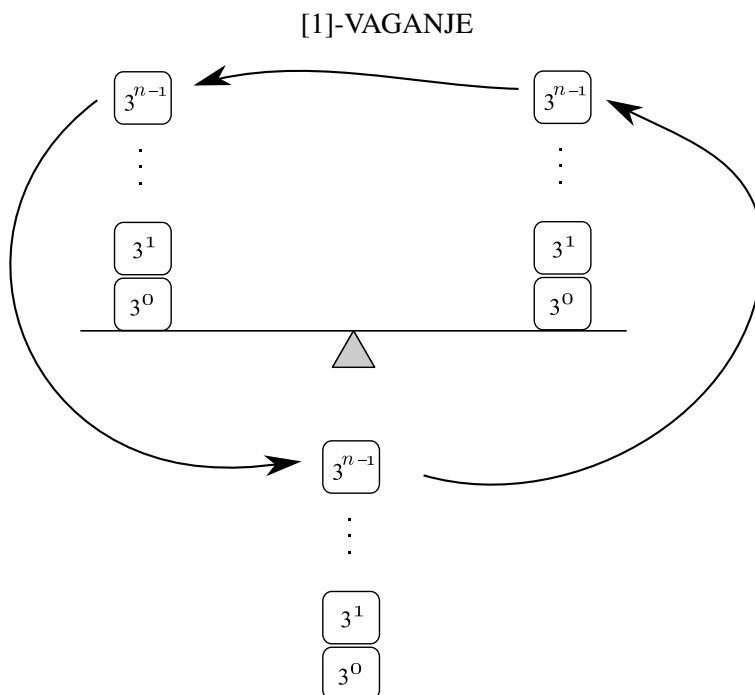
Vaga će zauzeti jedan od tri moguća položaja. Taj položaj zovemo referentnim.

U sljedećem vaganju, koje zovemo [0]-vaganjem jer testira (3^{n-0}) -skupine, upravo te 3^n -skupine ciklički zamijenimo, kako je prikazano na slici:



Ako se referentni položaj nije promijenio, 3^n -skupine eliminiramo jer one tada, prema 2. lemi, ne sadrže lažnu kovanicu.

Postupak nastavljamo s (3^{n-1}) -skupinama, u sljedećem [1]-vaganju:



Postupak ponavljamo s [2]-vaganjem, [3]-vaganjem itd. dok ne dođe do promjene referentnog položaja. Budući da je jedna kovanica lažna do promjene će sigurno doći kada ta lažna kovanica dođe na vagu ili se s nje makne (dakle najkasnije u $[n]$ -vaganju).

Pretpostavimo, dakle, da do promjene referentnog položaja dolazi u $[k]$ -vaganju, što znači poslije $k + 2$ vaganja (tih $k + 2$ vaganja su $[R]$, $[0]$, $[1]$, \dots , $[k]$ -vaganje).

U $[k]$ -vaganju ciklički su zamijenjene tri 3^{n-k} -skupine i to je dovelo do promjene referentnog položaja. Prema 2. lemi, iz toga možemo zaključiti u kojoj se od tri 3^{n-k} -skupine nalazi lažna kovanica i je li ona teža ili lakša. Prema 1. lemi, u sljedećih $n - k$ vaganja možemo pronaći tu kovanicu.

Sve u svemu, u $k + 2 + n - k$, tj. u $n + 2$ vaganja možemo utvrditi koja je kovanica lažna i je li teža ili lakša. To smo i trebali dokazati.

□