

ŠTO SU SKUPOVI U ŠKOLI

ZVONIMIR ŠIKIĆ, Zagreb

Prije nego odgovorimo na pitanje iz naslova, zapitajmo se općenito:

Što su skupovi?

Na takvo općenito i teško pitanje nije moguće odgovoriti jednostavnom formulom: Skupovi su to i to!

Usporedimo naše pitanje sa sličnim i jednako općenitim i teškim pitanjima:

Što su brojevi?

Što je materija?

Primijetimo prije svega da se tokom osam godina učenja aritmetike u osnovnoj školi, a ni tokom još četiri godine učenja aritmetike u srednjoj školi, uopće ne susrećemo s pitanjem „što su brojevi?“, pogotovo pak s odgovorom na nj, pa nam to ipak ne smeta da učeći aritmetiku štošta naučimo o brojevima. Isto se tako tokom višegodišnjeg učenja fizike ne susrećemo s pitanjem „što je materija?“, još manje s odgovorom na nj, pa ipak učeći fiziku mnogo toga naučimo o materiji. Mogli bismo reći da je sama znanost aritmetike odgovor na pitanje „što je broj?“, dok je sama znanost fizike odgovor na pitanje „što je materija?“. Teška pitanja zahtijevaju teške odgovore.

Slično je sa skupovima. Odgovor na pitanje „što su skupovi?“ nije drugo do matematička znanost poznata pod imenom teorije skupova. Što je aritmetike za brojeve i fizika za materiju, to je teorija skupova za skupove. Težak odgovor na teško pitanje.

Ovdje čak ne možemo ni skicirati odgovor na to teško pitanje, pa zainteresiranog čitatelja upućujemo na jednu takvu skicu, koju dajemo u knjizi *Kako je stvarana novovjekovna matematika*, ŠK Zagreb, u poglavlju Georg Cantor neprebrojivost kontinuuma i nastanak teorije skupova. Tek da dobijemo određenu impresiju, spomenimo da prve ideje teorije skupova nastaju u vezi s rješavanjem problema reprezentacije funkcija trigonometrijskim redovima. Tu se pojavljuju problemi karakterizacije raznih beskonačnih skupova točaka linearnog kontinuuma (brojevnog pravca), a u vezi s tim i problem karakterizacije samog linearnog kontinuuma. Neprebrojivost kontinuuma prvi je značajni rezultat, koji otvara vrata nove teorije skupova. Ona će kulminirati u transfinitnoj aritmetici (beskonačnih) kardinalnih i ordinalnih brojeva.

Primjene teorije skupova u suvremenoj matematici mnogobrojne su i *nezaobilazne*, no teorija skupova ima još jednu (filozofski značajnu) ulogu u matematici.

Pokazalo se, naime, da je svu matematiku (u određenom smislu) moguće reducirati na teoriju skupova (usp. poglavlje *Definicije u matematici*). U tom smislu, moguće ju je shvatiti kao fundamentalnu matematičku disciplinu iz koje su izvedene sve ostale. Teorija skupova je *magna logica* matematike, što je filozofski izuzetno značajno, ali čisto matematički, tj. za konkretno razvijanje ostalih matematičkih disciplina i nije toliko značajno.

Kakve su posljedice svega toga na bavljenje skupovima u školi? Što su i što treba da budu skupovi u školi? To je naše pitanje. Usporedimo naše pitanje, još jednom, sa sličnim pitanjima: „Što su brojevi u školi?” i „Što je materija u školi?”. Budući da odgovor na pitanje „Što su brojevi?” daje aritmetika, dok odgovor na pitanje „Što je materija?” daje fizika, onda brojeve u školi treba da objašnjava školska aritmetika, a materiju, analogno, školska fizika. One to i čine. Osnovnoškolska aritmetika jest uvod u srednjoškolsku aritmetiku, koja je preduvjet za razumijevanje visokoškolske aritmetike (ili matematičke analize). Slično je i sa fizikom. Naravno, svaki od navedenih dijelova školske aritmetike ima svoje važne i nezaobilazne primjene, kako u svakodnevnom životu, tako i u usvajanju ostalih školskih znanja. Utoliko i srednjoškolac, koji neće nastaviti školovanje, treba da savlada srednjoškolsku aritmetiku, kao što i učenik osnovne škole, koji neće krenuti u srednju, treba da savlada osnovnoškolsku aritmetiku. Sadržaji osnovnoškolske i srednjoškolske fizike, možda nemaju toliki neposredni značaj, ali su svakako nezaobilazni preduvjet svakog daljnjeg prirodoslovnog i tehničkog obrazovanja. Analogno, budući da odgovor na pitanje „Što su skupovi” daje teorija skupova, onda bi skupove u školi trebala objašnjavati *školska teorija skupova*. Međutim, prije nego prihvatimo ovu analogiju, usporedimo značaj teorije skupova sa značajem aritmetike i fizike, u širem kontekstu općeg obrazovanja.

Kome je potrebno poznavanje teorije skupova? Samo budućim matematičarima, radi spomenutih važnih primjena u ostalim matematičkim disciplinama, s jedne strane, i zbog eventualnog razumijevanja moguće redukcije matematike na teoriju skupova, s druge strane. No, čak ni studenti matematike, ukoliko je njihov studij matematike koncipiran tako da se ograničava samo na primjene teorije skupova, neće slušati posebni kolegij „Teorija skupova”, nego će ona biti uronjena u discipline u kojima se primjenjuje (tako je to npr. na Matematičkom odjelu PMF-a, Sveučilišta u Zagrebu, iako inače nije uobičajeno).

Treba li se dakle cijela školska populacija baviti skupovima? Naravno da ne treba. Jedino, možda, ako su primjene „osnovnoškolske i srednjoškolske teorije skupova” značajne za usvajanje matematičkih sadržaja već u osnovnoj i srednjoj školi. Ali, teorija skupova je nastala tek u drugoj polovici 19. stoljeća, zato jer njene sofisticirane metode matematici ranije nisu bile potrebne (usp. gore). Dakle, primjene teorije skupova sigurno nisu toliko značajne u osnovnoj i srednjoj školi, da bi nju i na tom nivou trebalo posebno izučavati.

S druge strane, mnogi misle da činjenica što se matematika može (u određenom smislu) reducirati na teoriju skupova, mora naći svoj odraz već u početnim razredima osnovne škole. Konkretnije, to što se pojam broja može skupovno-teorijski definirati, trebalo bi se reflektirati već u osnovnoškolskoj nastavi matematike. Najčešće to misle oni koji o toj definiciji ne znaju ništa, pa se njihov stav stvarno ne temelji na toj mogućnosti, iako se na nju pozivaju kao na „znanstvenu potvrdu” svojega mišljenja. (Kao kad bi znanstveno, fizikalno, objašnjenje razlike krutog i tekućeg, kao razlike kristalične molekularne strukture i amorfne molekularne strukture, trebalo biti relevantno za upoznavanje pučkoškolca s tom razlikom u „prirodi i društvu”!?) Stvarni izvor njihovog uvjerenja najčešće je prosto uočavanje

da je osnovna primjena prirodnih brojeva prebrajanje skupova, pa da stoga skupovi prethode brojevima. U tom smislu možda, ali to ne znači da teorija skupova prethodi teoriji brojeva (aritmetici).

Osnovna primjena kinematike jest određivanje brzina jasno ograničenih dijelova materije (u odnosu na druge takve dijelove), pa to ne znači da teorije (jasno ograničenih dijelova) materije prethodi kinematici. Komadi materije i njihovi međudodnosi, pretpostavljaju se kao nešto bjelodano, u što kinematika unosi određeni red, i nudi sustavnost pogleda na neke probleme vezane uz taj bjelodani predmet. Isto tako i skupove s njihovim međudodnosima treba smatrati nečim bjelodanim, u što aritmetika unosi određeni red, i nudi sustavnost pogleda na neke probleme vezane uz taj bjelodani predmet. Ukratko, prirodno je da se skupovi pojavljuju već u osnovnoškolskoj matematici, ali samo kao intuitivno jasan predmet na koji se primjenjuje osnovnoškolska aritmetika, a ne kao neka nastavna cjelina. Oni se tu nalaze na onaj način na koji se razna vozila nalaze u kinematici („ako se vozilo od Zagreba do Beograda kreće brzinom od 60 km/h . . .”). Pa ipak ni u jednom osnovnoškolskom udžbeniku fizike ne nalazimo naslov VOZILA, iako se u mnogim pučkoškolskim udžbenicima matematike može naći naslov SKUPOVI. Zašto?

Zato što izgleda kao da se skupovi uporno pojavljuju u svoj osnovnoškolskoj i srednjoškolskoj matematici. Naime, to tako izgleda jer se *skupovna notacija* pojavljuje u svoj osnovnoškolskoj i srednjoškolskoj matematici. Na primjer,

3 je prost broj, i

3 je neparan broj,

može se u skupovnoj notaciji zapisati i ovako

$3 \in \{x \mid x \text{ je prost broj}\}$ i

$3 \in \{x \mid x \text{ je neparan broj}\}$.

Uvedemo li pokratu Pr za $\{x \mid x \text{ je prost broj}\}$, i pokratu Np za $\{x \mid x \text{ je neparan broj}\}$ to se može zapisati još kraće:

$3 \in \text{Pr}$ i $3 \in \text{Np}$.

Sada se i logički dosta složena univerzalno kvantificirana (tj. generalna) tvrdnja

Svi su prosti brojevi neparni, može zapisati kao inkluzija

$\text{Pr} \subset \text{Np}$.

Prednosti takvih zapisa (kompaktnost, konciznost, laka čitljivost itd.), koje su dobro poznate i u drugim matematičkim disciplinama, nedvojbene su. Međutim, kako u gornjim primjerima, tako i za svu školsku (a dobrim dijelom i visokoškolsku) upotrebu skupovne notacije, može se egzaktno teorijski dokazati da ne zahtijeva ni skupove ni teoriju skupova. Riječ je o doslovnim pokratama, tzv. kontekstualnim definicijama, koje ne zahtijevaju ni aritmetičke skupove za objašnjenje skupovne notacije u aritmetici, ni geometrijske skupove za objašnjenje skupovne notacije u geometriji, niti išta slično u ostalim jednako elementarnim matematičkim sadržajima. Zainteresirani čitatelj će detaljnije objašnjenje naći u poglavlju *Definicije u matematici*, odjeljak *Kontekstualne definicije*.

No, bez obzira na taj teorijski izuzetno značajni rezultat, očito je da ogromna većina korisnika skupovne notacije na elementarnom nivou, tumači tu notaciju

pozivom na skupove. To je apsolutno prihvatljivo i potrebno, dokle god se skupovi koriste kao intuitivno jasni, „bjelodani predmet“, i dok se od njih ne stvara neka školska kvazi-teorija (usp. gore). Ipak, ostaje otvoreno jedno metodički važno pitanje. Treba li važnu skupovnu notaciju podučavati kao zasebnu cjelinu SKUPOVI (s punom svješću da se radi o usvajanju važne notacije koja se tumači pozivom na „bjelodane skupove“), ili ju je bolje uključivati neposredno u matematičke sadržaje (aritmetiku, geometriju itd.) u kojima se njom koristimo? Razmotrimo prednosti i nedostatke jednog i drugog pristupa, da bismo mogli argumentirano odlučiti.

Jedan od važnijih argumenata za zasebnu cjelinu SKUPOVI jest taj da se oni primjenjuju u svim matematičkim sadržajima, pa nije racionalno u svakoj konkretnoj situaciji iznova razmatrati njihova opća svojstva. To treba da se obavi odjednom i unaprijed za sve kasnije primjene.

Usporedimo to s jednom drugom temom, koja je na isti način, tj. *notacijski*, značajna. Ta tema su FORMULE. I njih primjenjujemo u svim matematičkim sadržajima. One su isto tako nezaobilazne, u osnovnoj i srednjoj školi, iako sofisticirane metode one teorije koja se njima sustavno bavi, tzv. *teorije formalnih jezika*, postaju korisne tek u matematici našeg stoljeća. Da li je ikom palo na pamet da predloži zasebnu nastavnu cjelinu FORMULE, kako ne bismo „u svakoj konkretnoj situaciji iznova razmatrali njihova opća svojstva“. Naravno da nije, ta formule se prirodno pojavljuju tek u aritmetici, geometriji itd., pa se tek tamo (na odgovarajućem nivou) jedino i može razumjeti njihovo značenje. Ništa se tu ne da učiniti „jednom i unaprijed za sve kasnije primjene“.

No isto je tako sa skupovima, osim ako ne mislimo da bavljenje predaritmetičkim, predgeometrijskim itd. skupovima slova (koje tako često susrećemo u osnovnoj školi) ne otvara neke posebne mogućnosti. Međutim, baš je to uvodno bavljenje predmatematičkim skupovima ono najlošije što u školi nalazimo o skupovima, pa ne bi trebalo poslužiti kao uzor (za izmišljanje eventualnih „predmatematičkih formula“ sličnog karaktera).

Objasnilo, ukratko, što je loše u tom najlošijem, predmatematičkom (i nematematičkom) bavljenju skupovima. Umjesto teškog pitanja, što je skup, postavimo lakše (notacijsko pitanje): Čime trebamo nadopuniti izraz

(1) ... je skup,

pa da dobijemo suvisli (eventualno istiniti) iskaz. Radi lakšeg uočavanja bitnih aspekata problema kojim se ovdje bavimo razmotrite i slično (notacijsko) pitanje: Čime trebamo nadopuniti izraz

(2) ... je matematičar,

pa da dobijemo suvisli (eventualno istiniti) iskaz.

Izraz (1) može se suvislo nadopuniti na razne načine, na primjer

(1') {1, 2, 3} je skup

(1'') {Marko, Ivan} je skup.

(1''') {a, b, c} je skup.

Slično, izraz (2) može se suvislo nadopuniti na razne načine, na primjer

(2') Einstein je matematičar.

(2'') On je matematičar.

Ti odgovori ne objašnjavaju što je skup (ili što je matematičar), oni to pretpostavljaju kao „bjelodano”, ali zato pokazuju kako se zapisuju skupovi, kako se grade njihova imena. Usporedimo li, naime, nadopune od (1) s nadopunama od (2) uočiti ćemo da su izrazi (1) i (2) nadopunjeni imenima. U slučaju (1'), to je ime za jednostavni skup brojeva, koji se u matematici može prirodno pojaviti kao skup rješenja jednadžbe trećega stupnja. U slučaju (1''), to je ime za skup ljudi koje se u normalnoj matematici nikada neće pojaviti, a vjerujemo da ni drugdje neće biti ni od kakve koristi. Ipak, pučkoškolski i osnovnoškolski udžbenici *matematike* često vrve baš takvim imenima skupova. U slučaju (1'''), to je ime za *neodređeni* skup, za koji bismo znali koji je, tek onda kada bismo znali što imenuju „a”, „b” i „c”. (Usporedite taj slučaj s nadopunom (2''), koja je isto tako neodređena.) Upotreba takvih neodređenih imena u matematici je izuzetno značajna, ali učenicima teška.

No upravo ta teška neodređena imena najčešće ćemo naći u lošem „predmatematičkom i nematematičkom” bavljenju skupovima!? Teškoća se otklanja tako što se skup $\{a, b, c\}$ proglašava skupom slova! Čak i ako trenutno zanemarimo problem da se time u imenu skupa sami predmeti $\{a, b, c\}$ upotrebljavaju kao imena tih istih predmeta (kao kad bismo izraz „... je matematičar” umjesto Einsteinovim imenom nadopunili samim Einsteinom; usp. poglavlje *Brojevi i brojke*), ostaju nam mnogi drugi problemi. Zašto se standardna i izuzetno važna notacija za neodređena imena (tj. varijable), koju učenik kad-tad mora usvojiti, uvodi u jednom sasvim drugom značenju? Ako se prvih pet do šest godina učenja matematike skup $\{a, b\}$ stalno i uporno pojavljuje kao skup dvaju prvih slova abecede, neće li on u svijesti učenika ostati to isto i kasnije, kada bude čitao da, npr. svaki skup pravih kompleksnih rješenja kvadratne jednadžbe $\{a, b\}$ ima svojstvo da je $\bar{a} = b$? Neće li on i zakone poput

$$a(b + c) = ab + ac \quad \text{ili}$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

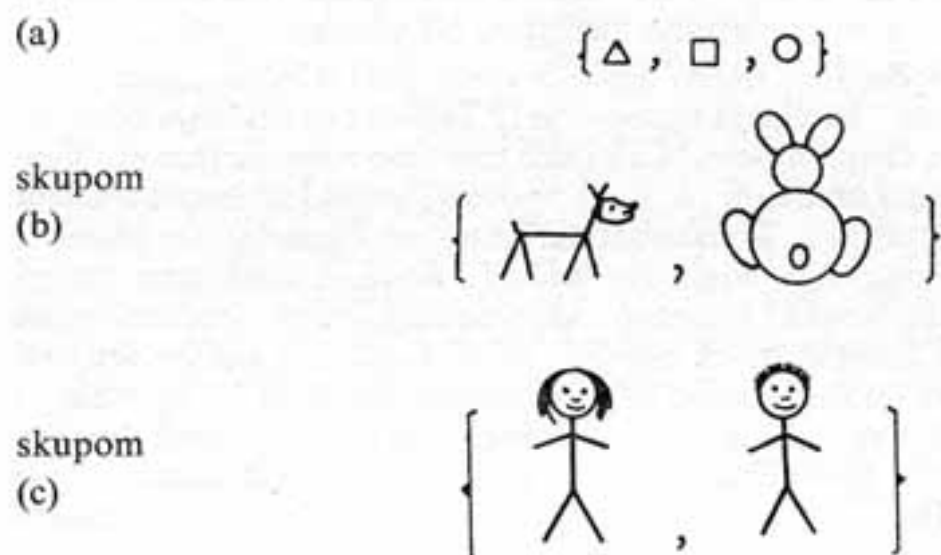
doživljavati kao zakone o slovima? Ovaj je autor u više navrata čuo da se aritmetika bavi brojevima, a algebra slovima!? Nije li bavljenje skupovima slova put koji olakšava usvajanje takvih nakaradnih ideja?

S obzirom na važnu i standardnu upotrebu slova kao varijabli, trebalo bi izbjegavati bavljenje *skupovima slova*, u kojima slova imaju sasvim drugu upotrebu (uostalom, egzaktno gledano, to je nekonzistentna upotreba kojom se upotreba imena brka sa spominjanjem imena; vidi dalje).

Kako to da u osnovnoškolskoj nastavi o skupovima tako prominentno mjesto ipak zauzimaju skupovi slova? Jedan dio odgovora već smo dali. Ako se skupovi žele prije aritmetike, prije geometrije itd., dakle prije matematike, onda to ne mogu biti matematički najnormalniji skupovi brojeva, točaka itd. nego to moraju biti neki nematematički skupovi. No, u tom nužno nematematičkom izboru odluka pada na nešto što će se ipak često pojavljivati u matematici (iako u bitno drugačijoj funkciji, čega odabirači možda nisu svjesni), a to su slova. No to je najgori izbor. Čisti nematematički skupovi, iako beskorisni, bar bi nanijeli manje štete. (Zamislimo sličnu situaciju. Zbrajanje razlomaka učenici često teže usvajaju, ali ga kad-tad moraju usvojiti. Možda bi bilo zgodno da se puno prije uvođenja razlomaka u školi pozabavimo nekim „brojevnim kućicama na dva kata” kao što su $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$ i sl., koje bismo mogli zbrajati tako da prvi kat zbrojimo s prvim a drugi s drugim, npr.

$\frac{1}{2} + \frac{3}{5} = \frac{4}{7}$. To je sasvim nepotrebno i beznadno beskorisno, iako je odgovarajuća struktura $(\mathbb{N}^2, +)$ jedan legitimni komutativni grupoid. Ali možda nije loše da se djeca navikavaju na upotrebu razlomačke crte i znaka $+$ u sasvim nestandardnoj uporabi!? Suluda ideja! Što mislite o skupovima slova?)

Tako stoji sa skupovima kada se guraju prije matematike (e da bi se uveli „odjednom i unaprijed za sve kasnije primjene“). Međutim, često se skupovima moraju baviti i prvoškolci, koji još ne poznaju ni slova. Oni su bar pošteđeni skupova slova, ali ih zato čekaju još veća iskušenja. Moraju se baviti skupom



i drugim sličnim skupovima. Ali što su elementi tih skupova? Prepoznamo li na slici (c) Anu i Marka, tada možemo reći da su Ana i Marko elementi trećeg skupa. No što su elementi drugog skupa? Možda ćemo prepoznati psa Lunju, no teško ćemo prepoznati koji je zec na slici (b). Ili su elementi drugog skupa životinjske vrste, pas i zec? Možda su, zapravo, elementi trećeg skupa ljudske spolne vrste, žena i muškarac? Ili, možda, djevojčica i dječak? Stvari su sve nejasnije. Pređimo zato na prvi, matematički skup. Da li su njegovi elementi vrste geometrijskih likova, trokut, krug i kvadrat, ili su to možda konkretni trokut, krug i kvadrat nacrtani na slici (a)?

Ta bi pitanja bila smješna kada prvoškolci širom svijeta (na sleću ne i u SRH, koliko je autoru poznato) ne bi morali odgovarati na ovakva pitanja:

Da li je istina da je

(p₁) $\Delta \in \{\Delta, \square, \circ\}$

Da li je istina da je

(p₂) $\left\{ \begin{array}{c} \text{muškarac} \end{array} \right\} \in \left\{ \begin{array}{c} \text{žena} \\ \text{muškarac} \end{array} \right\}$

i tako dalje. Kako odgovoriti na pitanje (p₁)? Ako su elementi skupa (a) vrste geometrijskih likova, onda sa „Da“. Ako su to konkretni likovi na slici onda je odgovor

„Ne”, jer trokut desno od \in nije onaj isti koji je lijevo od \in . Uostalom, pokušajte razmisliti da li je

$$(p_3) \quad \triangle \in \{ \triangle, \square, \circ \} ,$$

i da li je

$$(p_4) \quad \nabla \in \{ \triangle, \square, \circ \} ?$$

U slučaju da su elementi skupa (a) konkretni likovi sa slike, odgovor je u oba slučajeva „Ne”. Što je odgovor ako su elementi vrste geometrijskih likova? I desno i lijevo od \in pojavljuje se, i u (p₃) i u (p₄), ista vrsta geometrijskog lika, trokut. Izgleda, dakle, da je odgovor u oba slučajeva „Da”. U sličnim smo dilemama u vezi s pitanjem (p₂), u kojem se pojavljuju slike ljudskih likova. Ako je riječ o konkretnim osobama, odgovor „Da” zahtijeva da lijevo od \in prepoznamo istu osobu koja je u (p₂) naslikana desno od \in . Inače trebamo odgovoriti sa „Ne”. No, ako je riječ o spolovima, za „Da” je dovoljno i lijevo i desno od \in prepoznati isti spol, makar imali i slike različitih osoba. Ukratko, dileme su velike, kriteriji nisu jasni.

Što da rade prvoškolci? Mi nismo našli jednoznačne odgovore na postavljena pitanja. Još manje ih mogu naći prvoškolci. Kako li maleni pišu svoje zadatke? Tako da „nauče” odgovore koji se od njih očekuju, bez obzira imaju li ti odgovori smisla, da li su točni i da li su uopće mogući. Naravno, različiti autori očekuju, i kao rješenja na kraju svojih udžbenika daju, različita rješenja. Jedna analiza, koju je proveo H. Freudenthal, pokazuje da većina autora u svojim udžbenicima zahtijeva da vrijedi

$$(p_1) \quad \triangle \in \{ \triangle, \square, \circ \} ,$$

ali ne vrijedi

$$(p_3) \quad \nabla \in \{ \triangle, \square, \circ \} ;$$

$$(p_4) \quad \triangle \in \{ \triangle, \square, \circ \}$$

To bi značilo da za njih elementi skupa $\{ \triangle, \square, \circ \}$ nisu ni konkretni likovi na slici, jer vrijedi (p₁), ni vrste likova, jer ne vrijedi (p₄), čak ni neka posebna vrsta međusobno kongruentnih likova, jer ne vrijedi (p₃). Naravno oni toga nisu svjesni, pa će najčešće pisati (u istom udžbeniku) da su elementi skupa (a) baš konkretni likovi sa slike. S druge strane većina autora smatra da vrijedi

$$(p_2) \quad \text{stick figure} \in \{ \text{stick figure}, \text{stick figure} \}$$

i da, osim toga, vrijedi

$$(P_5) \quad \text{stick figure} \in \{ \text{girl stick figure}, \text{boy stick figure} \}$$

iako lik dječaka lijevo od \in nije kongruentan liku dječaka desno od \in . Ukratko, izgleda da se za likove živih bića zahtijeva sličnost likova s lijeve i desne strane od \in , dok se za likove mrtvih bića traži identičnost oblika i položaja!? Naravno da ovakvi principi identifikacije nikada nisu eksplicitirani u analiziranim udžbenicima (kao ni u odgovarajućim priručnicima za nastavnike). Njihovi autori naprosto nisu svjesni problema koje stvaraju sebi i svojim čitateljima (učenicima i nastavnicima).

Problem je najčešće u tome da se sam predmet koristi kao ime tog istog predmeta. To, naravno, dovodi do određenih teškoća. Najočitiija jest ta da se takvim izborom imena onemogućava njegova reproducibilnost. Pogledajmo, naime, sljedeću sliku.



Želim li išta reći o konkretnim (fizičkim) likovima na toj slici, najprije ih moram imenovati. Imena su proizvoljna, pa se moramo odlučiti između raznih, nejednako dobrih, mogućnosti. *Najgori izbor* su sami konkretni likovi, jer se iz slike ne mogu vaditi pa su zato neupotrebljivi. Međutim, imenujem li npr. trokut sa „a”, kvadrat sa „b” i krug sa „c”, stvari postaju jednostavnije. Tada je lako govoriti o likovima na slici:

Kvadrat b je između trokuta a i kruga c .

Skup $\{a, b, c\}$ sadrži a . (Itd.)

Naizgled bezazleniji i pogodniji izbor imena, koji je, vidjeli smo, naročito popularan u pučkoškolskoj „teoriji skupova”, jest izbor slike predmeta za njegovo ime. To je izbor koji smo već razmotrili na primjerima skupova

$$(b) \quad \{ \text{dog}, \text{rabbit} \} \quad i$$

$$(c) \quad \{ \text{girl stick figure}, \text{boy stick figure} \},$$

a tu spada i primjer skupa (a), kada se ime u (a) ne shvati kao ime u kojem se sami predmeti koriste kao imena, što je još gora varijanta izbora.

Razmatranje tih primjera jasno je ukazalo na opće probleme identifikacije, koje stvara slika kada se upotrijebi kao ime. Na primjer, da li je u (b) imenovana vrsta psa, ili određeni pas Lunjo (ili možda čak konkretna slika psa). Da li je u (c)

imenovana Ana, ili ženski rod, ili pojam djevojčice (ili možda čak konkretna slika djevojčice). S tim smo se problemima već sreli. Osim toga, uočimo da se na slikama (b) i (c) vide još i ruke, noge, glave, oči, uši, repovi itd. Imenuju li slike sve što se na njima vidi? Ako ne imenuju, po kojim se kriterijima određuje što imenuju, a što ne imenuju?

Slika preslikava mnogostruko. Želimo li je upotrijebiti kao ime, moramo apstrahirati od te mnogostrukosti i dopustiti joj samo jedno od mnogih značenja, koja nosi kao slika. To možemo postići stilizacijom iako je i ona, najčešće, značenjski mnogostruka. Zato, u krajnjoj liniji, kada stvarno imenujemo odustajemo od slika i služimo se imenima, jer ona *ne preslikavaju* stvari i pojmove koje imenuju, ali ih baš zbog toga preciznije označavaju. Ime svojim neprepoznatljivim oblikom lakše označava, dok slika svojem izvorniku sličnim oblikom upečatljivije predstavlja. O stvarima govorimo (izvještavamo, pitamo, tvrdimo . . .) upotrebljavajući njihova imena, a ne njihove slike.

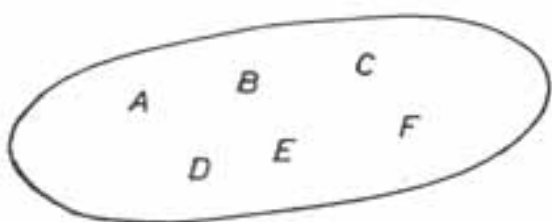
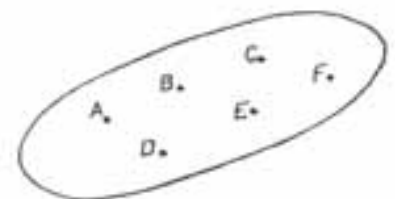
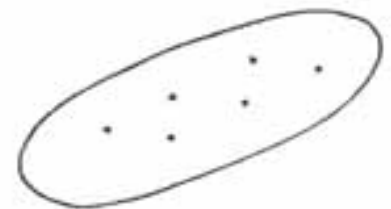
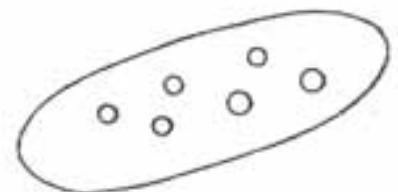
Gledanjem vidljivih stvari dovodimo ih u našu svijest ali isto to postizemo i gledanjem njihovih slika ukoliko same stvari nisu prezentne. Jasno je stoga, da su pučkoškolski udžbenici puni slika (budući ih ne možemo napuniti samim stvarima, koje želimo dovesti u žižu učenikova interesa). Lingvistički opis stvari (najčešće je to složeno ime) zahtijeva od mališana veće napore od gledanja slike. No, kada su stvari, koje želimo s učenicima razmotriti, pomoću slike dovedene u njihovu svijest, daljnji govor o njima moguć je jedino upotrebom odgovarajućih imena, a ne više slika. Konkretizirajmo ta nešto općenitija razmatranja na primjeru skupova u školi.

Najčešće upotrebljavana vrsta slike, kojom se (neprezentni) skup uvodi u školska razmatranja jest tzv. Vennov dijagram. On je slika skupa (a ne ime skupa). Na primjer, skup jabuka na stolu može biti predstavljen sljedećom stiliziranom slikom.

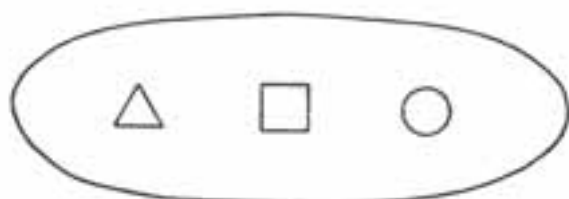
Veliki oval predstavlja stol, dok mali kružići predstavljaju jabuke. Striktno govoreći; na slici su nacrtane *konkretne* jabuke i stol, a oni tek mogu asociirati na *apstraktni* skup jabuka na stolu. Samu tu asocijaciju (kao ni sam *apstraktni* skup) nije moguće nacrtati, nju kao i njega treba objasniti. Sliku je moguće još više stilizirati, npr. do ovog oblika.

Potom je možemo pretvoriti u „kartu“ (poput zemljopisne), tako da imenujemo pojedine jabuke na stolu.

Ta „karta“ više nije samo slika, nego je dijelom i lingvistički objekt, koji omogućava da naslikane predmete lakše povežemo s njihovim imenima, i da osim toga pogodnije imenujemo asociirani skup jabuka na stolu kao $\{A, B, C, D, E, F\}$. Naravno, sliku skupa treba razlikovati od njegovog imena. Vidjeli smo do kakvih nesuvislosti dolazimo kada sliku smatramo imenom. Do sličnih gluposti dovodi i zamjena imena slikom. Naime, često ćemo u udžbenicima naići na ovakvu sliku skupa jabuka A, B, C, D, E i F .



Jasno je da to više nije nikakva slika („A” ćemo teško, kroz prizmu bilo kakve stilizacije, prepoznati kao jabuku), a nije ni standardno ime za odgovarajući skup (ono je $\{A, B, C, D, E, F\}$). Porijeklo takvih „slika”, to jest porijeklo tzv. Vennovih dijagrama shvaćenih kao nekih mješanaca imena i slike, vjerojatno je u jednoj vrsti kvazi-didaktičkog pokušaja da se olakša (!?) prelaz sa slike na ime, postepenim pretvaranjem slike u ime.



Evo jednog takvog postupka, koji nam je samozadovoljno prikazala jedna aktivna nastavnica. Polazi se od slike skupa (tzv. Vennovog dijagrama),

koja se u prvom koraku transformira u,



da bi se potom transformirala u,



i konačno, dodavanjem zareza, u ime



Na teškoće takvog „slikovnog imena” već smo ukazali. Prednosti imena baš i jesu u tome da ono nije slika. (Budući da nismo bili u mogućnosti da to objasnimo spomenutoj nastavnici, upitali smo je zašto vlastito ime IVO ne objašnjava na sličan način. Pođimo od Ivine slike



pa nizom transformacija



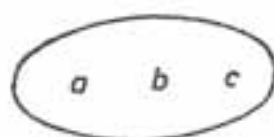
dođimo do imena



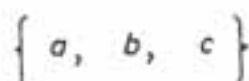
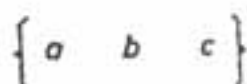
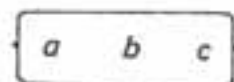
Možda je zbog nečega doista dobro u slovu „O” vidjeti Ivinu glavu?! Bila je potpuno zapanjena iako je ovaj postupak analogan njenom postupku.)

Naravno da stapanje imena i slike nije nikakvo olakšanje, ako znamo da je osnovna ideja imena u tome da ne bude slika. Druga je mogućnost onda da se slika

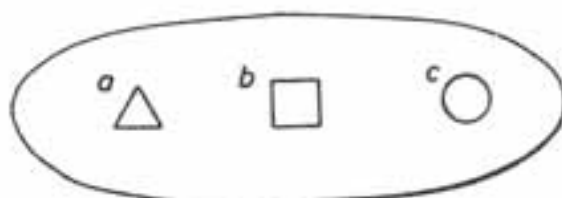
odmah zamijeni nestandardnim imenom



koje se transformira u standardno ime sljedećim nizom transformacija.



Za to navavno više nema nikakvih razloga, sliku smo i tako odbacili. Jedino je normalno da krenemo od „karte“ (imenovane slike),



iz koje je jasno vidljivo da trokut ima ime „a“, kvadrat „b“, a krug „c“, pa da potom objasnimo da će odgovarajući skup (koji sadrži a, b i c) biti imenovan sa

$$\{a, b, c\}.$$

Dapače, ni sam oval na gornjoj slici nema mnogo smisla. On ovdje sigurno ne predstavlja stol na kojem su a , b i c , nego treba da predstavi asocijaciju predmeta a , b i c u skup, da ga na neki način ipak naslika (dakle da naslika *apstraktni* skup $\{a, b, c\}$, a ne samo *konkretne* predmete a , b i c). To ima određene prednosti, a stvara i prilične probleme. Jesu li ovo slike identičnih skupova (oba su prazni!)?



Ili puno banalniji, ali za prvoškolce značajni, problem. Neće li oni steći dojam da se skupovi mogu zamišljati samo s elementima koji su jedni drugima dovoljno blizu da budu zaokruženi ovalom? Nije li stoga bolje poći od slike



na kojoj su naslikani likovi a , b i c , pa potom *objasniti* da skup koji sadrži sva tri lika označavamo sa $\{a, b, c\}$, i ne pokušavajući ga nacrtati.

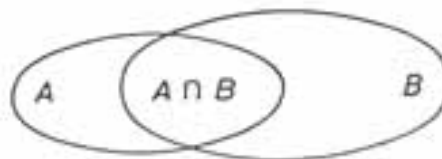
Uostalom, recimo na kraju, da tzv. Vennovi dijagrami, uopće i nisu Vennovi nego Eulerovi (Vennova je njihova ingeniozna upotreba, s dodatnim tipično Vennovim „šrafiranjem praznoga“ i „križićima postojećeg“, u logici pojmova). No Eulerov dijagram, npr.



predstavlja skup točaka omeđenih ovalom (ne prazan skup, kako se to uobičajilo u udžbeničkoj „teoriji skupova“), koji se koristi kao paradigmatički primjer skupa. Ovi skupovi osobito su pogodni za paradigmatičko (zorno) predočavanje odnosa među skupovima, npr.



i operacija među skupovima, npr.



Didaktička vrijednost ovih paradigmatičkih primjera je neprocjenjiva, za razliku od gotovo nikakve vrijednosti tzv. Vennovih dijagrama koji su mješanci slike i imena.