Mr ZVONIMIR ŠIKIĆ, dipl. inž. mat.

YU ISSN 0351-627X
STCDD

»Strojarski« dokazi u matematici

UDK 51:621

Kako prezentirati određenu matematičku teoriju budućem inženjeru?
U odgovoru na ovo pitanje polazi se od dvije osnovne pretpostavke: 1) da inženjer treba razumjeti osnovne ideje teorije, pa na osnovu toga i njen značaj za njegovu struku, što će ga motivirati da teorijom i operativno ovlada, 2) da inženjer nije zainteresiran za logičku strukturu same teorije: a) za međuovisnosti tvrđenja teorije, b) za nalaženje minimalnih uvjeta izvođenja ovih međuovisnosti i c) za reduktivno zasnivanje teorije kao čiste teorije, dakle kao teorije koja se pri vlastitom zasnivanju ne koristi svojim primjenama nego ih tek time, što je od njih nezavisno zasnovana, omogućuje.

Pretpostavka 1) je potpuno opravdana pa je stoga i općeprihvaćena. O pretpostavci 2) treba reći nešto više.

Predavač mora biti zainteresiran za logičku strukturu teorije koju predaje, jer ako mu ona nije poznata neće moći ispuniti zahtjev 1). Međutim, **to ne znači** da predavač svoje poznavanje logičke strukture (a), b) i c)) treba prenositi na studenta (budućeg inženjera). Naime, to bi upravo onemogućilo (brzo) upoznavanje studenata s osnovnim idejama i rezultatima predavane teorije, tj. onemogućilo bi ispunjavanje osnovnog zahtjeva 1).

U praksi se dakle susreću dva problema. Prvo — budući da predavač najčešće ne poznaje logičku strukturu teorije koju predaje on se striktno drži udžbenika, koji je najvjerojatnije i sam nastao kompiliranjem i prepisivanjem nekih drugih udžbenika itd. do nekog »praudžbenika« koji je stvarno produkt dubljeg poznavanja teorije i njene logičke strukture. Naravno, **jedan** mogući produkt. Uzme li se u obzir da je taj jedan od mnogih mogućih produkata posljedica takvih razloga koji se rijetko poklapaju s raznovrsnim svrhama naših predavača (a čega oni, ne poznajući pozadinu toga produkta, nisu svjesni) jasno je da su predavanja najčešće neadekvatna.

Npr. udžbenik kojim se služi predavač diferencijalnog i integralnog računa[1] na tehničkom fakultetu gotovo uvijek potiče od »praudžbenika« čiji je razlog bilo (baš) eksplicirанje logičke strukture računa: a) neovisnosti diferencijalnog računa o pojmovima integralnog računa, b) generaliziranje pojma funkcije vezano uz minimizaciju uvjeta koje funkcije trebaju zadovoljavati u ključnim teoremima računa, c) aritmetizacija, tj. odustajanje od zornih predodžbi i geometrije itd. Ovaj razlog nameće krajnjem produktu (udžbeniku) određeni oblik. Prepisivanjem i kompiliranjem zaboravlja se razlog koji je porijeklo toga oblika, te se sam oblik odjednom smatra nečim što je nezavisno od tog razloga, nečim što diktira sam račun. Dolazi dakle do neopravdane kanonizacije toga oblika. S obzirom na pretpostavku (i zahtjev) 2) jasna je neadekvatnost predavanja u ovom slučaju: predavač misli da predaje račun onako kako to sam taj račun nalaže, dakle u skladu s 1), a zapravo predaje račun s posebnim naglaskom na njegovoj logičkoj strukturi (u potpunoj suprotnosti s osnovnom pretpostavkom 2).

Drugi problem vezan je uz predavače koji poznaju logičku strukturu teorije, ali su pored toga njome toliko oduševljeni da smatraju kako je treba znati i svaki student (npr. budući inženjer). Međutim, ovim predavačima je u većini slučajeva poznato da student najprije mora savladati elemente teorije, da bi se potom mogao upoznati s njenom logičkom strukturom. On će dakle svoje poznavanje logičke strukture računa početno iskoristiti za ostvarenje cilja 1) i u toj prvoj fazi će prihvatiti 2). Nakon toga najčešće neće imati vremena za svoje logičke želje. Drugi je problem, dakle, vrlo rijetko stvarni problem.

Ove opće teze mogu se potkrijepiti nekim primjerima.

1) Umjesto nezgrapnog naziva »diferencijalni i integralni račun« u nastavku se koristi kraći naziv »račun«.

Primjer 1:

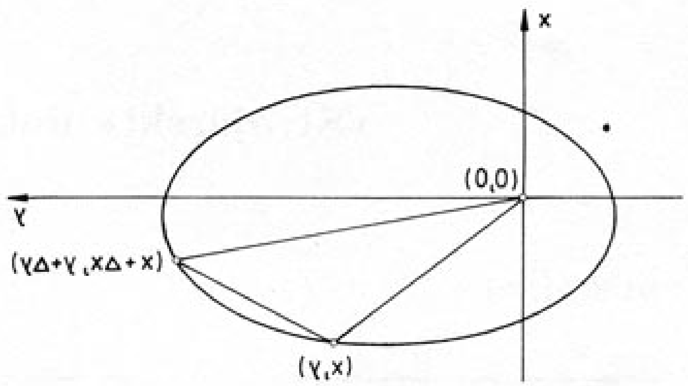
Funkcija se kao osnovni predmet matematičkih razmatranja pojavljuje s Eulerovim »Introductio...«. Do Eulera su osnovni predmet matematičke analize bile krivulje, dakle geometrijski predmeti. Od Eulera to postaju (aritmetizirane) funkcije. Istina, termin »funkcija« uveo je već Leibniz ali u značenju koje nije Eulerovo (dakle današnje). Za Leibniza su varijable: apscisa x, ordinata y, subtangenta t, subnormala n, duljina luka s, površina A, koje su vezane uz krivulju, bile funkcije. Ove funkcije krivulje bile su dakle prvenstveno geometrijski pojmovi. Veze među ovim varijablama (geometrijskim veličinama koje su funkcije krivulje) opisivane su 1) jednadžbama, ili u transcedentnim slučajevima 2) verbalnim opisima i geometrijskim i mehaničkim konstrukcijama. Te su veze među varijablama bile sekundarne, prva je i osnovna bila veza varijable i krivulje. Ovdje je, naravno, pojam **nezavisne** varijable (koji je odsudan za Eulerovo i današnje razumijevanje funkcije) nešto potpuno strano. Isto je tako strana i (današnja) usmjerenost funkcije od nezavisne k zavisnoj varijabli.

Pomicanjem naglaska na jednadžbe i formule koje vezuju varijable, pažnja se okreće k varijablama kao veličinama koje **ovise** o drugim varijablama, a u drugi plan dolazi veza varijabli s krivuljom. Međusobne veze varijabli (dakle jednadžbe, formule itd.) postaju predmetom razmatranja bez obzira na veze varijabli s krivuljom. Geometrijska analiza prerasta u algebarsku. Tu je porijeklo nove Eulerove funkcije. Euler kaže: »Funkcija varijabilne veličine je analitički izraz izgrađen od te varijabilne veličine i brojeva (ili konstantnih veličina).«

Ovakav pojam funkcije je i osnovni predmet dadašnjeg računa. S druge strane, osnovni predmet primjene toga računa su stare varijable (stare Leibnizove funkcije) vezane uz krivulju (u geometriji) ili neki fizikalni proces (u fizici) itd. Logičko struktuiranje današnjih udžbenika diferencijalnog i integralnog računa primjereno je novom pojmu funkcije što dovodi do toga da studenti imaju teškoća s primjenama stečenog znanja. Stoga fizičar najčešće studentima predaje svoju verziju računa, jer nije zadovoljan s onim što njegovim studentima predaje matematičar. Problema ima i u (novoj) matematici. Npr. u vezi s pojmom diferencijala. Ako je y funkcija od x u novom smislu (dakle zavisna varijabla) onda je dy funkcija od x ovisna i o parametru dx, također u novom smislu. Tako je u diferencijalnom računu. Ali u integralnom računu je diferencijal koji se javlja u izrazu $\int (u\,dx + v\,dy)$ prirodnije shvatiti diferencijalom varijable shvaćene u starom smislu (a tako se on i shvaća u modernoj diferencijalnoj geometriji).

Naš predavač, koji ne zna da je izvor onog oblika računa, kojeg on predaje, upravo novi pojam funkcije i da je tim izvorom zanemaren stari, za primjene značajniji pojam, ne može ni prilagoditi svoja predavanja rehabilitaciji starog pojma. On će se čuditi zašto je njegovom studentu stran slijedeći izvod formule za površinu omeđenu jednostavnom zatvorenom krivuljom, jer ne uočava da se u tom izvodu prelazi sa starog pojma funkcije na novi pojam (njegov student uči samo novi); ili će što je još gore smatrati taj izvod nekorektnim (fizičarskim?).

Površina P trokuta čiji su vrhovi točke (0, 0), (x, y) i $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ (vidi sliku 1.) je



Slika 1. Izračunavanje površine krivuljnim integralom

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \\ x + \Delta x & y + \Delta y & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x\,\Delta y - y\,\Delta x).$$

Dakle, ukupna površina zatvorena krivuljom je

$$\frac{1}{2} \oint x\,dy - y\,dx).$$

Predavač može ovaj izvod smatrati zbrkom koju on raščišćava služeći se (isključivo) novim pojmom funkcije. Time gubi vezu s primjenama, pa nije ni čudno da fizičar studentu predaje svoj račun koji čuva tu vezu. Druga je alternativa da predavač **modernizira** svoja predavanja uzimajući u obzir i stari pojam funkcije (varijable). Taj je pojam, naime, osnovni pojam **moderne** diferencijalne geometrije, **modernog** računa diferencijalnih formi itd.

Primjer 2:

Nije sasvim jasno kako je došlo do toga da se kanonizira oblik računa u kojem diferencijalni račun u potpunosti prethodi integralnom. Budući da je, u prvoj fazi razvoja računa, algebarizacija (i aritmetizacija) diferencijalnog računa bila jednostavnija od algebraizacije (i aritmetizacije) integralnog računa, to je vrlo vjerojatno da su autori **čiji je naglasak bio na algebraizaciji [a potom i aritmetizaciji]** težili da jednostavniji dio razviju što je god moguće nezavisnije od složenijeg dijela. Naravno, da predavač kojem nije do algebraizacije i aritmetizacije i koji se u svojim predavanjima slobodno koristi zornim predodžbama i geometrijom ne treba ove razloge uzeti u obzir. Može se reći da je sva tajna računa upravo u vezi diferencijalnog računa s integralnim, koja se iskazuje **osnovnim teoremom diferencijalnog i integralnog računa,** pa je upravo žalosno da predavač kojem nije stalo do algebraizacije i aritmetizacije (npr. u uvodnom kursu računa za bilo koga, ili svakom kursu za inženjera) i koji se slobodno koristi zornim predodžbama u svojim predavanjima, inzistira na razdvajanju diferencijalnog i integralnog dijela, naprosto zato što misli da to razdvajanje nalaže sam račun, a ne algebraizacija i aritmetizacija kojoj on i tako ne daje neku važnost (u svojem kursu).

Evo jednog konkretnog primjera koristi od nerazdvajanja. Taylorova se formula može izvesti (i najčešće se izvodi) striktno u okviru diferencijalnog računa. Međutim, njeno izvođenje u okviru jedinstvenog računa je neuporedivo brže i jednostavnije:

Neka su m i M donja i gornja međa funkcije $f^{(n+1)}$ na intervalu $[a, x]$

$$m < f^{(n+1)}(x) < M. \tag{1}$$

Integrira li se ova nejednadžba $(n + 1)$ puta od a do x dobiva se

$$m\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} < f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}\right) < M\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

odakle slijedi da je

$$m < \frac{(n+1)!}{(x-a)^{n+1}}\left(f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}\right)\right) < M$$

ako je $(x - a)^{n+1} > 0$, a nejednakosti se obrću za $(x - a)^{n+1} < 0$. U oba slučaja iz (1) slijedi

$$\frac{(n+1)!}{(x-a)^{n+1}}\left(f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}\right)\right) = f^{(n+1)}(\xi)$$

to jest

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Primjer 3:

Često se smatra da diferencijalni račun treba prethoditi integralnom još i zato što je deriviranje elementarnih funkcija jednostavnije od njihovog integriranja. Taj razlog nije dovoljan za potpuno razdvajanje diferencijalnog i integralnog računa čak i da je istinit. Međutim, on i nije istinit. Deriviranje elementarnih funkcija je jednostavnije od njihovog integriranja samo u aritmetiziranoj analizi, dakle onoj koja odbacuje zorne predodžbe i geometriju. Koriste li se ova sredstva (što je razumno u uvodnom kursu računa za bilo koga i svakom kursu računa za inženjera) stvari stoje drugačije.

A. Gotovo je trivijalno dokazati da je

$$\int x^\alpha \, dx = k \cdot x^{\alpha+1}$$

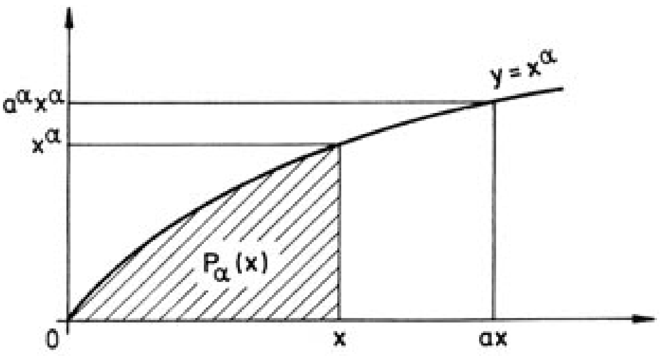
i to bez obzira je li $\alpha \in N$, $\alpha \in Z - N$, $\alpha \in Q - Z$ ili $\alpha \in R - Q$. Formula

$$\frac{d}{dx}x^\alpha = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

zahtijeva pak posebno razmatranje za svaki od ovih slučajeva (za slučaj $\alpha \in R - Q$ obično se odustaje od strogo aritmetiziranog dokaza i koristi se intuicija neprekinutosti dakle jedna zorna predodžba!).

Evo tog gotovo trivijalnog dokaza.

Neka je $\alpha > 0$ i neka je graf funkcije $y = x^\alpha$ prikazan slikom 2.



Slika 2. Integral od x_α

Tada je $\int_0^x x^\alpha \, dx = P_\alpha(x)$ površina prikazana na slici.

Transformacija koja svaku točku (x, y) preslikava u točku $(ax, a^\alpha y)$ preslikava graf funkcije $y = x^\alpha$ u samog sebe, a površinu $P_\alpha(x)$ u površinu $P_\alpha(ax)$. Osim toga, budući da ta transformacija rasteže (ili steže) os x za faktor a, a os y rasteže (ili steže) za faktor a^α to ona svaku površinu rasteže (ili steže) za faktor $a^{\alpha+1}$. Dakle

$$P_\alpha(ax) = a^{\alpha+1} P_\alpha(x)$$

odakle za $x = 1$ slijedi

$$P_\alpha(a) = a^{\alpha+1} P_\alpha(1)$$

što nakon zamjene a sa x daje

$$P_\alpha(x) = x^{\alpha+1} P_\alpha(1)$$

tj.

$$\int_0^x x^\alpha \, dx = P_\alpha(1)\, x^{\alpha+1}.$$

Uvede li se umjesto oznake $P_\alpha(1)$ jednostavnija oznaka $p(\alpha)$ slijedi željeni rezultat u ovom obliku

$$\int x^\alpha \, dx = p(\alpha)\, x^{\alpha+1}.$$

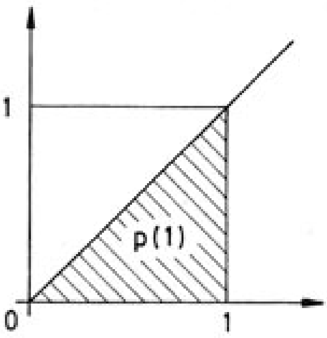
Iz njega prema osnovnom teoremu diferencijalnog i integralnog računa slijedi odgovarajući rezultat o deriviranju funkcije $y = x^\alpha$

$$\frac{d}{dx} x^\alpha = \frac{x^{\alpha-1}}{p(\alpha-1)}.$$

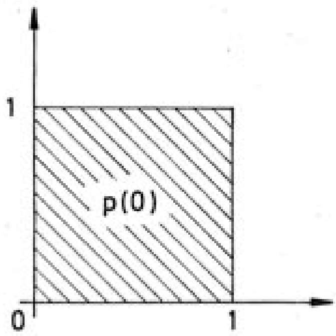
Ni nalaženje konstanti $p(\alpha) = \int_0^1 x^\alpha \, dx$ nije posebno teško. Geometrija daje jednostavan odgovor u ova dva slučaja

$p(0) = 1$ (vidi sl. 3.)

$p(1) = \frac{1}{2}$ (vidi sl. 4.)



Slika 3. p (6)



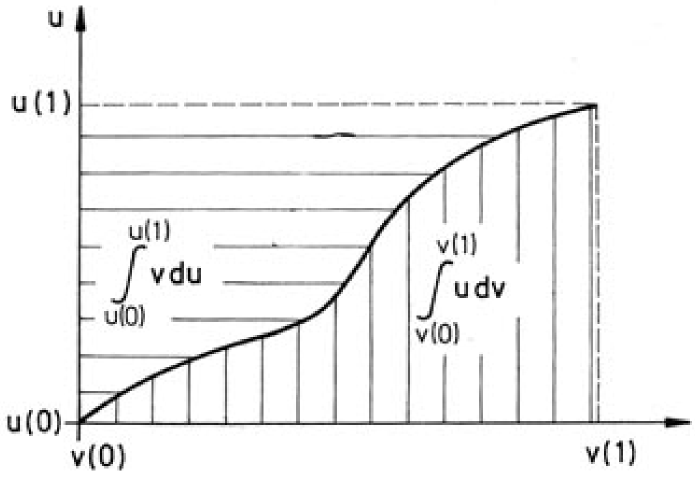
Slika 4. p (1)

U općem slučaju vrijednost $p(\alpha)$ nalazi se na ovaj način.

$$p(\alpha+\beta) = \int_0^1 x^{\alpha+\beta} \, dx = \int_0^1 (x^\alpha)(x^\beta \, dx) =$$

uz supstitucije $x^\alpha = u$ i $p(\beta)\, x^{\beta+1} = v$

$$= \int_{v(0)}^{v(1)} u \, dv.$$



Slika 5. Parcijalna integracija

No iz slike 5. lako se vidi da je

$$\int_{(v0)}^{(v1)} u \, dv = u(1)\, v(1) - \int_{(u0)}^{(u1)} v \, du.$$

Dakle

$$\int_{(v0)}^{(v1)} u \, dv = u(1)\, v(1) - \int_{(u0)}^{(u1)} v \, du =$$

$$p(\beta) - \int_0^1 \frac{p(\beta)}{p(\alpha-1)} x^{\alpha+\beta} \, dx = p(\beta) -$$

$$\frac{p(\beta)}{p(\alpha-1)} p(\alpha+\beta)$$

tj.

$$p(\alpha+\beta) = p(\beta) - \frac{p(\beta)}{p(\alpha-1)} p(\alpha+\beta).$$

Odavde slijedi

$$p(\alpha+\beta) = \frac{p(\beta)}{1 + \frac{p(\beta)}{p(\alpha-1)}}. \tag{2}$$

Posebno za $\beta = 0$

$$p(\alpha) = \frac{1}{1 + \frac{1}{p(\alpha-1)}}$$

tj.

$$\frac{1}{p(\alpha)} = \frac{1}{p(\alpha-1)} + 1. \tag{3}$$

Ova rekurzivna formula omogućava izračunavanje koeficijenata $p(\alpha)$ za $\alpha \in Z$ (budući se zna da je $p(0) = 1$).

Uvrštavanjem (3) u (2) slijedi

$$p(\alpha+\beta) = \frac{p(\beta)}{1 + p(\beta) \cdot \left(\frac{1}{p(\alpha)} - 1\right)} =$$

$$= \frac{p(\beta)}{1 + \frac{p(\beta)}{p(\alpha)} - p(\beta)} =$$

$$= \frac{p(\alpha)\, p(\beta)}{p(\alpha) - p(\alpha)\, p(\beta) + p(\beta)}$$

Odavde se dobiva

$$\frac{1}{p(\alpha+\beta)} = \frac{1}{p(\alpha)} + \frac{1}{p(\beta)} - 1$$

tj.

$$\frac{1}{p(\alpha+\beta)} - 1 = \left(\frac{1}{p(\alpha)} - 1\right) + \left(\frac{1}{p(\beta)} - 1\right).$$

Drugim riječima funkcija

$$f(\alpha) = \frac{1}{p(\alpha)} - 1$$

je aditivna, odakle (zbog neprekidnosti) slijedi da je linearna tj.

$$\frac{1}{p(\alpha)} - 1 = k \cdot \alpha.$$

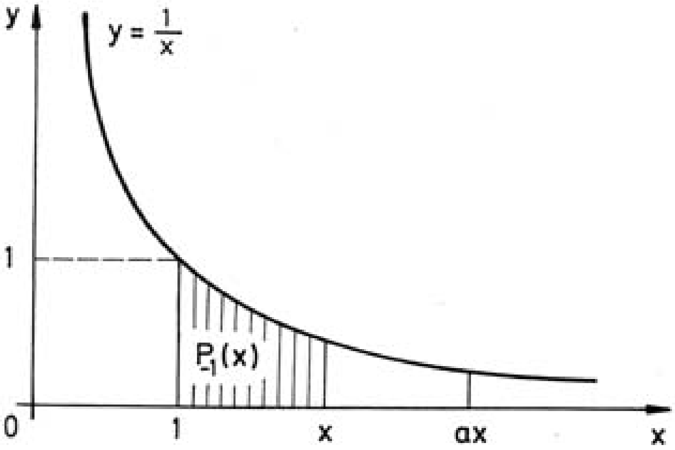
Uzme li se u obzir da je $p(1) = \frac{1}{2}$ vidi se da je $k = 1$ tj.

$$\frac{1}{p(\alpha)} - 1 = \alpha \qquad \text{tj.} \qquad p(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}.$$

Isti rezultat se dobiva, na sličan način, i u slučajevima $-1 < \alpha < 0$ i $\alpha < -1$. Slučaj $\alpha = -1$ vodi k prirodnoj definiciji logaritamske funkcije:

Neka je graf funkcije $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ prikazan na slici 3.

$P_{-1}(x) = \int_1^x \frac{dx}{x}$ je površina prikazana na slici 6.



Slika 6. Integral od 1/x

Transformacija koja svaku točku (x, y) preslikava u točku (ax, y/a) preslikava graf funkcije $y = \frac{1}{x}$ u samog sebe, a površinu $P_{-1}(x)$ u površinu $P_{-1}(ax) - P_{-1}(a)$. Budući da transformacija rasteže (ili steže) os x za faktor a, a os y steže (ili rasteže) za faktor $\frac{1}{a}$ to ona ne mijenja iznos transformirane površine. Dakle

$$P_{-1}(ax) - P_{-1}(a) = P_{-1}(x)$$

tj.

$$P_{-1}(ax) = P_{-1}(a) + P_{-1}(x). \tag{4}$$

Odavde slijedi da je

$$P_{-1}(a^n) = nP_{-1}(a) \text{ za } n \in N.$$

No onda zbog

$$0 = P_{-1}(1) = P_{-1}(a^n a^{-n}) = $$
$$= P_{-1}(a^n) + P_{-1}(a^{-n}) =$$
$$= nP_{-1}(a) + P_{-1}(a^{-n})$$

vrijedi i

$$P_{-1}(a^{-n}) = -nP_{-1}(a) \text{ za } n \in N,$$

a zbog

$$P_{-1}(a) = P_{-1}((a^{1/n})^n) = nP_{-1}(a^{1/n})$$

vrijedi i

$$P_{-1}(a^{1/n}) = \frac{1}{n} P_{-1}(a) \text{ za } n \in N.$$

Dakle

$$P_{-1}(a^q) = qP_{-1}(a) \text{ za } q \in Q,$$

tj. P_{-1} ima osnovno svojstvo logaritamske funkcije. Štoviše, može se dokazati da su sve neprekidne funkcije koje zadovoljavaju uvjet (4) međusobno proporcionalne. Zato se može definirati logaritamska funkcija kao neprekidna funkcija koja zadovoljava uvjet (4), a njena baza kao ona vrijednost u kojoj funkcija prima vrijednost 1. Baza logaritamske funkcije P_{-1} je, dakle, takav broj e za koji je

$$P_{-1}(e) = 1.$$

Lako se vidi da je (npr.)

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Naime,

$$P_{-1}\left(\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(P_{-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(nP_{-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right),$$

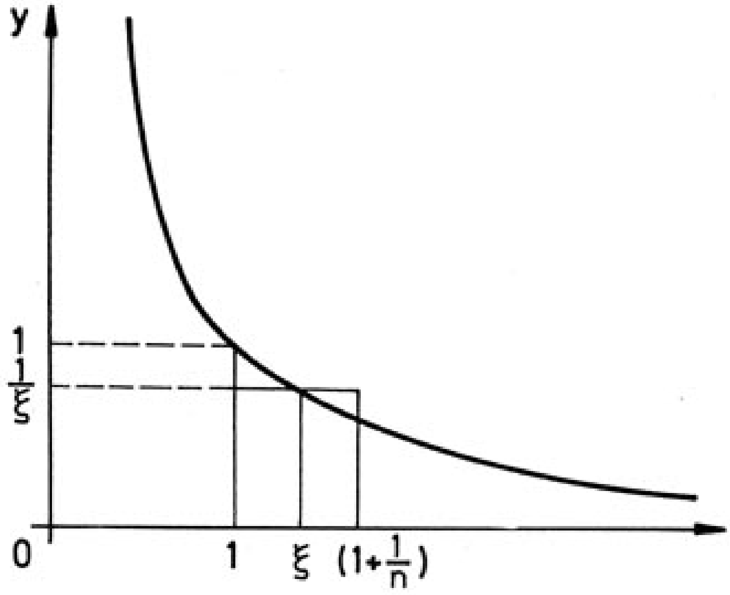
a po teoremu srednje vrijednosti

$$P_{-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\frac{1}{\xi} \quad \text{za } 1 < \xi < 1 + \frac{1}{n}$$

(slika 7).
Dakle

$$P_{-1}\left(\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(n\frac{1}{n}\frac{1}{\xi}\right) = 1$$

Sva svojstva funkcije $P_{-1}(x) = \ln x$ i njoj inverzne funkcije $\exp(x) = e^x$ slijede, gotovo trivijalno, iz ovdje dane definicije. Na sličan način mogu se



Slika 7. Srednja vrijednost

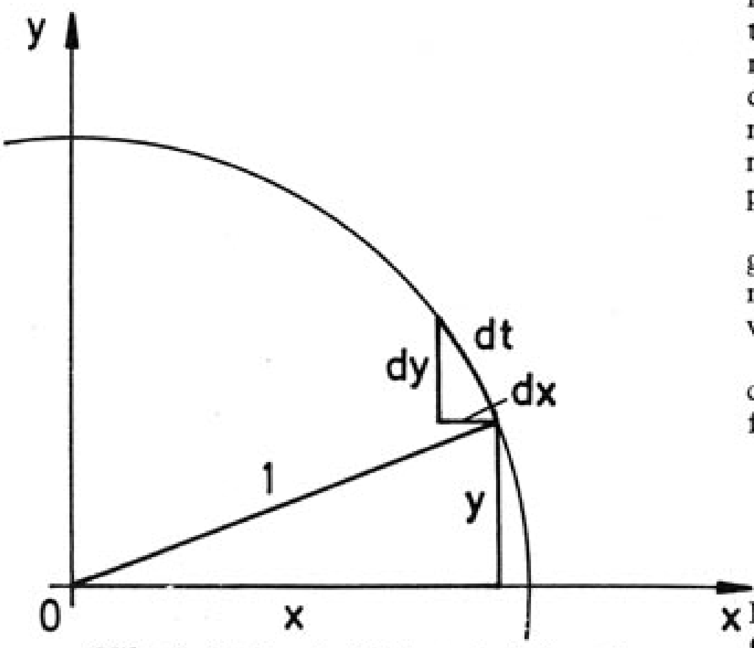
uvesti i area funkcije pa onda i njima inverzne hiperbolne funkcije.

B. Slika 5. pokazuje što su derivacije funkcija $y = \sin t$ i $x = \cos t$:

$$x = \cos t \qquad y = \sin t$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{y}{1} \text{ (vidi sl. 8.) tj. } (\cos t)' = -\sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{x}{1} \text{ (vidi sl. 8.) tj. } (\sin t)' = \cos t.$$



Slika 8. Derivacija i integral od sin t i cos t

Lako se provode i stroge (matematičke) ocjene radeći s Δx, Δy i Δt umjesto s (fizičarskim) dx, dy i dt.

No ista slika pokazuje da je

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{x}$$

tj.

$$x\,dt = dy$$

dakle

$$\int_0^t x\,dt = \int_0^y dy = y$$

tj.

$$\int \cos t\,dt = \sin t + c.$$

Slično se dobiva i

$$\int \sin t\,dt = -\cos t + c.$$

I ovdje se lako provode stroge (matematičke) ocjene radeći s Δx, Δy i Δt umjesto s (fizičarskim) dx, dy i dt.

Vidi se, dakle da integriranje trigonometrijskih funkcija nije ništa složenije od njihovog deriviranja.

Time su obuhvaćene sve elementarne funkcije.

Primjer 4:

Već se u prethodnim primjerima moglo vidjeti kako mnoge stvari postaju složenije insistiranjem na aritmetizaciji tj. odbacivanjem zora i geometrije. Čak i predavači koji ne žele u svojim predavanjima odbaciti zor i geometriju (zato jer predaju počerni kurs računa, ili zato što ga predaju inženjerima, fizičarima itd.) često ponavljaju složene konstrukcije nastale u okviru aritmetiziranog računa, ne znajući njihovo porijeklo. Sami, naravno, ne ispituju druge mogućnosti koje pruža **nereduktivni** pristup njihovom predmetu. Standardni reduktivni procesi kreću se ovim redom. Analiza se reducira na aritmetiku, geometriju na analizu, mehanika na geometriju, fizika na mehaniku, a tehnika na fiziku. Teško je preuveličati značaj ovih redukcija budući je on fundirajući za sve nabrojane discipline. Međutim, redukcija je uvijek logička i naknadna, a često nije ni jednoznačno određena. Za nastajanje teorije ona je od sekundarnog značaja, a postaje važna tek pri rekonstrukciji teorije.

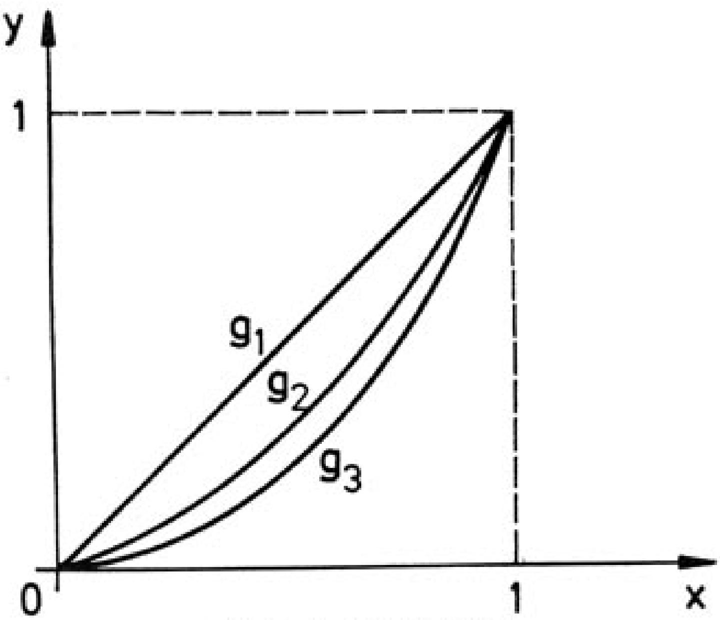
Evo još jednog primjera u kojem aritmetizacija geometrije čini jedan jednostavni geometrijski pojam neopravdano teškim. Radi se o pojmu uniformne konvergencije.

Neka se promotri niz funkcija $g_n(x) = x^n$ zadanih na intervalu [0, 1]. Taj niz konvergira prema funkciji

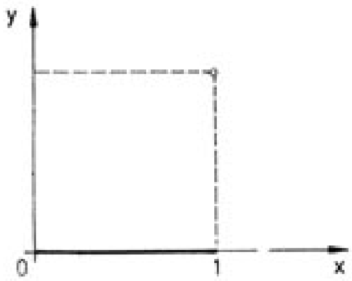
$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ za } x \in [0, 1) \\ 1 \text{ za } x = 1 \end{cases}$$

Prvih par članova niza g_n prikazani su na slici 6. Granična funkcija g prikazana je na slici 10.
Niz funkcija g_n ne konvergira uniformno prema g iako konvergira prema g. Razlika je izuzetno važna. Granica uniformno konvergentnog niza neprekidnih funkcija je neprekidna funkcija, dok granica konvergentnog niza neprekidnih funkcija nije nužno neprekidna funkcija. Granica uniformno konvergentnog niza integrabilnih funkcija je integrabilna funkcija i granica integrala je integral granice. Ovaj rezultat ne vrijedi za konvergentne nizove funkcija.

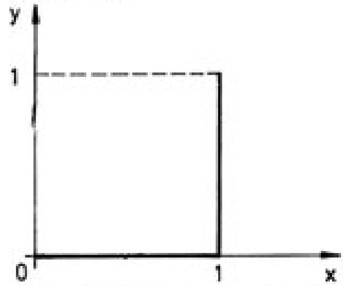
U aritmetiziranoj analizi razlika konvergencije i uniformne konvergencije objašnjava se različitim re-



Slika 9. Potencije g_n



Slika 10. Graf granice funkcija g_n



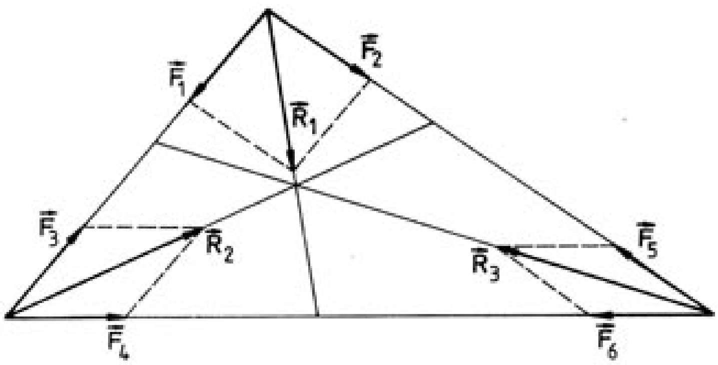
Slika 11. Granica grafova funkcija g_n

doslijedom kvantifikatora u definiciji uniformne i obične konvergencije ($\forall\, \varepsilon\ \exists\, n\ \forall\, x$ vs. $\forall\, \varepsilon\ \forall\, x\ \exists\, n$), što početnicima (i ne samo njima) stvara teškoće. Koristi li se geometrija sve postaje vrlo jednostavno. Niz funkcija f_n konvergira uniformno prema funkciji f ako grafovi funkcija f_n konvergiraju prema grafu funkcije f. To se može smatrati definicijom uniformne konvergencije, iz koje (ako se želi) može se izvesti aritmetizirana verzija. Npr. grafovi funkcija g_n ne konvergiraju prema grafu na sl. 10. nego konvergiraju prema grafu na sl. 11. i zato konvergencija nije uniformna.

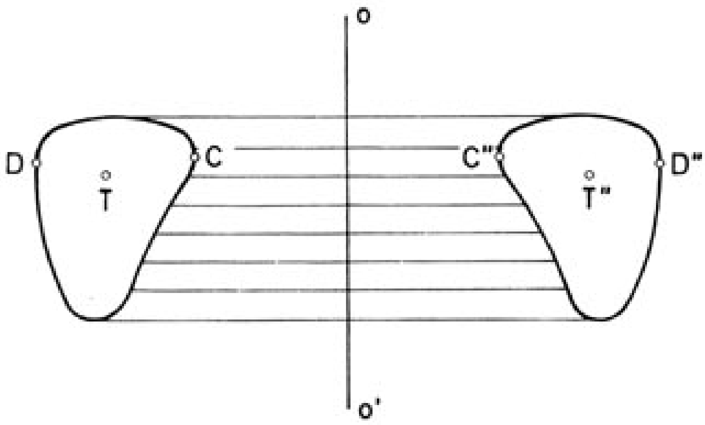
Sada je jasno zašto vrijedi pravilo o integriranju uniformno konvergentnog niza funkcija. Naime, ako grafovi funkcija iz niza f_n konvergiraju prema grafu funkcije f (tj. ako niz f_n uniformno konvergira prema f) onda i površine ispod grafova funkcija f_n konvergiraju prema površini ispod grafa funkcije f. Čak i studenti koji dobro savladaju aritmetizirani pojam uniformne konvergencije, a koji skoro nikada nisu svjesni njegovog geometrijskog značenja, misle da konvergencija funkcija implicira konvregenciju njihovih grafova, te ih uglavnom zbunjuje nemogućnost izračunavanja integrala granice pomoću izračunavanja granice integrala (većina otklanja ovu zabunu standardnim protuprimjerima ne upuštajući se u dublju analizu ovog problema).

Primjer 5:

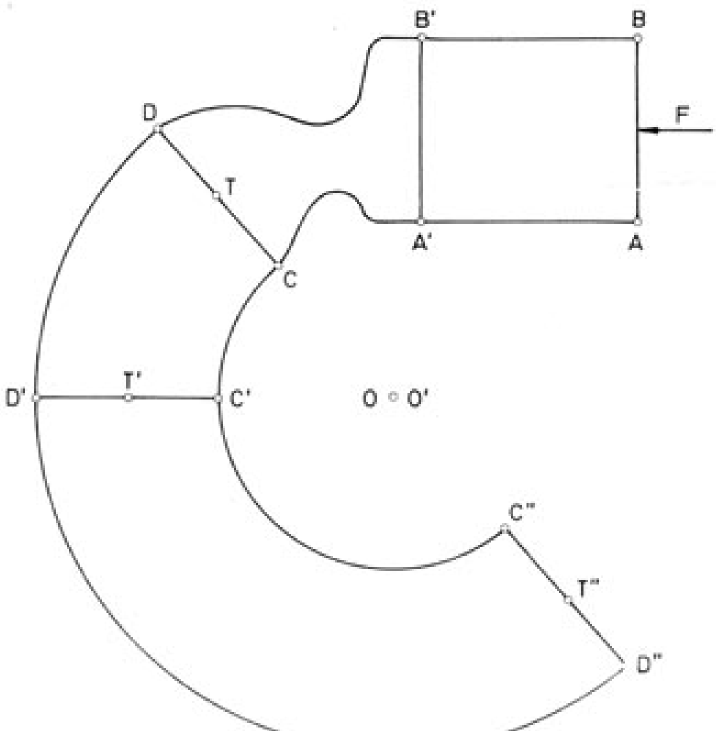
Na kraju se mogu dati neki primjrei koji su vezani uz druge članove lanca redukcija. Pokazat će se kako se mehanika može primijeniti u geometriji, a čak i fizika u analizi.[2)]



Slika 12. Sjecište simetrala kuteva



Slika 13. Nacrt pumpe



Slika 14. Tlocrt pumpe

2) Ovi primjeri čak i autoru ovoga članka djeluju pomalo izopačeno. No budući da prethodni primjeri, koje autor ne smatra nimalo izopačenim, mnogima tako izgledaju, možda se i ovdje radi samo o jednoj predrasudi.

Prvo slijedi jednostavni mehanički dokaz da se simetrale kuteva u trokutu sijeku u jednoj točki.

Neka u vrhovima trokuta djeluju po iznosu jednake sile $\vec{F}_1, \ldots, \vec{F}_6$, kao na slici 9. Sistem sila je očito u ravnoteži. Prema zakonu o slaganju sila sistem je ekvivalentan sistemu sila $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$, $\vec{R}_3$, čiji su pravci djelovanja simetrale kuteva trokuta. Dakle i sistem $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$, $\vec{R}_3$ je i sam u ravnoteži. No tri sile su u ravnoteži samo onda ako im se pravci djelovanja sijeku u jednoj točki.[3)]

A sada evo jednog fizikalnog dokaza prvog Guldinovog teorema u kojem se koristi jedan jednostavan stroj (pumpa) i koji opravdava naziv ovoga članka. Neka se promotri tlocrt pumpe prikazan na slici 14. i nacrt njenog rotacionog dijela na slici 13.

Potisne li sila $\vec{F}$ klip iz položaja AB u položaj A'B' granica tekućine CD pomiče se do granice C'D'. Rad sile F može se izračunati na dva načina.

1) $W / F \cdot AA'$ no $F = S_{AB} \cdot p$ gdje je S_{AB} površina presjeka AB, a p tlak tekućine u pumpi. Dakle

$$W = p \cdot S_{AB} \cdot AA' = p \cdot V_{AA'B'B}$$

gdje je $V_{AA'B'B}$ volumen tekućine sadržan u AA'B'B.

2) $W = R \cdot TT'$ gdje je $\vec{R}$ rezultanta sila kojima tekućina pritišće stijenku CD, a koja djeluje u težištu stijenke T.
No $R = p \cdot S_{CD}$ gdje je S_{CD} površina presjeka CD. Dakle $W = p \cdot S_{CD} \cdot TT'$.

Iz 1) i 2 slijedi

$$S_{CD} \cdot TT' = V_{AA'B'B}.$$

No zbog nestlačivosti tekućine

$$V_{AA'B'B} = V_{CC'D'D}$$

dakle

$$V_{CC'D'D} = S_{CD} \cdot TT'.$$

a to tvrdi prvi Guldinov teorem.

Recenzija:
Dr Kajetan Šeper, dipl. inž. mat.

3) Veći broj ovakvih dokaza i više o njima može se naći u Šikić Z.: Neke primjene mehanike u elementarnoj geometriji, Matematika 2, 1981. str. 34—44.