

ŽIVOT I DJELO KURTA GÖDELA

ZVONIMIR ŠIKIĆ, Zagreb

Kurt Friedrich Gödel¹ rođen je 28. travnja 1906, kao drugi sin Rudolfa i Marianne (Handschuh) Gödel, u Brünnu, središtu Austro-Ugarske pokrajine Moravije. Gödelov otac, koji je pripadao oveloj njemačkoj govornoj manjini, došao je u Brunn iz Beča. Tu je s vremenom postao direktor i djelomični vlasnik najvažnijih tekstilnih tvrtki što je Gödelovima osiguravalo siguran i ugodan život.

Prema svjedočanstvu dr. Rudolfa Gödela, Kurtova brata, Kurtovo djetinjstvo bijaše sretno, unatoč njegovoj osjetljivosti i sklonosti lakom uzbuđivanju. Sa čam godina Kurt je prebolio reumatsku groznicu, i mada je potpuno ozdravio, počeo je vjerovati da je groznica trajno oštetila njegovo srce. Tu nalazimo prve znakove Gödelove kasnije preopterećenosti pitanjima vlastitog zdravlja. Rano su uočene i njegove izuzetne intelektualne sposobnosti. Kurta su u porodici zvali *Herr Warum* zbog njegove velike i neprestane ljubopitljivosti.

Od 1916. do 1924. godine Gödel je pohađao *Deutsches Stats-Realgymnasium*. Iz svih je predmeta imao odlične ocjene, a osobito se isticao u matematici, jezicima i teologiji.

U vrijeme prvoga svjetskog rada Gödel se još školovao. Taj presudni događaj evropske povijesti jedva da je djelovao na njega i njegovu porodicu. Područje Brünna bilo je daleko od glavnih frontova i ostalo je netaknuto ratnim razaranja kojima su pustošila Evropu. Međutim, raspad Austro-Ugarske Monarhije na kraju rata i uključenje Moravije, zajedno s Bohemijom, u novu Čehoslovačku državu bilo je prilično važno za njemačku govornu manjinu kojoj su pripadali i Gödelovi. Jedan od prvih znakova pomaka nacionalnog identiteta bijaše zamjena njemačkog imena Brunn češkim imenom Brno. Ipak, za Gödelove se život u poratnim godinama nije bitno izmijenio. Otac je zadržao svoj položaj, a Gödelovi su i dalje živjeli bogatim i ugodnim životom.

Završivši *Gimnasium* u Brnu 1924. godine, Gödel je prešao u Beč i počeo studirati na Bečkom sveučilištu. U Beču je ostao sljedećih 15 godina; od 1929. kao austrijski državljanin. U početku je bio neodlučan u izboru studija. Kolebao se između matematike i fizike, mada se činilo da je skloniji studiju fizike. Čini se da ga je matematici odvela njegova sklonost preciznosti i impresioniranost jednim njegovim profesorom, teoretičarem brojeva Philippom Furtwänglerom. Osim Furtwänglera, profesori mu bijahu Hans Hahn i Wilhelm Wirtinger. Karl Menger,

¹ Biografski podaci preuzeti su iz Gödelove biografije što ju je S. Feferman napisao za „Kurt Gödel: Collected Works”, Vol I, Oxford univ. press, 1986.

jedan od Hahnovih najdarovitijih studenata, bio je izvanredni profesor. Znamo da je Gödel 1925. godine sudjelovao u radu seminara što ga je vodio filozof Moritz Schlick o Russellovoj knjizi *Uvod u matematičku filozofiju* (1919).

Hans Hahn uskoro je postao Gödelov glavni učitelj. Bio je to matematičar nove generacije (koji se vratio u Austriju, napustivši položaj u Bonnu), zainteresiran za modernu analizu, skupovno-teorijsku topologiju, logiku, osnove matematike i filozofiju znanosti. Upravo je Hahn uveo Gödela u grupu filozofa okupljenih oko Moritza Schlicka, koji je držao katedru za filozofiju induktivnih znanosti (katedru su dotad držali Ernst Mach i Ludwig Boltzmann). Schlickova je grupa kasnije prozvana „Bečkim krugom” (*Wiener Kreis*) i počela se identificirati s filozofskom doktrinom nazvanom logički pozitivizam ili logički empirizam. Zadatak te škole bila je analiza znanja u logičkim i empiričkim terminima, s težnjom da se filozofija učini znanstvenom, oslobađajući je metafizičkih spekulacija. Gödel je sudjelovao na sastancima Kruga od 1926. do 1928. godine, da bi se sljedećih godina odvojio od njega, održavajući stalne veze s pojedinim članovima, osobito s Rudolfom Carnapom. Glavni razlog odvajanja bijaše to što je Gödel s vremenom razvio vlastite filozofske poglede dijametralno suprotne pogledima logičkih pozitivista.

Naravno, pitanja koja su se razmatrala u Krugu pouzdano su utjecala na Gödela. Logički su empiristi povezivali ideje iz različitih konceptualnih okvira, ponajprije Machovu empirističko-pozitivističku filozofiju znanosti i Russellov logicistički program zasnivanja matematike, a oboje u svjetlu Wittgensteinova *Tractatusa logico-philosophicus*. Hahn, koji je za osnivanje Kruga bio bar toliko važan koliko i Schlick, držao je 1924—1925. godine seminar o Russell-Whiteheadovim *Principia mathematica* u kojima su detaljno razvijane logicističke ideje. Mora da je i Hahnov matematički interes za modernu teoriju funkcija realne varijable utjecao na Gödela, budući da su u ovu teoriju upletena i skupovno-teorijska razmatranja koja je francuska škola realne analize preuzela od G. Cantora. Ipak, čini se da su na smjer Gödelovog kreativnog rada najneposrednije utjecala Carnapova predavanja o matematičkoj logici i Hilbert-Ackermannova monografija *Grundzüge der theoretischen Logik* iz 1928. godine. U potpunoj suprotnosti prema masivnim svescima Whiteheada i Russella, *Grundzüge* su se svojom konciznošću i matematičkom direktnošću morali dopasti Gödelu, koji je uvijek bio i ostao izuzetno sklon jezgrovitim izlaganjima.

Grundzüge su kao otvoren problem postavile pitanje da li je određeni sistem aksioma predikatske logike prvoga reda potpun. Drugim riječima, da li omogućava izvođenje svih logički istinitih tvrdnji (tj. tvrdnji koje su istinite bez obzira na to kako interpretiramo osnovne terme i predikate od kojih su one izgrađene). Gödel je svoju istraživačku karijeru započeo rješavanjem tog otvorenog problema. Taj rad, koji će postati Gödelova doktorska teza, završen je u ljeto 1929, kada su mu bile samo 23 godine. Iako će znanstvena javnost tek postepeno razumijevati fundamentalnu važnost toga rada, on je već i u to vrijeme bio dovoljno istaknut da Gödelu pribavi reputaciju zvijezde u usponu.

Objasnit ćemo ukratko fundamentalno značenje teorema potpunosti. Čitaocu je sigurno poznato da deduktivnu konzistentnost nekog sistema tvrdnji prvoga reda (najčešće su to aksiomi neke matematičke teorije) dokazujemo tako da osnovne terme i predikate, koje nalazimo u tim tvrdnjama, interpretiramo u nekom modelu (kao objekte i relacije tog modela), pa zatim dokazujemo da su u tom modelu (uz tu interpretaciju) sve razmatrane tvrdnje istinite. Naime, ako sistem tvrdnji ima model, onda (neposredno) zaključujemo da je deduktivno konzistentan, jer ako **nešto** postoji o tome ne može važiti, a ujedno i ne važiti neki iskaz. Ukratko, posto-

janje implicira konzistentnost. Da spriječimo moguće nesporazume, upozoravamo da je deduktivna konzistentnost, kraće konzistentnost, pojam vezan uz odgovarajući deduktivni sistem. Naime, sistem tvrdnji je deduktivno konzistentan ako se iz njega u odgovarajućem deduktivnom sistemu ne može izvesti kontradikcija.

Zapravo, trebali bismo eksplicitno reći da je on konzistentan s obzirom na određeni deduktivni sistem, no on se uvijek implicitno podrazumijeva. Isto tako, pretpostavljamo da je deduktivni sistem koji razmatramo korektan, tj. da njegove dedukcije istinite tvrdnje prevode u istinite tvrdnje. Međutim, mnogi će matematičar, budući da teško može odrediti **predmet** svoje struke, reći da postojanje u matematici čak i nije drugo do (deduktivna) konzistentnost: „Moja je teorija smisljena (što u krajnjoj liniji znači da je teorija **nečega**), zato što je konzistentna”. Ali on time tvrdi da konzistentnost implicira postojanje; da svaki deduktivno konzistentni sistem tvrdnji prvoga reda ima (bar jedan) model koji ga potvrđuje. To nije sasvim jasno i mnogi će prihvatiti ovaj stav samo zato što ga pogrešno miješaju s njegovim ranije spomenutim obratom (da postojanje implicira konzistentnost), koji jest jasan. Fundamentalno značenje Gödelovog teorema upravo je u tome što se njime **dokazuje** onaj neevidentni stav. Gödel je pokazao kako za bilo koji sistem tvrdnji prvoga reda koji je konzistentan s obzirom na Hilbert-Ackermannove dedukcije, možemo konstruirati model koji će ga potvrditi. Štoviše, on je pokazao da uvijek možemo konstruirati prebrojivi model koji će potvrditi deduktivno konzistentni sistem tvrdnji. Posljedice tog dodatka u najmanju ruku začuđuju. Naravno, za dokaz je bitno da se razmatraju samo tvrdnje **prvog reda**. Ali svu današnju matematiku možemo smjestiti u okvire teorije skupova koja je aksiomatizirana aksiomima **prvog reda**?!

Čitalac se možda već pita u kojoj je vezi upravo opisani Gödelov teorem s problemom otvorenim u *Grundzüge*. Problem iz *Grundzüge* rješava se neposrednom primjenom tog teorema. Naime, pretpostavimo da je A logički istinita tvrdnja prvoga reda. Tada njezina negacija $\neg A$ nema modela koji bi je potvrđivao (budući da logička istinitost znači istinitost u svakom modelu). Tada po Gödelovu teoremu slijedi da tvrdnja $\neg A$ nije konzistentna s obzirom na Hilbert-Ackermannove dedukcije, tj. iz nje pomoću Hilbert-Ackermannovih aksioma i pravila možemo izvesti kontradikciju. Lako se pokazuje da u tom slučaju tvrdnju A možemo izvesti u Hilbert-Ackermannovom deduktivnom sistemu. (Osnovne konstrukcije za dokaz Gödelovog teorema nalazimo već kod Skolema 1920, 1928. i 1929. godine. Zašto sam Skolem nije dokazao Gödelov teorem o potpunosti vrlo je zanimljivo pitanje i odgovor na njega odlikava razvoj logike u 20. st. Nažalost, ovdje se ne možemo pozabaviti tim pitanjem.) Neposredna posljedica Gödelovog teorema je i ovaj vrlo značajni rezultat: ako je svaki konačni podsistem beskonačnog sistema tvrdnji potvrđen nekim modelom, onda je i čitav beskonačni sistem tvrdnji potvrđen nekim modelom. Taj tzv. teorem kompaktnosti postao je kasnije jedan od polazišta teorije modela i posebno temelj za konstruiranje nestandardnih modela, za koje se u to vrijeme nije moglo ni pomisliti da uopće postoje. Naime, nestandardni modeli pokazuju da je svaki aksiomatski sistem prvoga reda, koji ima beskonačni model, potvrđen bar sa dva međusobno bitno različita modela, što znači da se nijedna beskonačna struktura ne može potpuno specificirati aksiomima prvoga reda. Što li onda aksiomatizira aksiomatska teorija skupova u čiji okvir možemo smjestiti čitavu današnju matematiku?! Toliko o prvom istraživačkom radu 23-godišnjeg Kurta Gödela.

Razdoblje od 1929. do 1939. godine desetljeće je intenzivnog Gödelovog rada u matematičkoj logici koje rezultira njegovim glavnim doprinosima ovoj disciplini.

U toku 1930. godine Gödel je počeo raditi na provođenju Hilbertovog programa utvrđivanja konzistentnosti aksiomatskih sistema matematike, finitnim sredstvima. Najprije se posvetio problemu konzistentnosti analize, nadajući se da će ga svesti na konzistentnost aritmetike. Međutim, radeći na tom problemu, ubrzo je naišao na teškoće vezane uz dobro poznate paradokse istine i definibilnosti u prirodnom jeziku. Gödelu je bilo jasno da u precizno formuliranim jezicima formaliziranih aksiomatskih sistema matematike nije moguće ponoviti argumente koji vode ovim paradoksima. Ali on je uočio da može provesti analogne argumente koji više nisu paradoksalni nego vode krajnje iznenađujućim istinitim posljedicama ako (neformalizabilni) pojam istine zamijeni pojmom dokazivosti koji je formalizabilan u svakom sistemu koji sadrži aritmetiku. Naime, Gödel je pokazao da je svaki formalni sistem S u kojem je moguće razviti određeni elementarni dio aritmetike i koji zadovoljava minimalne zahtjeve konzistentnosti nužno nepotpun, tj. u njemu možemo konstruirati tvrdnju G takvu da ni G ni njezina negacija $\neg G$ nisu dokazive u S . Štoviše, tvrdnja G je konstruirana tako da (služeći se reprezentacijom sintakse sistema S u aritmetici, dakle i u S) izražava svoju vlastitu nedokazivost, a to znači da je tvrdnja G istinita (budući da je Gödel dokazao da je nedokaziva). Ukratko Gödel je pokazao da svaki, koliko god obuhvatni, konzistentni formalni sistem sadrži istinitu tvrdnju koju sam ne može dokazati. Dalje, on je služeći se već spomenutom reprezentacijom sintakse sistema S u samom sistemu S , konstruirao i tvrdnju C koja u samom sistemu S izražava konzistentnost sistema S , da bi zatim dokazao kako je i implikacija $C \rightarrow G$ dokaziva u S . Odavde neposredno slijedi da tvrdnja C nije dokaziva u S (jer bi inače i tvrdnja G morala biti dokaziva u S). Taj se rezultat obično naziva drugim Gödelovim teoremom o nepotpunosti. On je prisilio Hilbertovu školu i njezinu širu okolinu da temeljno preispitaju samu mogućnost ostvarenja Hilbertovog programa i da zakluče kako je on, bar u svojoj naivnoj varijanti, neostvariv. Zapravo, već i prvi teorem o nepotpunosti opovrgava Hilbertovu nadu da bi ostvarenje njegovog programa konačno riješilo problem zasnivanja matematike, budući da je već prvim teoremom dokazana nemogućnost potpune formalizacije matematike, a to je nužna Hilbertova pretpostavka. Teoremi o nepotpunosti objavljeni su 1931. godine. Do tada nezamislivi zaključci i potpuno novi tip argumentacije koji je vodio tim zaključcima izazvali su izuzetno veliku pažnju znanstvene javnosti i stvorili Gödelu reputaciju vodećeg mislioca u tom području. Gödelu je tada bilo 25 godina.

Značenje Gödelovog teorema nepotpunosti za buduća istraživanja među prvima je uočio Johan von Neumann, koji ih je odmah počeo i poticati. Samo tri godine stariji od Gödela, i sam dijete (mađarskog dijela) Austro-Ugarske, von Neumann bijaše već dobro poznat u matematičkim krugovima zahvaljujući svojim izvanrednim i neuobičajeno raznovrsnim radovima u teoriji skupova, teoriji dokaza (i. e. Hilbertovom metamatematičkom programu), analizi i matematičkoj fizici. Međutim, ostali djelatnici u matematičkoj logici polako su i dosta teško usvajali Gödelov novi rad. Na primjer, Paul Bernays, Hilbertov asistent i suradnik, iako je brzo prihvatio i uočio značenje Gödelovih rezultata, imao je priličnih poteškoća s razumijevanjem samih dokaza, a uklonjene su tek nakon prepiske u kojoj je Gödel više puta objašnjavao svoje dokaze. Gödelov rad je čak nailazio na kritiku, s raznih strana, koja je gotovo uvijek bila uzrokovana brkanjem distinkcija nužnih za pravilno razumijevanje njegovih dokaza (npr. istinitost vs. dokazivost, iskaz vs. njegova sintaktička reprezentacija u aritmetici itd.). Čak je i slavni Ernest Zermelo, teoretičar skupova, Gödelove osnovne pojmove interpretirao tako da je dolazio u doslovnu kontradikciju s Gödelovim rezultatima. U prepisci u toku 1931. godine Gödel

se, čini se bezuspješno, trudio da objasni svoj rad Zermelu. Ipak, teoremi nepotpunosti na kraju su ipak shvaćeni i prihvatili su ih svi koji su se kretali glavnim tokom matematičke logike. Štoviše, Gödelovi rezultati i metode proželi su sve aspekte toga glavnog toka, a možemo čak reći da su ga i odredili.

Gödelov rad o nepotpunosti postao je 1932. godine njegov *Habilitationsschrift* na Bečkom sveučilištu. Hahn ga je u svojem izvještaju nazvao epohalnim postignućem prvoga reda. Habilitacija je značila dodjelu titule *Privatdozent* koja je donosila *venia legendi*, tj. pravo predavanja na Sveučilištu koje nije plaćeno, osim možda neposrednim doprinosima skupljenim od studenata. Zbilo se međutim da je Gödel u toku sljedećih godina u Beču predavao rijetko i vrlo neredovito.

U međuvremenu su se i u Gödelovom privatnom životu dogodile značajne promjene. On je još u 21. godini upeznao svoju buduću ženu Adele Nimbusky (rođenu Porkert) međutim, razlika u njihovom socijalnom položaju uzrokovala je oštro protivljenje Gödelovih roditelja toj vezi. Adele je bila plesačica, iza sebe je već imala jedan kratki brak i bila je šest godina starija od Gödela. Tako se dogodilo da se Kurt i Adele nisu uzeli još sljedećih deset godina. Gödelov otac je 1929. godine iznenada umro u svojoj 54. godini. Na sreću, porodicu je ostavio u sredenoj i vrlo povoljnoj financijskoj situaciji. Zadržavajući vilu u Brnu, Gödelova se majka preselila u Beč i iznajmila poveći apartman za sebe i svoja dva sina. Kurtov brat Rudolf već je postao poznati i uspješni radiolog. On se nikada nije ženio i njih su troje često viđeni u zajedničkim izlascima, najčešće odlascima u kazalište. Prema Rudolfovu svjedočanstvu Kurt se upravo trudio da se u porodici ne primijeti važnost njegova rada, unatoč njegovoj tada već etabliranoj internacionalnoj slavi.

U ranim 30-im godinama Gödel je neprekidno i uporno unapređivao svoja znanja iz mnogih područja logike i matematike. Bio je redovni slušatelj i predavač na Mengerovim kolokvijima u Beču, koji su počeli sa sastajanjem 1929. godine, a surađivao je i u njihovu izdavanju u „*Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*“. Od 1932. do 1936. objavio je u tom časopisu 13 (kao i uvijek) kratkih ali značajnih članaka s raznovrsnom tematikom, uključujući npr. intuicionističku logiku i geometriju.

Intuicionističku logiku formulirao je Heyting 1930. godine kao formalizaciju osnovnih argumenata dopuštenih u Brouwerovoj intuicionističkoj rekonstrukciji matematike. Presudna je razlika u usporedbi s klasičnom logikom, intuicionističko odbacivanje načela isključenja trećeg. Počevši od 1932. godine, Gödel se često bavio sistemima temeljenim na intuicionističkoj logici, iako nije prihvaćao Brouwerove ideje. Taj je interes možda moguće objasniti njegovim radom iz 1933. godine, u kojem je pokazao da se klasični sistemi mogu interpretirati u odgovarajućim intuicionističkim sistemima upotrebom tzv. „negativnog“ prijevoda svake formule A u formuli A' , za koji vrijedi da intuicionistička dokazivost prijevoda A' slijedi iz klasične dokazivosti originala A (naravno za bogatu klasu A -ova, prevod A' će se poklapati s originalom A i za takve se formule intuicionistički i klasični sistem poklapaju s obzirom na dokazivost). Do sličnog je rezultata (s nešto drukčijim prijevodom) došao i Gentzen. Filozofski gledano, Gödelova je interpretacija značajna jer pokazuje da se klasični sistem, npr. klasične aritmetike, može u određenom smislu smatrati podsistemom intuicionističkog sistema aritmetike. Neposredna je posljedica ta da je klasična aritmetika isto toliko „sigurna“ koliko je to i intuicionistička aritmetika (one su ekvivalentne), iako se razlozi za prihvaćanje jedne, odnosno druge bitno razlikuju. U jednom drugom radu iz 1933. godine Gödel je obrnuo točku gledanja, interpretirajući intuicionističku propozicionalnu logiku u okviru klasične propozicionalne logike obogaćene operatorom B , gdje B

sugerira *beweisbar* (tj. dokaziv). Tako dobiveni B-sistem jedan je od klasičnih S4-sistema modalne logike. Gödel je upozorio da, zbog njegovog teorema o nepotpunosti, B ipak ne možemo interpretirati kao reprezentaciju dokazivosti u nekom formalnom sistemu. Ipak, tih se godina u logici mnogo radilo baš na takvim interpretacijama operatora B.

U vezi s Mengerovim kolokvijem spomenimo još da je jedan od njegovih stranih gostiju 1930. godine bio poljski logičar Alfred Tarski, koji je uskoro postao slavan zbog svojeg rada o pojmu istine u formalnim jezicima (temi donekle vezanoj uz Gödelov rad o nepotpunosti formalnih sistema) i još kasnije zbog svojeg vodstva u stvaranju i razvijanju teorije modela. Tarski je u Beču boravio nekoliko tjedana i u tom se razdoblju upoznao s Gödelom, koji je iskoristio tu priliku da s njim prodiskutira rezultate svoje teze iz 1929. godine. U nešto duži posjet, kao gost Mengerovog kolokvija, Tarski je ponovo došao 1935. godine.

Na svojoj neplaćenju poziciji, kao *Privatdozent*, Gödel je bio financijski ovisan o svojoj porodici. Ipak, ta su sredstva uskoro dopunjena prihodima koje su mu donosile njegove gostujuće pozicije u Sjedinjenim Američkim Državama. Gödelova prva gostujuća pozicija bila je na *Institute for Advanced Study* u Princetonu u toku akademske godine 1933—1934. *Institut* je službeno osnovan 1930, a njegov direktor Abraham Flexner je Alberta Einsteina i Oswalda Veblena postavio kao prve profesore dvije godine kasnije, 1932. Veblen je bio vodeća ličnost u razvoju više matematike u SAD, a igrao je i vodeću ulogu u stvaranju vrlo istaknutog matematičkog odsjeka na Sveučilištu u Princetonu. On je u najvećoj mjeri bio odgovoran za daljnju selekciju veličanstvenog profesorskog zbora: James Alexander, Marston Morse, John von Neumann Weyle. Osim toga, Veblen je poticao organizaciju postdoktorskih gostovanja mladih matematičara u usponu, uključujući i Gödela. Nema sumnje da je Veblen o Gödelu čuo od von Neumanna, koji je Gödela smatrao „najvećim logičarem od pojave Aristotela“.

Gödelovo gostovanje 1933—1934. godine bilo je prvo od ukupno tri koliko ih je imao prije preuzimanja stalne pozicije na *Institutu* 1940. U proljeće 1934. on je na *Institutu* održao niz predavanja o svojim rezultatima nepotpunosti i ta su predavanja, prema bilješkama Kleenea i Rossera u Gödelovoj redakciji, izdana te iste godine. Jedna od bitnih novosti tih predavanja je uvođenje pojma opće rekurzivnosti, slijedeći jednu Herbrandovu sugestiju. Taj i njemu ekvivalentni (kako je kasnije pokazano) pojam r-definabilnosti Church je 1936. godine predložio kao precizno objašnjenje neformalnog pojma efektivne izračunljivosti. Gödel tu „Churchevu tezu“ nije prihvatio u to vrijeme, nego tek pošto je Turing 1937. godine dao svoju analizu efektivne izračunljivosti pomoću apstraktnih računskih strojeva pokazujući ujedno da su oni ekvivalent r-definabilnosti i općoj rekurzivnosti. Ti su pojmovi postali temelj izuzetno važnom području teorije rekurzija. Oni su također bili i ključni teorijski pojmovi za moderne digitalne kompjutore opće namjene, koje su realizirali Turing i von Neumann 1940-ih godina.

Čini se da je Gödel počeo dosta intenzivno raditi na problemima teorije skupa, te da se istovremeno osjećao prilično usamljeno i depresivno, u toku tog prvog posjeta Princetonu. Neposredno po povratku u Evropu doživio je nervni slom, pa je neko vrijeme proveo u sanatoriju. U toku sljedećih godina povremeno su se vraćali ti napadi depresije i potpune iscrpljenosti. Već dogovoreni posjet Princetonu odgođen je za jesen 1935, da bi potom bio odgođen za još dva mjeseca, ponovo zbog mentalne rastresenosti. Gödel je dosta vremena proveo u sanatoriju i 1936. godine, pa nije bio sposoban da nastavi svoj rad na Sveučilištu u Beču

sve do ljeta 1937. Kada je napokon bio sposoban da preuzme nastavu, počeo je predavati o svojim novim velikim rezultatima u aksiomatskoj teoriji skupova.

Teoretičari skupova pokušavali su, počevši od samog utemeljitelja teorije Georga Cantora, riješiti dva osnovna problema: mogućnost dobrog uređenja proizvoljnog skupa i određenje kardinalnog broja (tj. prirodne mjere) kontinuuma. Zermelo je riješio prvi problem, neformalno 1904. godine i u sklopu svojeg novouvedenog aksiomatskog sistema teorije skupova 1908, pokazavši da je mogućnost dobrog uređenja proizvoljnog skupa ekvivalentna aksiomu izbora (AC), koji tvrdi da za svaki skup skupova S postoji skup koji sadrži točno po jedan element iz svakog skupa u S . Pozitivnim rješenjem tog problema napokon je potvrđeno da svaki skup ima točno određeni kardinalni broj u uređenom nizu transfinitnih kardinala, budući da se taj zaključak nužno pozivao na mogućnost dobrog uređenja svakog skupa. Međutim, pitanje točnog određenja mjesta kardinalnog broja kontinuuma u tom uređenom nizu i dalje je ostalo neriješeno. Cantor je dokazao da je kardinalni broj kontinuuma sigurno veći od kardinalnog broja najmanjeg beskonačnog skupa (kakav je npr. skup prirodnih brojeva 1, 2, 3, 4, . . .), ali nije uspio dokazati da je taj kardinalni broj upravo drugi u nizu beskonačnih kardinalnih brojeva. To je bila samo njegova hipoteza, koja je postala poznata pod imenom hipoteze kontinuuma (CH). Nakon svojih rezultata nepotpunosti Gödel se okrenuo ovim problemima teorije skupova. On je tvrdnje AC i CH razmatrao u sklopu aksiomatske teorije skupova ZF (koju su nakon Zermela proširili i točnije formulirali Fraenkel, Skolem, von Neumann i Bernays) ispitujući da li ih je moguće dokazati koristeći se aksiomima teorije ZF. To je pitanje bilo posebno značajno za CH budući da se ova tvrdnja, za razliku od AC, nije mogla smatrati evidentnom po samoj sebi. Konačni rezultat, do kojeg je Gödel došao u ljeto 1937, bio je da su aksiom izbora i hipoteza kontinuuma, kao i njezina poopćena verzija, generalizirana hipoteza kontinuuma (GCH) suglasne s preostalim aksiomima teorije skupova, ako su oni konzistentni, te da se stoga ni AC ni CH ne mogu opovrći u okviru teorije ZF.

Osnovna Gödelova ideja bila je definicija konstruktibilnog skupa u okviru ZF. On je dosta rano uočio da će moći dokazati da konstruktibilni skupovi čine model za sve aksiome iz ZF, a da su, uz to, i model za AC i GCH. Von Neumannu je već 1935. godine saopćio da njegov model zadovoljava sve aksiome iz ZF, a, osim toga, i AC, ali su mu trebale još pune dvije godine da to isto dokaže za GCH. Naime, s tada dostupnim matematičkim metodom, svi detalji koje je Gödel trebao ustanoviti bili su gotovo nesavladivi, pa je taj suptilni i složeni rad za Gödela bio izuzetno težak, pogotovo u svojoj završnici. To je sigurno bio jedan od uzroka čestih mentalnih stresova koji su ga mučili u toku čitavog razdoblja od 1934. do 1937. godine.

Sljedeće godine donijele su značajne promjene u Gödelovom privatnom životu i u njegovoj karijeri. Majka se vratila u Brno 1937, a brat je nastavio svoju medicinsku praksu u Beču. To je olakšalo da se Gödel i Adele Nimbursky vjenčaju, što su i učinili u rujnu 1938. Taj brak je bio trajan i skladan. U krugu Gödelovih bečkih prijatelja i kolega zbile su se 30-ih godina mnoge promjene. Njegovi najbliži prijatelji iz Bečkoga kruga napustili su Beč. Rudolf Carnap je 1931. godine otišao u Prag, a zatim u Ameriku. Gödelov učitelj Hans Hahn umro je 1934. godine. Moritza Schlicka je 1936. ubio poremećeni bivši student. Uznemiren tim slijedom događaja i općom situacijom u Austriji Karl Menger je sljedeće godine otišao na Sveučilište Notre Dame u SAD. Sve se to zbivalo u vrijeme teških ekonomskih uvjeta u kojim se Evropa našla nakon depresije 1929. i uspona Hitlera i nacional-

socijalizma u Njemačkoj 1933. godine. I Austrija je 1934. došla pod upravu polu-fašističkog režima Engelberta Dollfussa, kojeg su iste godine ubili austrijski nacisti. Bio je to prvi korak nacističkog preuzimanja vlasti, s *Anschlussom* kao krajnjim ciljem. Austrija 1938. godine postaje provincija (*Ostmark*) nacističke Njemačke. Te je godine počela transformacija austrijskog kulturnog i intelektualnog života identična onoj koju je Njemačka morala podnijeti pet godina ranije. Došlo je do pravog eksodusa intelektualaca, pa je jedna od usputnih posljedica bila i raspad Bečkog kruga. Unatoč punoj svijesti o zbivanjima oko sebe, Gödel je, vjeran svom apolitičkom i neobavezujućem stavu, ignorirao evidentne konzekvence nastale situacije.

Na Mengerov nagovor, Gödel posjećuje Ameriku još jedanput 1938–1939. Zimski semestar je proveo na *Institute for Advanced Study*, gdje saopćuje svoje nove rezultate o aksiomu izbora i generaliziranoj hipotezi kontinuuma. U ljetnom semestru pridružuje se Mengeru u Notre Dameu gdje ponovo predaje o svojem radu u teoriji skupova. U ljeto 1939. ponovno je u Beču. Iako je planirao da zimski semestar 1939. opet provede na Institutu u Princetonu, to se neće ostvariti. Pozvan je na vojni lječnički pregled i, na njegovo veliko iznenađenje (s obzirom na slabo zdravlje i njegovu uvjerenost da ima oslabljeno srce), proglašen je sposobnim za vojnu službu. Osim toga, neplaćeni status *Privatdozenta* nacisti su poništili, zamijenivši taj položaj plaćenom pozicijom *Dozent neuer Ordnung*. Dakako, ona je zahtijevala novu prijavu koja je mogla biti odbijena iz političkih ili rasnih osnova. Gödel se prijavio za novu poziciju u rujnu 1939, no rješavanje molbe je bilo sporo. Postavljena su pitanja o njegovim vezama s profesorima Židovima (osobito s Hahnom), i mada je uočena njegova apolitičnost, nedostatak otvorene podrške nacizmu bila je njegov „minus“. S obzirom na realnu mogućnost da bude odbijen, Gödel je u ovoj nesigurnoj situaciji (rat je počeo u rujnu), napisao „dešperatno“ pismo Veblenu u studenome 1939, tražeći pomoć za svoj odlazak. Na neki način su sredene američka „izvankvotna“ ulazna viza i Njemačke izlazne dozvole, pa su Kurt i Adele napustili Beč u siječnju 1940. Budući da je Atlantik bio suviše opasan, krenuli su vlakom u istočnu Evropu, da bi potom transsibirskom željeznicom prešli Rusiju i Mandžuriju, te na kraju stigli u Jokohamu. Odatle su brodom otplovili za San Francisco, odakle su se u ožujku 1940. vlakom uputili u Princeton.

Gödel se više nikada nije vratio u Evropu. Njegova prijava za *Dozenta neuer Ordnung* potvrđena je u lipnju 1940. Kasnijih se godina s gorčinom sjećao svojeg neugodnog položaja u Austriji od 1939. do 1940. godine, osuđujući, međutim, austrijski *Schlamperei* više nego sramotnu nacističku situaciju. Na svoj 60. rođendan 1966. godine odbio je počasno članstvo Austrijske akademije znanosti. Međutim, svoje je odbijanje zaogrnuo ruhom pseudopravne opasnosti da bi članstvo u Akademiji zemlje njegovog prvotnog državljanstva moglo dovesti u pitanje njegovo novo državljanstvo.

Gödel je 1940. godine postao redovni član Instituta u Princetonu, gdje je zajedno sa svojom ženom zasnovao miran društveni život. Najbliži Gödelovi prijatelji postali su Albert Einstein i Oskar Morgenstern, koji je i sam bio ex-Bećanin, i koji će uskoro postati slavan svojim važnim i utjecajnim radom s von Neumannom, *The theory of games and economic behavior* (1944). Sam von Neumann je 1940-ih bio Gödelu manje dostupan jer, kao konzultant brojnih vladinih ratnih projekata, najčešće nije bio na Institutu.

Među mnogim Morgensternovim anegdotama o Gödelu izdvaja se jedna iz travnja 1948, kada je Gödel postao američki državljanin, s Einsteinom i Morgensternom kao svjedocima. Gödel je trebao pristupiti rutinskom ispitu za koji se marljivo pripremao, proučavajući ustav SAD. Dan prije ispita Gödel je vidljivo uzbuđen došao k Morgensternu s riječima: „Otkrio sam logičko-legalnu mogućnost

da se SAD pretvore u diktaturu." Morgenstern je uskoro ustanovio da, unatoč logičkoj izvrsnosti Gödelovog argumenta, njegova stvarna realizacija ostaje krajnje hipotetička, pa je od Gödela zahtijevao da svoje otkriće ne objelodanjuje na ispitu. Sljedeće jutro, Morgenstern je odvezao Gödela i Einsteina iz Princetona u Trenton gdje se provodio postupak prihvaćanja državljanstva. Einstein se cijelim putem uspješno trudio da mnogobrojnim zabavnim anegdotama opusti Gödela. U Trentonu je službenik, očito impresioniran Einsteinovom i Morgensternovom prisutnošću, obojicu pozvao da prisustvuju ispitu, iako se on (proceduralno) polaže nasamo. Počeo je obrativši se Gödelu: „Dosad ste imali njemačko državljanstvo." Gödel ga je ispravio objašnjavajući da je Austrijanac. „Svakako" nastavio je službenik „bilo je to pod davoljom diktaturcm . . . no, na sreću, u Americi to nije moguće." „Naprotiv", uzviknuo je Gödel, „ja znam kako do toga može doći." Sva su trojica imala velike teškoće da spriječe Gödelovu elaboraciju vlastitog otkrića, kako bi procedura bila privedena kraju predviđenim prihvaćanjem državljanstva SAD.

Mnogobrojne detalje o bliskom prijateljstvu Einsteina i Gödela otkrivaju nam sjećanja Einsteinovog asistenta (1944–1948) Ernesta Straussa. On primjećuje da ih je povezivala izuzetno naglašena zajednička osobina da direktno i potpuno predano ulaze u samu srž stvari koje razmatraju. Kao osobe bili su u svakom pogledu različiti. Einstein sretna narav, društven, pun smijeha i zdravog razuma, a Gödel ekstremno dostojanstven (gotovo ukočen), vrlo ozbiljan, prilično osamljen i krajnje nepovjerljiv prema zdravom razumu.

Položaj bez formalnih obaveza pružio je Gödelu potpunu slobodu istraživanja. U toku prvih godina na *Institute for Advanced Study* nastavio je svoj rad u matematičkoj logici, ulažući velike napore da dokaže da su aksiom izbora i hipoteza kontinuumu nezavisni od ostalih aksioma ZF-teorije skupova. To je uspio samo djelomično, i to s obzirom na (manje značajni) aksiom izbora. Ti djelomični rezultati nikada nisu objavljeni. Nalazimo ih u *Nachlassu*, koji će vjerojatno biti objavljen u nekom od svezaka njegovih sabranih djela. Drugo Gödelovo postignuće iz tog razdoblja (objavljeno tek 1958) nova je konstruktivna interpretacija aritmetike, kojom je dokazana njezina konzistentnost. Naravno, metode dokazivanja premašuju finitna sredstva, u Hilbertovom smislu „konkretne intuicije", budući da su ta finitna sredstva obuhvaćena elementarnom aritmetikom pa stoga (po Gödelovu teoremu nepotpunosti) ne mogu biti dovoljna za dokazivanje konzistentnosti same aritmetike. Naime, Gödel se u svojem dokazu konzistentnosti koristi izračunljivim funkcionalima konačnog tipa pomoću kojih interpretira aritmetičke propozicije dokazujući tako konzistentnost aritmetike. On navodi razloge za prihvaćanje ovog apstraktnog pojma kao konstruktivnog, pa u tom smislu i njegov dokaz možemo smatrati konstruktivnim. Tako je 40-ih godina rušilac Hilbertovog programa (iz 1931), poradio na njegovom ponovnom oživljavanju. (Funkcionalnu interpretaciju je 60-ih godina Spector proširio na analizu, dokazujući tako konzistentnost analize. Konstruktivnost tog proširenja je upitna.)

Od 1943. godine dalje, Gödel se gotovo sasvim posvetio filozofiji, najprije filozofiji matematike pa općoj filozofiji i metafizici. Godine 1944. objavljuje poznati članak o Russellovoj matematičkoj logici, koji daje izuzetno značajnu analizu Russellova rada, a osim toga prviputa javno iznosi Gödelov „platonistički" stav prema postojanju matematičkih objekata. Taj je stav, u kontekstu teorije skupova, još izraženiji u Gödelovom jedinom preglednom radu *O Cantorovom problemu kontinuumu* iz 1947. godine. Što se tiče opće filozofije, Gödel je nastavio svoja započeta proučavanja Kanta i Leibniza, koja je 50-ih dopunio fenomenologijom Edmunda

Husserla. (U *Nachlassu* su mnoge bilješke o radovima tih filozofa.) Jedan, naizgled, izuzetak u neprekinutom slijedu tih filozofskih studija Gödelov je iznenađujući rad na općoj teoriji relativnosti u razdoblju od 1947. do 1951. godine, koji je rezultirao tzv. Gödelovim kozmološkim modelom. Jedan samo naizgled izuzetak, jer je Gödel upozorio da taj rad nije bio potaknut njegovim mnogobrojnim diskusijama s Einsteinom, nego njegovim vlastitim zanimanjem za Kantovu filozofiju prostora i vremena. (Uostalom Einstein se u to vrijeme intenzivno trudio oko jedinstvene teorije polja u čiju je mogućnost Gödel sumnjao.)

Gödel je promaknut u stalnog člana *Instituta for Advanced Study* 1946. godine, a profesor (najviši status na *Institutu*) postao je 1953. Ta relativno kasna promocija u zvanje profesora često je izazivala čuđenje, međutim posrijedi je bio obostran interes Gödela i *Instituta*. Profesorski položaj nosio je određene administrativne odgovornosti, budući da se od profesora tražilo da vode poslove *Instituta*. To Gödelu nije odgovaralo. S druge strane, postojale su određene bojazni da bi Gödel svojim izuzetnim smislom za detalje i naglašeno legalističkim odnosom prema poslovima mogao zaustavljati uobičajeni tok njihove provedbe. Od 1953. godine on je uistinu veliki dio svojeg vremena posvetio poslovima *Instituta*, najviše razmatranju povećanog broja prijava logičara za gostujući status na *Institutu*. Međutim, unatoč tom angažmanu, Gödel je ograničio svoje osobne kontakte na manji broj gostiju (iako je pokazivao interes i za rad svih ostalih). S Gödelom su uspjeli uspostaviti dublji znanstveni i osobni kontakt W. Boone, G. Kreisel, G. Takeuti, D. Scott i H. Wang. Osim toga, Gödel je bio impresioniran radom C. Spectora (koji je neposredno nastavio neke njegove radove) i A. Robinsona, iako je s njima imao manje osobne kontakte.

Gödelu su dodijeljene mnoge počasti. Godine 1951. podijelio je (s J. Schwingerom) prvu Einsteinovu nagradu; iste godine ga je Američko matematičko društvo izabralo za Gibbs Lecturera; 1955. je izabran za člana National Academy of Sciences; 1957. za člana Royal Society; 1975. mu predsjednik SAD, G. Ford, dodjeljuje National Medal of Science. Naravno, to su samo neke od dodijeljenih mu počasti.

Posljednjih petnaest godina svojega života Gödel se veoma rijetko vraćao logici; bio je okupiran gostima i poslovima Instituta, te vlastitim filozofskim studijama. Uglavnom je revidirao svoje ranije logičke radove. Posebno se trsio oko prijevoda i revizije svoje konstruktivne interpretacije aritmetike (tzv. *Dialectica* interpretacije) objavljene 1958. godine. Ta će revizija biti tiskana tek u njegovim sabranim djelima. Ranih 70-ih godina uzbuđenje u redovima logičara bilo je prilično zbog jednog Gödelovog neobjavljenog ali u Princetonu „kolajućeg” spisa, u kojem on predlaže nove aksiome teorije skupova koji su trebali implicirati negaciju hipoteze kontinuum. Međutim, pokazale su se bitne teškoće u argumentima koji vode negaciji CH, pa spis nije nikada objavljen. Sam Gödel je previd tih teškoća pripisao svojem teškom zdravstvenom stanju.

Naime, već od 60-ih godina Gödelovo je zdravlje bilo loše. Preporučena mu je operacija prostate na koju nikada nije pristao (čini se da je Gödelovo nepovjerenje prema liječnicima bilo potpuno). Osim problema s prostatom, on je bio ubijeden da mu je i srce slabo (mimo svake medicinske potvrde). Vratile su mu se i depresije, sada dopunjene paranojom. Proganjao ga je strah od trovanja zbog čega je odbijao jesti. Umro je u Princetonu 14. siječnja 1978. zbog „slabe ishranjenosti i potpune iscrpljenosti uzrokovane poremećajem ličnosti”. Gödelova je smrt imala iznenađujuće velik odjek u sredstvima informiranja (zagrebački je „Start” objavio dvije stranice teksta o *Kantu 20. stoljeća*), pa su se mnogi intelektualci čudili kako nisu za Gödelova života ništa čuli o tom velikanu 20. stoljeća.