MATEMATIKA - MATERIJALI

Sadržaj

MATEMATIKA 1

KOLOKVIJI IZ MATEMATIKE 1

A

MATEMATIKA 1

(drugi kolokvij, 18.12.2003.)

1. Nađite derivacije sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = 2^x \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)$,

(b) $y(\sin^2 x + sin2x) = 5$,

(c) $x(t) = 2\cos t, \quad y(t) = \frac{3\sin t}{t}$.

(20 bodova)

2. Kojom se brzinom mijenja volumen kugle u trenutku $t = 3s$, ako je kuglin radijus r u trenutku t zadan sa

$$r(t) = 3 + \sin\left(t \cdot \frac{\pi}{4}\right) \ ?$$

(20 bodova)

3. Odredite jednadžbu tangente i normale na krivulju

$$y^2 = x^3 + 8x + 1$$

u točki $T(2, -5)$.

(20 bodova)

4. Odredite intervale rasta i pada funkcije

$$f(x) = (x-1)(x^2 - 5x + 4).$$

Pomoću dobivenih intervala skicirajte graf funkcije.

(20 bodova)

5. Odredite stranice pravokutnika čiji je opseg 12cm tako da mu površina bude maksimalna.

(20 bodova)

B

MATEMATIKA 1

(drugi kolokvij, 18.12.2003.)

1. Nađite derivacije sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = \cos\left(x^2 + \dfrac{1}{1-x}\right)$,

(b) $y^2\left(\sin x + \cos(1-x)\right) = 5\ln x$,

(c) $x(t) = 2e^{t-1}, \quad y(t) = \dfrac{3\sin t}{e^t}$.

(20 bodova)

2. Kojom se brzinom mijenja volumen kocke u trenutku $t = 1s$, ako je stranica a u trenutku t zadana s

$$a(t) = \sqrt{7 + 2(t-2)^2} \ ?$$

(20 bodova)

3. Odredite jednadžbu tangente i normale na krivulju

$$x^2 + 2 = y^3 + 5y$$

u točki $T(-4, 2)$.

(20 bodova)

4. Odredite intervale rasta i pada funkcije

$$f(x) = (x-2)(x^2 - 3x + 2).$$

Pomoću dobivenih intervala skicirajte graf funkcije.

(20 bodova)

5. Odredite stranice pravokutnika čija je površina 9 cm tako da mu opseg bude bude minimalan.

(20 bodova)

MATEMATIKA 1

(2. ponovljeni kolokvij, 06.02.2004.)

1. Nađite derivacije sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = x + \dfrac{3}{1-x}$,

(b) $\ln x + \cos(1-x) = 5y^2$,

(c) $x(t) = 2\ln(t^2+1), \quad y(t) = 3\cos t$.

(20 bodova)

2. Kojom se brzinom mijenja volumen cilindra u trenutku $t = 1s$, ako je visina $v = 5$, a radijus se mijenja u vremenu prema formuli

$$r(t) = t^2 + 3t.$$

Volumen cilindra računa se prema formuli $V = (r^2\pi)v$.

(20 bodova)

3. Odredite jednadžbu tangente na krivulju

$$x^2 + 2x - 2 = 2y^3 + 4y$$

u točki $T(-4, 1)$.

(20 bodova)

4. Odredite asimptote (horizontalne i vertikalne) grafa funkcije

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+2}.$$

Skicirajte graf.

(20 bodova)

5. Odredite stranice a, b pravokutnika čija je površina 16 cm tako da zbroj $a + b$ bude bude minimalan.

(20 bodova)

A

MATEMATIKA 1

(1. kolokvij, 12.11.2004.)

1. Zadan je pravokutnik $OABC$. Točka P je polovište stranice BC, a točke M i N dijele stranicu AB na tri jednaka dijela. Izrazite vektor $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}$ pomoću vektora $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{OC}$.

(15 bodova)

2. Odredite vrijednosti parametra m tako da pravci

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+3}{-1},$$

i

$$\begin{aligned} x &= 3 - 2t \\ y &= 4 + 5t \\ z &= -1 \end{aligned}$$

budu okomiti.

(10 bodova)

3. Napišite jednadžbu ravnine koja je određena točkama $A(3, -2, 0)$, $B(2, -1, 1)$, $C(-3, -1, 3)$.

(15 bodova)

4. Riješite sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & -3 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \end{array}$$

(15 bodova)

5. Nađite inverznu matricu matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(15 bodova)

6. Odredite svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene vektore matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(15 bodova)

7. Definirajte pojam linearne zavisnosti vektora. Navedite primjer tri linearno zavisna vektora u $\mathbb{R}^3$ (u prostoru).

(15 bodova)

B

MATEMATIKA 1

(1. kolokvij, 12.11.2004.)

1. Zadan je pravokutnik $OABC$. Točka P raspolavlja stranicu AB, a točke M i N dijele stranicu BC na tri jednaka dijela. Izrazite vektor $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}$ pomoću vektora $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{OC}$.

(15 bodova)

2. Odredite vrijednosti parametra n tako da pravci

$$\frac{x-3}{n} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{-2},$$

i

$$\begin{aligned} x &= 1-t \\ y &= -2 \\ z &= 4+3t \end{aligned}$$

budu okomiti.

(10 bodova)

3. Napišite jednadžbu ravnine koja je određena točkama $K(-1,-3,3)$, $L(-2,3,0)$, $M(-1,2,1)$.

(15 bodova)

4. Riješite sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & -4 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -2 \end{array}$$

(15 bodova)

5. Nađite inverznu matricu matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(15 bodova)

6. Odredite svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene vektore matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

(15 bodova)

7. Definirajte pojam linearne nezavisnosti vektora. Navedite primjer tri linearno nezavisna vektora u $\mathbb{R}^3$ (u prostoru).

(15 bodova)

MATEMATIKA 1

(ponovljeni 1. kolokvij, 04.02.2005.)

1. Nađite kosinus kuta pri vrhu A trokuta s vrhovima $A(1,1,1)$, $B(1,2,3)$, $C(2,3,1)$.

(15 bodova)

2. Odredite vrijednosti parametra m tako da pravci

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{m} = \frac{z+3}{-1},$$

i

$$\begin{aligned} x &= 3+2t \\ y &= 4+5t \\ z &= -1 \end{aligned}$$

budu okomiti.

(10 bodova)

3. Napišite jednadžbu ravnine koja prolazi točkom $A(1,0,1)$ i okomita je na pravac koji prolazi točkama $B(0,0,0)$ i $C(1,2,3)$.

(15 bodova)

4. Riješite sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -2 \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & -4 \end{array}$$

(15 bodova)

5. Nađite inverznu matricu matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(15 bodova)

6. Odredite svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene vektore matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(15 bodova)

7. Ispitajte jesu li vektori $\vec{a} = (1,2,3)$, $\vec{b} = (2,3,1)$ i $\vec{c} = (3,1,2)$ linearno nezavisni.

(15 bodova)

A

MATEMATIKA 1

(2. kolokvij, 17.12.2004.)

1. Nađite derivacije sljedećih funkcija:

a) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 1} \cdot e^{2x-1}$

b) $g(x) = \dfrac{\sin(2x) - \cos(2x)}{x}$

(dobivene derivacije ne treba sređivati)

(15 bodova)

2. Nađite jednadžbu tangente krivulje

$$x = 4\sqrt{t} + 3t, \qquad y = \frac{4}{t},$$

u točki s parametrom $t = 4$.

(10 bodova)

3. Čestica se giba po krivulji $y^2 = x^3$. Kad se nalazi u točki $T(1, -1)$ brzina promjene x-koordinate iznosi 2. Kolika je tada brzina promjene y-koordinate?

(10 bodova)

4. Nađite linearnu aproksimaciju funkcije $f(x) = \sqrt[4]{x}$ u okolini točke $x_0 = 16$ i pomoću nje približno izračunajte $\sqrt[4]{16.1}$.

(15 bodova)

5. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije

$$f(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}x^4.$$

(20 bodova)

6. Kako rastaviti broj 300 na sumu dva pozitivna broja a, b ($a + b = 300$) tako da umnožak prvog broja i kvadrata drugog (ab^2) bude maksimalan?

(15 bodova)

7. Definirajte pojam derivacije funkcije f u točki x. Na osnovu definicije izračunajte $f'(2)$ za $f(x) = 3x^2$.

(15 bodova)

B

MATEMATIKA 1

(2. kolokvij, 17.12.2004.)

1. Nađite derivacije sljedećih funkcija:

a) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 1} \cdot \ln(2x - 1)$

b) $g(x) = \dfrac{(\sin x)^2}{\cos(2x)}$

(dobivene derivacije ne treba sređivati)

(15 bodova)

2. Nađite jednadžbu tangente krivulje

$$x = \frac{4}{t}, \qquad y = 4\sqrt{t} + 3t,$$

u točki s parametrom $t = 4$.

(10 bodova)

3. Čestica se giba po krivulji $x = y^2 - y - 2$. Kad se nalazi u točki $T(-2, 1)$ brzina promjene x-koordinate iznosi 2. Kolika je tada brzina promjene y-koordinate?

(10 bodova)

4. Nađite linearnu aproksimaciju funkcije $f(x) = \sqrt[3]{x}$ u okolini točke $x_0 = 27$ i pomoću nje približno izračunajte $\sqrt[3]{26.9}$.

(15 bodova)

5. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije

$$f(x) = \frac{1}{3}x^4 - 2x^2.$$

(20 bodova)

6. Kako rastaviti broj 250 na umnožak dva pozitivna broja a, b ($ab = 250$) tako da zbroj prvog broja i kvadrata drugog ($a + b^2$) bude minimalan?

(15 bodova)

7. Definirajte pojam derivacije funkcije f u točki x. Na osnovu definicije izračunajte $f'(3)$ za $f(x) = 2x^2$.

(15 bodova)

MATEMATIKA 1

(ponovljeni 2. kolokvij, 04.02.2005.)

1. Nađite derivacije sljedećih funkcija:

a) $f(x) = \sin 4x \cdot \ln(2x+1)$

b) $g(x) = \dfrac{3 + \cos 2x}{x}$

(dobivene derivacije ne treba sređivati)

(15 bodova)

2. Nađite jednadžbu tangente krivulje

$$x = 4\sqrt{t}, \qquad y = \frac{4}{t},$$

u točki s parametrom $t = 1$.

(10 bodova)

3. Nađite derivaciju funkcije implicitno zadane jednadžbom

$$y \ln y + x^2 = 1.$$

(15 bodova)

4. Nađite linearnu aproksimaciju funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ u okolini točke $x_0 = 16$ i pomoću nje približno izračunajte $\sqrt{16.1}$.

(15 bodova)

5. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije

$$f(x) = x^3 - x^2.$$

(20 bodova)

6. Nađite najveću i najmanju vrijednost funkcije $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x - 1$ na intervalu $[-1, 5]$.

(15 bodova)

7. Izračunajte

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \sin x}{x - \sin 2x}.$$

(10 bodova)

A

MATEMATIKA 1

(3. kolokvij, 31.01.2005.)

1. Izračunajte:

a) $\int (x-1)(x^2+x)dx$

b) $\frac{d}{dx}\left[\sqrt{\arcsin x} + \operatorname{arctg}\sqrt{x}\right]$

(15 bodova)

2. Izračunajte površinu omeđenu krivuljama $y = x^2$, i $y = 2 - x$.

(15 bodova)

3. Izračunajte neprave integrale

a) $\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$

b) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(15 bodova)

4. Akceleracija tijela u trenutku t iznosi $a(t) = t + \sin t$. Ako je u trenutku $t = 0$ tijelo imalo brzinu $v(0) = -1$ i položaj $x(0) = 0$ odredite položaj $x(t)$ tijela u trenutku t.

(15 bodova)

5. Ispitajte tok i skicirajte kvalitativan graf funkcije

$$y = (x+1)e^{-x}.$$

(20 bodova)

6. Ako se u 100 godina raspadne 10% radioaktivne tvari, nađite njeno vrijeme poluraspada.

(15 bodova)

7. Nađite $\frac{d}{dx}[x \ln x - x]$. Na osnovu toga izračunajte $\int_1^e \ln x dx$.

(10 bodova)

B

MATEMATIKA 1

(3. kolokvij, 31.01.2005.)

1. Izračunajte:

a) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x}dx$

b) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left[\arcsin(x^2) + (\operatorname{arctg} x)^2\right]$

(15 bodova)

2. Izračunajte površinu omeđenu krivuljama $y = -x^2,$ i $y = x - 2$.

(15 bodova)

3. Izračunajte neprave integrale

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx$

b) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(15 bodova)

4. Akceleracija tijela u trenutku t iznosi $a(t) = 1 - \cos t$. Ako je u trenutku $t = 0$ tijelo imalo brzinu $v(0) = 0$ i položaj $x(0) = 1$ odredite položaj $x(t)$ tijela u trenutku t.

(15 bodova)

5. Ispitajte tok i skicirajte kvalitativan graf funkcije

$$y = xe^{-x+1}.$$

(20 bodova)

6. Vrijeme poluraspada radioaktivne tvari je 1000 godina. Ako je na početku bilo 1000 grama tvari koliko će se grama raspasti nakon 100 godina?

(15 bodova)

7. Nađite $\displaystyle\frac{d}{dx}\left[x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]$. Na osnovu toga izračunajte $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx$.

(10 bodova)

MATEMATIKA 1

(ponovljeni 3. kolokvij, 04.02.2005.)

1. Izračunajte:

a) $\int \frac{x^2+x}{x}dx$

b) $\frac{d}{dx}\left[\sqrt{\arcsin(x)} + (\operatorname{arctg} x)^2\right]$

(15 bodova)

2. Izračunajte površinu omeđenu krivuljama $y = 1 - x^2$, i $y = -3$.

(15 bodova)

3. Izračunajte neprave integrale

a) $\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$

b) $\int_0^2 \frac{1}{x}dx$

(15 bodova)

4. Tijelo se giba po osi x. Brzina tijela u trenutku t iznosi $v(t) = 2t + \sin t$. Ako je u trenutku $t = 0$ tijelo imalo položaj $x(0) = 2$, odredite položaj tijela u trenutku t.

(10 bodova)

5. Odredite najveću i najmanju vrijednost funkcije $f(x) = \sin x + \cos x$ na intervalu $[0, \pi]$.

(10 bodova)

6. Ispitajte tok i skicirajte kvalitativan graf funkcije

$$y = (1-x)e^x.$$

(20 bodova)

7. Vrijeme poluraspada radioaktivne tvari je 500 dana. Ako je na početku bilo 1000 grama tvari koliko će se grama raspasti nakon 300 dana?

(15 bodova)

PISMENI ISPITI IZ MATEMATIKE 1

MATEMATIKA 1

(16. Rujan, 2003.)

8. Deriviraj:

$$y = \sqrt{\operatorname{tg} 2x}.$$

9. Izračunaj y':

$$\ln(x - y) = x.$$

10. Nađi intervale rasta i pada funkcije:

$$y = \frac{x^2}{2^x}.$$

11. Izračunaj:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos 3x dx \; .$$

12. Izračunaj volumen tijela koje nastaje rotacijom dijela površine omeđene sa $x = y^2 - y$ i $x = 0$ oko y-osi.

13. Odredi prva tri člana Taylorova razvoja oko $x = 0$ za $y = x \ln(x + 1)$.

MATEMATIKA 1

(01. Listopad, 2003.)

1. Deriviraj:

$$y = \cos x\sqrt{\sin 2x}.$$

2. Izračunaj y':

$$e^{x-y} = x + e^{-x}.$$

3. Nađi intervale rasta i pada funkcije:

$$y = -e^{-x} - \frac{1}{1+e^x}.$$

4. Izračunaj:

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 2x\cos(x^2)dx\ .$$

5. Krivulja $y = x^3$, $0 \leq x \leq 1$ rotira oko osi x. Nađite volumen dobivenog tijela.

6. Odredi prva tri člana Taylorova razvoja oko $x = 0$ za

$$y = \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

MATEMATIKA 1

(10. Veljače 2004.)

Napomena

Studenti koji su kolegij matematika 1 slušali ove godine (2003/2004) rješavaju zadatke 1–6. Ostali rješavaju zadatke 3–8.

1. Odredite parametarsku jednadžbu pravca koji je presjek ravnina

$$\begin{aligned} \Pi_1 \ldots \qquad & x+y+z-1=0 \\ \Pi_2 \ldots \qquad & 2x-y+z+4=0\ . \end{aligned}$$

2. Riješite sustav:

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= 3 \\ 2x_1-2x_2+x_3 &= 6 \\ 3x_1-x_2+2x_3 &= 6\ . \end{aligned}$$

3. Izračunajte $\frac{dy}{dx}$:

a) $\quad y = \dfrac{\ln x}{x^2+1} + \sin x^2$

b) $\quad y(t) = 3t^2 + 2\sqrt{t}, \;\; x(t) = \dfrac{e^t}{2t+1}\ .$

4. Odredite jednadžbu normale na krivulju $3y^2x + yx^2 = 9x + 1$ u točki $(1, -2)$.

5. Nacrtajte graf funkcije

$$y = \frac{x+1}{x^2-4}\ .$$

6. Nađite površinu omeđenu krivuljama $y = -x^2 + x$ i $y = -x$.

7. Izračunajte

$$\int x^2 \ln x \, dx.$$

8. Razvijte u Taylorov red oko točke $x_0 = 0$ funkciju

$$y = (x+1)\sin x.$$

MATEMATIKA 1

(19. Studeni, 2004.)

1. Izračunajte kut pod kojim se sijeku pravci

$$p_1 \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{-1} \qquad \text{i} \qquad p_2 \equiv \begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$$

2. Riješite sustav $A\vec{x} = \vec{b}$ ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

3. Derivirajte $y = x^2\sqrt{1+\cos 2x}$.

4. Napišite jednadžbu tangente na krivulju

$$x = te^{t-1},\ y = (t^2+1)e^{t-1}$$

u točki $t_0 = 1$.

5. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = 3x^2 - x^3$.

6. Izračunajte površinu dijela ravnine omeđenog sa $y = -x$, $y = x^2 - 4x$.

MATEMATIKA 1

(15. Veljače 2005.)

1. Zadani su vrhovi trokuta $A(-1,2,0)$, $B(0,-2,-1)$, $C(1,0,1)$.
Izračunajte kut pri vrhu A trokuta.

2. Nađite svojstvene vrijednosti i odredite svojstvene vektore matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Derivirajte

$$y = (x+1)\arctan(\sqrt{x}).$$

4. Napišite jednadžbu tangente na krivulju

$$x^2y + x + y^2 = 1$$

u točki $(1,0)$.

5. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije

$$y = \frac{x^2}{2(x-1)}.$$

6. Izračunajte površinu dijela ravnine omeđenog krivuljama $y = \sin x$ i $y = \pi x - x^2$.

ZADAĆE IZ MATEMATIKE 1

MATEMATIKA 1

(prva zadaća)

Vektori i primjene

1. U trokutu ΔABC točke M i N dijele stranicu $\overline{AB}$ na tri jednaka dijela. Označite $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$ i izrazite vektore $\overrightarrow{CM}$ i $\overrightarrow{CN}$ pomoću vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

2. Zadani su vrhovi trokuta $A(1,2,3)$, $B(3,2,1)$ i $C(1,4,1)$. Pokažite da je trokut ABC jednakostraničan.

3. Zadani su radij-vektori vrhova trokuta: $\vec{r_A} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{r_B} = \vec{i} + \vec{k}$ i $\vec{r_C} = \vec{j} + \vec{k}$. Odredite radij-vektor težišta trokuta.

4. Za vektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, $A(0,0,1)$, $B(3,2,1)$, $C(4,6,5)$ i $D(1,6,3)$ odredite duljinu i napišite vektor $\vec{a_0}$ (jedinični vektor vektora $\vec{a}$).

5. Odredite jednadžbu pravca koji prolazi točkom $A(1,2,1)$ i

a) točkom $B(2,-1,-3)$

b) ima vektor smjera $\vec{s} = (3,3,4)$

c) paralelan je s pravcem određenim s $\frac{x-1}{2} = \frac{y+7}{0} = \frac{z+1}{3}$

d) okomit je na ravninu $5x - 11y + z = 2$.

6. Odredite jednadžbu ravnine koja prolazi točkom $A(1,2,3)$ i paralelna je vektorima $\vec{p} = (-1,0,2)$ i $\vec{q} = (2,1,3)$.

7. Izračunajte $\vec{a} \cdot \vec{b}$ i odredite kakav kut zatvaraju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ako je

a) $\vec{a} = (1,2,3)$, $\vec{b} = (-2,2,1)$

b) $\vec{a} = (2,-1,3)$, $\vec{b} = (-2,1,1)$

c) $\vec{a} = (1,-2,-1)$, $\vec{b} = (1,0,1)$.

8. Odredite kuteve trokuta ΔABC određenog vrhovima $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(2,1,2)$.

9. Odredite projekcije vektora $\vec{a}$ na koordinatne osi, ako je $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$, $A(1,0,1)$, $B(0,1,-1)$, $C(-2,0,1)$ i $D(3,-2,1)$.

10. Odredite m tako da vektori $\vec{a} = (m,4,-3)$ i $\vec{b} = (1,-2,\frac{3}{2})$ budu
a) okomiti; b) kolinearni.

11. Izračunajte

a) $(5\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b})$, ako je $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ i $\vec{a} \perp \vec{b}$.

b) $|2\vec{a} - 5\vec{b}|$, ako je $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$ i $\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{4}$.

12. Izračunajte vektorski produkt $\vec{a} \times \vec{b}$ za

a) $\vec{a} = (2, 3, 5)$ i $\vec{b} = (1, 2, 1)$.

b) $\vec{a} = (1, 3, 7)$ i $\vec{b} = (-2, -6, -14)$.

13. Odredite jedinični vektor koji je okomit na vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$, ako je

a) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

b) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $A(1, 0, 1)$, $B(2, 1, 3)$, a $\vec{b}$ zatvara s osi y kut $\frac{\pi}{3}$, s osi z kut $\frac{\pi}{4}$ i $|\vec{b}| = 1$, te sa osi x zatvara oštar kut.

14. Neka je $\vec{a} = (1, 2, -1)$. Odredite dva vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$ tako da su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ međusobno okomiti.

15. Za trokut ΔABC zadan s $A(1, 1, 1)$, $B(2, 3, 4)$, $C(4, 3, 2)$ odredite
a) površinu; b) visinu na stranicu $\overline{AB}$.

16. Napišite jednadžbu ravnine koja sadrži točku $A(0, 1, 2)$ i

a) okomita je na pravac $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z+2}{4}$.

b) sadrži pravac iz zadatka a).

17. Napišite jednadžbu ravnine koja sadrži točke $A(0, 2, 0)$, $B(1, 1, \frac{1}{3})$, $C(-1, 1, 1)$.

18. Odredite m i n tako da ravnina $x - 2y + 7z = 4$ i pravac $\frac{x-n}{m} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{n}$ budu okomiti.

19. Odredite m tako da ravnine $x - 4y + z = 0$, $mx + y - 11z = 1$ budu međusobno okomite.

20. Nađite probodište pravca $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ s ravninom $x + 2y + z = 3$.

21. Izračunajte $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ ako je

a) $\vec{a} = (2, -1, -1)$, $\vec{b} = (1, 3, -1)$, $\vec{c} = (1, 1, 4)$.

b) $\vec{a} = (2, 0, 1)$, $\vec{b} = (3, -1, 0)$, $\vec{c} = (4, 2, 3)$.

22. Ispitajte jesu li vektori $\vec{a} = (2, 5, 7)$, $\vec{b} = (1, 1, -1)$ i $\vec{c} = (1, 2, 2)$ komplanarni. Ako jesu, izrazite vektor $\vec{c}$ pomoću vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

23. Ispitajte leže li točke $A(5, 7, -2)$, $B(3, 1, -1)$, $C(9, 4, -4)$ i $D(1, 5, 0)$ u istoj ravnini.

24. Vrhovi trostrane piramide su: $A(2, 2, 2)$, $B(4, 3, 3)$, $C(4, 5, 4)$ i $D(5, 5, 6)$. Izračunajte

a) volumen

b) površinu baze ΔABC

c) visinu piramide spuštene na bazu ΔABC.

……

MATEMATIKA 1

(druga zadaća)

Matrice, vektori

1. Ako je $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ naći:
a) $2A - 3B$, b) $(2A - 3B)^T$, c) $2A^T - 3B^T$.

2. Za matrice iz prethodnog zadatka izračunajte AB^T i $B^T A$.

3. Za matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

naći AB i BA.

4. Za matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ naći AB i BA.

5. Izračunajte a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

Rješavanje sustava linearnih jednadžbi

6. Riješite sustav:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 &= 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 &= 2. \end{aligned}$$

7. Odrediti a tako da sustav

$$\begin{aligned} x - y + az &= 1 \\ 2x + 4y - 2z &= 2 \\ 3x + 5z &= 5 \end{aligned}$$

nema rješenja.

8. Riješi sustave:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{b) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

9. Dvije ravnine koje sadrže ishodište zadane su sa vektorima normala $\vec{n}_1 = (1,2,3)$ i $\vec{n}_2 = (0,4,5)$. Presjek ovih ravnina je pravac. Odredite parametarsku jednadžbu toga pravca rješavanjem sustava jednadžbi dobivenog iz jednadžbi ovih ravnina.

10. Odredite $\lambda \in \mathbb{R}$ tako da sustav

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_3 &= -3 \\ 2x_1 + \lambda x_2 + x_3 &= -2 \\ x_1 + 2x_2 - \lambda x_3 &= 1 \end{aligned}$$

a) ima jedinstveno rješenje,

b) nema rješenja,

c) ima beskonačno rješenja.

Inverzne matrice

11. Odredite inverzne matrice za:

a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

12. Odredi A^{-1} za

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6} \\ 0 & -\sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

13. Odredi A_1^{-1} i A_2^{-1}, za $A_1 = B^{-1}C^2$, $A_2 = B + C^{-1}$. Matrice B i C su zadane sa

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Svojstveni vektori i svojstvene vrijednosti

14. Odredite svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene vektore matrica:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

MATEMATIKA 1

(treća zadaća)

1. Nađite derivacije sljedećih funkcija tj. nađite $\frac{dy}{dx}$:

a) $y = x^6 - 3x^2 + 2x - 5$

b) $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - \frac{x^4}{2}$

c) $y = \frac{-5x^3}{a}$

d) $y = \frac{\pi}{x} + \ln 2$

e) $y = x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}$

f) $y = 3x^{\frac{2}{3}} - x^{-3}$

g) $y = \operatorname{tg} x - x \cos x$

h) $y = \frac{2x+3}{x^2-2x+7}$

i) $y = x \cdot 3^x$

j) $y = e^x \cos x$

k) $y = (x^2 + 3x - 1)\ln x$

l) $y = 2x \sin x - (x^2 - 2)\cos x$

m) $y = \frac{x^2}{\ln x}$

n) $y = \frac{1}{x} + 2\log_{10} x - \frac{\ln x}{x}$

2. Nađite jednadžbu tangente na krivulju

a) $y = 2^x$

b) $y = (\frac{1}{2})^x$

u točki $x = 3$. Skicirajte krivulju i tangentu.

3. Nađite jednadžbu tangente na krivulju $y = x^2 - 4$ koja je okomita na pravac $y = -x + 1$.

4. Nađite linearnu aproksimaciju funkcije $y = \sqrt[3]{x}$ za $x = 1$. Koristeći se tom aproksimacijom približno izračunajte $\sqrt[3]{1.02}$.

5. Nađite linearnu aproksimaciju funkcije $y = e^x$ za $x = 0$. Koristeći se tom aproksimacijom približno izračunajte $e^{-0.02}$.

6. Za funkciju $y = \cos x$ i za $x = \frac{\pi}{6}$ i $\Delta x = \frac{\pi}{36}$ nađite diferencijal (linearnu aproksimaciju prirasta).

7. Za funkciju $y = \ln x$ i za $x = 1$ i $\Delta x = -0.5$ nađite diferencijal (linearnu aproksimaciju prirasta).

8. Položaj točke koja se giba po pravcu zadan je funkcijom $x(t) = 3t - t^3$ (t u sekundama, x u centimetrima). Nađite brzinu i ubrzanje te točke u trenutku $t = 2$.

9. Položaj točke koja se giba po pravcu zadan je funkcijom $x(t) = 2t - \frac{1}{2}t^4$ (t u sekundama, x u centimetrima). Nađite brzinu i ubrzanje te točke u trenutku $t = 4$.

10. Nađite derivacije sljedećih funkcija:

a) $y = \left(\dfrac{ax+1}{3}\right)^4$

b) $y = (3 + 2x)^{10}$

c) $y = \cos^3 x + \cos 3x$

d) $y = \sin 3x + \sin^3 x$

e) $y = \ln^2(2x^2 + 1)$

f) $y = \sqrt{\ln(3x^2 + 4)}$

11. Nađite

a) $y'(0)$ za $y = 5e^{-x^2} + 2e^{2x+1}$

b) $y'(0)$ za $y = 4e^{x^2-2x} + \frac{1}{2}e^{x-1}$

c) $y'(0)$ za $y = \dfrac{1 - \sin 2x}{1 + \sin 2x}$

d) $y'(\frac{\pi}{2})$ za $y = \dfrac{1 - \cos 3x}{1 + \cos 3x}$

12. Jedna stranica pravokutnika ima konstantnu veličinu $a = 2cm$, a druga stranica b raste konstantnom brzinom $4cm/s$. Kojom brzinom rastu dijagonala i površina tog pravokutnika kada je $b = 30cm$?

13. Polumjer kugle povećava se jednoliko brzinom od $5cm/s$. Kojom se brzinom povećava površina kugline plohe i volumen kugle u trenutku kada polumjer postane jednak $50cm$?

14. Nađite derivaciju $\frac{dy}{dx}$ funkcije zadane s

a) $\ln y + \frac{x}{y} = e$, b) $y^3 = \frac{x-y}{x+y}$.

15. Izračunajte vrijednost y' funkcije $(x+y)^3 = 2(x-y)$ za $x = 3$ i $y = -1$. Napišite jednadžbu tangente na krivulju u točki $T(3, -1)$.

16. Izračunajte vrijednost y' funkcije $y^2 = x + \ln \frac{y}{x}$ za $x = 1$, $y = 1$. Napišite jednadžbu tangente na krivulju u točki $T(1, 1)$.

17. Nađite derivaciju $y' = \frac{dy}{dx}$ funkcije zadane parametarski:

a) $x = \dfrac{1}{1+t},\ y = \left(\dfrac{t}{1+t}\right)^2$ b) $x = \dfrac{2at}{1+t^2},\ y = \dfrac{a(1-t^2)}{1+t^2}$

18. Izračunajte $y' = \frac{dy}{dx}$ za zadanu vrijednost parametra t, ako je

a) $x = \dfrac{1}{1+t},\ y = \left(\dfrac{t}{1+t}\right)^2,\ t = \frac{\pi}{2}$,

b) $x = t\ln t,\ y = \dfrac{\ln t}{t},\ \ t = 1$.

19. Koristeći L'Hospitalovo pravilo izračunajte

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^3}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin 3x}$,

c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}$, d) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^x}{x^3}$.

MATEMATIKA 1

(četvrta zadaća)

1. Odredite intervale rasta i pada, te lokalne ekstreme sljedećih funkcija

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$
b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$
c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$
d) $f(x) = \dfrac{(x-2)(8-x)}{x^2}$
e) $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$
f) $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2}$
g) $f(x) = x \ln x$
h) $f(x) = xe^x$

2. Odredite intervale zakretanja, te točke pregiba sljedećih funkcija

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$
b) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$
c) $f(x) = (1 + x^2)e^x$
d) $f(x) = x^2 \ln x$

3. Izračunajte sljedeće limese:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x+3)(x-2)}{1 - 4x^2}$
b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x^4 + 1}}$
c) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2 - 5x + 10}{x^2 - 25}$
d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$
e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$
f) $\lim\limits_{x\to 64} \dfrac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$
g) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$
h) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3 - \sqrt{5+x}}{x - 4}$
i) $\lim\limits_{x\to 1} (1 - x) \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2}$
j) $\lim\limits_{x\to 1} \ln x \cdot \ln(x - 1)$

4. Ispitajte granično ponašanje sljedećih funkcija u okolini točaka prekida i “u beskonačnosti”.

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$
b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4x + 3}$
c) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x + 1}$
d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$
e) $f(x) = \dfrac{1}{1 - e^x}$
f) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

5. Ispitajte tok i skicirajte graf sljedećih funkcija

a) $f(x) = x^3 - 3x^2$
b) $f(x) = \dfrac{6x^2 - x^4}{9}$
c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$
d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$
e) $f(x) = x\sqrt{x+3}$
f) $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x}$
g) $f(x) = xe^{-x}$
h) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

6. Odredite najveću i najmanju vrijednost funkcije na zadanom intervalu

a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ za $x \in [-1, 5]$
b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ za $x \in [-10, 12]$
c) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$ za $x \in [-5, 2\rangle$
d) $f(x) = \sqrt{x(10 - x)}$ za $x \in [1, 6\rangle$

7. Odredite stranice pravokutnika čija je površina $9cm^2$ tako da mu opseg bude minimalan.

8. Odredite stranice a, b pravokutnika čija je površina $16cm^2$ tako da zbroj $a + b$ bude minimalan.

9. Zadanoj kugli radijusa R treba upisati valjak najvećeg volumena. Koje su dimenzije tog valjka?

10. Zadanoj kugli radijusa R treba upisati stožac najvećeg volumena. Koje su dimenzije tog stošca?

MATEMATIKA 1

(peta zadaća)

1. Izračunajte neodređene integrale:

a) $\int 2(3x-1)^2 dx$

b) $\int (1+x)(2-x+x^2)dx$

c) $\int \frac{x^4+2x^3+7}{\sqrt[3]{x}} dx$

d) $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 2x^4 + \frac{x}{\sqrt[5]{x^2}}\right) dx$

e) $\int \frac{5}{\cos^2 x} dx$

f) $\int (\sin x + 5\cos x)dx$

g) $\int (5^x + 5x)dx$

h) $\int (e^x + x^2)dx$

2. Nađite funkciju čija je derivacija $y' = 7x + 4$ ako je za $x = 2$ vrijednost funkcije 16.

3. Nađite funkciju čija je derivacija $y' = 3x^2 + 5$ ako je za $x = 1$ vrijednost funkcije 9.

4. Brzina čestice koja se giba duž osi x u trenutku t iznosi $v(t) = 3t^2 + 4$. Odredite položaj čestice u proizvoljnom trenutku t ako je u trenutku $t = 2$ čestica u točki $x = 20$.

5. Brzina čestice koja se giba duž osi x u trenutku t iznosi $v(t) = t^2 - 8t + 2$. Odredite položaj čestice u proizvoljnom trenutku t ako je u trenutku $t = 4$ čestica u točki $x = 24$.

6. Ubrzanje čestice koja se giba po osi x iznosi $a(t) = 12t^2 + 6t$. Odredite položaj i brzinu čestice u proizvoljnom trenutku ako je u trenutku $t = 1$ brzina $v = 8$ i položaj $x = 8$.

7. Ubrzanje čestice koja se giba po osi x iznosi $a(t) = -6t + 18$. Odredite položaj i brzinu čestice u proizvoljnom trenutku ako je u trenutku $t = 0$ brzina $v = 24$ i položaj $x = 15$.

8. Izračunajte određene integrale:

a) $\int_{-1}^{2} (x^2 + 2x + 1)dx$

b) $\int_{-1}^{0} (x^3 + 2x)dx$

c) $\int_{1}^{4} (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})dx$

d) $\int_{1}^{9} \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx$

e) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx$

f) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x} dx$

9. Izračunajte površine likova koji su omeđeni s

a) $x + 2y - 4 = 0$, $y = 0$, $x = -3$, $x = 2$

b) $x - 2y + 4 = 0$, $x + y - 5 = 0$, $y = 0$

c) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 3$

d) $y = -x^2 + 4$, $y = 0$

e) $y = x^2$, $y = 2x$

f) $7x^2 - 9y + 9 = 0$, $5x^2 - 9y + 27 = 0$

g) $y = \sin x$, $y = x^2 - \pi x$

h) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

10. Izračunajte neprave integrale:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 x}$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3}$

d) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{2}{x} dx$

e) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{3}{x} dx$

f) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^2}$

g) $\displaystyle\int_{-\infty}^1 3^x dx$

h) $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^x dx$

MATEMATIKA 1

(dodatni zadaci sa sustavima)

Riješite sustave Gaussovom metodom:

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

MATEMATIKA 2

Kolokviji iz matematike 2

A

MATEMATIKA 2

(1. kolokvij, 07.04.2005.)

1.

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2)\, dx$$

(10 bodova)

2.

$$\int x^2 \ln x\, dx$$

(10 bodova)

3.

$$\int \frac{x-1}{x^2+2x+2}\, dx$$

(10 bodova)

4. Odredite granice integracije $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ i izračunajte površinu lika unutar polarnog grafa $r = \sqrt{\cos 2\varphi}$ na slici:

(20 bodova)

5. Dio ravnine koji je označen na slici rotira oko

a) oko osi x

b) oko osi y

Napišite integrale kojima računamo volumen nastala tijela. Primijenite metodu diska ili metodu ljuske. Integrale ne treba izračunati.

(20 bodova)

6. Izrazite pomoću integrala duljinu luka krivulje $y = f(x)$ za $a \leq x \leq b$.

(10 bodova)

7. Luk krivulje $x = \frac{1}{3}t^3 - t$, $y = t^2 + 2$ za $0 \leq t \leq 3$ rotira oko osi x. Izračunajte površinu nastale plohe.

(20 bodova)

B

MATEMATIKA 2

(1. kolokvij, 07.04.2005.)

1.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx$$

(10 bodova)

2.

$$\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx$$

(10 bodova)

3.

$$\int \frac{x+1}{x^2-2x+2} \, dx$$

(10 bodova)

4. Odredite granice integracije $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ i izračunajte površinu lika unutar polarnog grafa $r = \sqrt{\sin 2\varphi}$ na slici:

(20 bodova)

5. Dio ravnine koji je označen na slici rotira oko

a) oko osi x

b) oko osi y

Napišite integrale kojima računamo volumen nastala tijela. Primijenite metodu diska ili metodu ljuske. Integrale ne treba izračunati.

(20 bodova)

6. Izračunajte duljinu luka krivulje $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - t$, $y(t) = t^2 + 2$ za $0 \leq t \leq 3$.

(20 bodova)

7. Luk krivulje $y = f(x)$ za $a \leq x \leq b$ rotira oko osi x. Izrazite pomoću integrala površinu nastale plohe.

(10 bodovi)

Pismeni ispiti iz matematike 2

MATEMATIKA 2

(15. Veljače 2005.)

1. Izračunajte
$$\int (2-x)e^{-x}dx.$$

2. Izračunajte površinu dijela ravnine omeđenog prvim lukom cikloide
$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$ i osi x.

3. Nađite ortogonalne trajektorije familije krivulja
$$x^2 + 3y^2 = a^2.$$

4. Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe
$$y'' - 2y' + 2y = e^x.$$

5. Nađite ekstrem funkcije
$$f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x.$$

6. U integralu
$$\int\int_P f(x,y)dxdy$$
odredite granice integracije ako je područje P manji dio kruga $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1$ omeđen pravcem $x + y = 1$.

***Rezultati ispita**: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

Zadaće iz matematike 2

MATEMATIKA 2

(prva zadaća - tehnike integriranja)

Integrali

Izračunajte integrale:

1. a) $\displaystyle\int \frac{10}{3x+2}\,dx$ b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{7}{2x-3}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{2x-7}{2x-3}\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x-1}{3x+2}\,dx$ e) $\displaystyle\int \frac{2}{(2x+1)^3}\,dx$ f) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{(5x-1)^4}{2}\,dx$

g) $\displaystyle\int \ln 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x+1\right)^6 dx$ h) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} e\left(1-\frac{x}{2}\right)^6 dx$ i) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$

j) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{3}x}}$ k) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x+1}\,dx$ l) $\displaystyle\int_3^8 \frac{x}{x+1}\,dx$

m) $\displaystyle\int \frac{5}{1+9x^2}\,dx$ n) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{3}{1+4x^2}\,dx$ o) $\displaystyle\int \frac{dx}{5+x^2}$

p) $\displaystyle\int_1^6 \frac{x^2}{10+x^2}\,dx$ q) $\displaystyle\int \frac{4x}{\sqrt{3-x^2}}\,dx$ r) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+3}}\,dx$

2. a) $\displaystyle\int \frac{3-x}{x^2+2}dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+3}{2x^2+1}dx$ c) $\displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^8}dx$

d) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1-3x^5}{2x-x^6}dx$ e) $\displaystyle\int 2xe^{-x^2+2}dx$ f) $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2+3}dx$

g) $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$ h) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}dx$ i) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$

j) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$ k) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}dx$ l) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin x}dx$

3. a) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2-7x+13}$ c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x}$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$ e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$ f) $\displaystyle\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{x}{x\sqrt{x^2+x-1}}\,dx$ h) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-4-5x-x^2}}$

4. a) $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx$ b) $\displaystyle\int \sin^5 x\,dx$ c) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}\,dx$ e) $\displaystyle\int \sin^4 x\,dx$ f) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$

5. a) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}\,dx$ c) $\displaystyle\int x\sqrt[3]{1-x}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}}$

6. a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{2+x^2}\,dx$ b) $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}\,dx$ c) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \sqrt{x^2+x}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$ e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

7. Izračunajte površine koje omeđuju zadane krivulje sa x-osi:

a) $y = \operatorname{tg} x$, $x = -\frac{\pi}{3}$, $x = -\frac{\pi}{6}$ b) $y = \operatorname{ctg} x$, $x = -\frac{\pi}{3}$, $x = -\frac{\pi}{6}$

c) $y = \dfrac{1}{3-x^2}$, $x = -1$, $x = 1$ d) $y = \dfrac{1}{1-4x^2}$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$

e) $y = \dfrac{2}{4+x^2}$ f) $y = \dfrac{1}{1+3x^2}$, $x = 0$, $x = 3$

Parcijalna integracija

8. Koristeći metode parcijalne integracije i supstitucije izračunajte:

a) $\displaystyle\int (2x)^2 e^x\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{2x}\,dx$ c) $\displaystyle\int x^2 e^{x^3}\,dx$

d) $\displaystyle\int_{-1}^0 x^5 e^{x^3}\,dx$ e) $\displaystyle\int x \sin 2x\,dx$ f) $\displaystyle\int_0^\pi x\cos 2x\,dx$

g) $\displaystyle\int 2^x \cos 2x\,dx$ h) $\displaystyle\int_0^\pi 3^x \cos 3x\,dx$ i) $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x^2}\,dx$

j) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln\ln x}{x}\,dx$

MATEMATIKA 2

(druga zadaća - primjena integrala)

Računanje površina

1. Izračunajte površinu (ploštinu) lika omeđenog krivuljama

a) $y = \cos^4 x$, $y = 0$, pri čemu je $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

b) $x^2 + y^2 = 16$, $y^2 = 12(x-1)$, desno od druge krivulje.

2. Izračunajte površinu lika omeđenog elipsom $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ (uputa: koristite parametarske jednadžbe elipse).

3. Izračunajte površinu lika omeđenog astroidom $x = 3\cos^3 t$, $y = 3\sin^3 t$.

4. Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama $x^2 + y^2 = 4$, $y = x$, $y = 2x$ za $y \geq 0$ (uputa: primijenite polarne koordinate).

5. Primjenom polarnih koordinata izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama $x^2+y^2 = 4x$, $y = x$, $y = \frac{x\sqrt{3}}{3}$.

Računanje volumena

6. Izračunajte volumen tijela (s poznatim poprečnim presjekom), što ga od kružnog valjka polumjera 2 i proizvoljne (dovoljno velike) visine odsijeca ravnina koja prolazi promjerom baze valjka, a nagnuta je prema bazi za kut $\frac{\pi}{6}$.

7. Izračunajte volumen tijela čija je baza u ravnini xy omeđena krivuljama $y = x^2$, $y = x + 2$, a čiji su presjeci s ravninama okomitim na os x (tj. ravninama koje su paralelne s ravninom yz) kvadrati.

8. Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog krivuljama $y = x^2$, $x = 1$, $y = 0$ oko

a) osi x,

b) osi y.

Računajte volumene na dva načina: metodom diska i metodom ljuske.

9. Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog krivuljama $y = 2x^2$, $y = 3 - x$, $x = 0$ $(x \geq 0)$ oko osi y koristeći se

a) metodom diska,

b) metodom ljuske.

10. Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog krivuljama

a) $y = e^{\frac{-x^2}{2}}$, $y = 0$, oko osi y.

b) $y = e^{2x}$, $x = 0$, $y = 0$, $(x \leq 0)$, oko osi x.

Računanje duljine luka krivulje pomoću integrala

11. Izračunajte duljinu luka krivulje $y = \ln \sin x$ od $x = \frac{\pi}{3}$ do $x = \frac{\pi}{2}$.

12. Izračunajte duljinu luka krivulje $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$ od $x = 1$ do $x = e$.

13. Izračunajte duljinu astroide $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$.

14. Izračunajte duljinu luka krivulje $x = \frac{t^3}{3} - t$, $y = t^2 + 2$ od $t = 0$ do $t = 3$.

15. Izračunajte duljinu luka krivulje $r = 1 + \cos\varphi$ od $\varphi = 0$ do $\varphi = \pi$, ako su r i φ polarne koordinate.

16. Izračunajte duljinu luka krivulje $r = \cos^3 \frac{\varphi}{3}$ od $\varphi = 0$ do $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ako su r i φ polarne koordinate.

Računanje oplošja rotacione plohe

17. Izračunajte površinu plohe koja nastaje rotacijom luka krivulje $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ oko osi x u intervalu $0 \leq x \leq 1$.

18. Izračunajte oplošje tijela koje nastaje rotacijom svoda cikloide $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ oko osi x, u intervalu $0 \leq t \leq 2\pi$.

MATEMATIKA 2

(treća zadaća - Taylorovi redovi)

Razvoj funkcije u Taylorov red

1. Primjenom Taylorove formule razvijte po potencijama binoma $x+1$ funkcije

a) $f(x) = x^3 - 1$

b) $f(x) = x^3 + x^2 + 2x + 3$

2. Napišite prva četiri člana (koja nisu identički jednaka nuli) razvoja u Taylorov red sljedećih funkcija:

a) $f(x) = 2^x$ oko $x_0 = 0$

b) $f(x) = \ln x$ oko $x_0 = 1$

c) $f(x) = \sin x$ oko $x_0 = \frac{\pi}{4}$

d) $f(x) = \cos 2x$ oko $x_0 = 0$

3. Napišite prva tri člana razvoja funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ po potencijama binoma $x - 4$. Pomoću dobivene aproksimacije približno izračunajte

a) $\sqrt{4.2}$

b) $\sqrt{3.9}$

Ocijenite grešku.

Aproksimacija funkcije Taylorovim redom

4. Aproksimirajte odgovarajuću funkciju (u okolini odgovarajuće točke) Taylorovim polinomom drugog stupnja i približno izračunajte

a) $\dfrac{1}{1.05}$

b) $\sqrt{17}$

c) $\sqrt[3]{7.9}$

d) $\cos 0.2$

e) $e^{0.1}$

f) $\ln 1.2$

5. Koristeći se poznatim razvojem funkcija $f(x) = e^x$ i $f(x) = \sin x$ po potencijama od x napišite razvoj po x za funkcije

a) $f(x) = e^{-x^2}$

b) $f(x) = x \cdot \sin 2x$

6. Primjenom formule za sumu geometrijskog reda razvijte funkcije

a) $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$ u red potencija od x,

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ u red potencija od $x - 1$.

Odredite radijus konvergencije.

7. Odredite intervale konvergencije redova (bez ispitivanja ponašanja reda na rubovima)

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)5^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{3n+1}\right)^n \cdot x^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1)\cdot 2^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1} \cdot (x+1)^n$

MATEMATIKA 3, 3A, 3B

Kolokviji iz matematike 3

A1

MATEMATIKA 3

(prvi kolokvij, 17.11.2003.)

1. Izračunati:
$$\mathrm{Re}\left(i(e^i + e^{i\frac{\pi}{3}})\right).$$

(10 bodova)

2. Skiciraj područje u kompleksnoj ravnini za koje vrijedi
$$\mathrm{Im}(iz) < \mathrm{Re}(iz).$$

(10 bodova)

3. Nađi sva rješenja jednadžbe
$$z^2 + iz + \frac{i-1}{4} = 0.$$

(15 bodova)

4. Odredi kako funkcija e^z preslikava područje $0 < \mathrm{Im}\, z < \pi$.

(20 bodova)

5. Riješi jednadžbu
$$\sin 2z = \sqrt{3}.$$

(20 bodova)

6. Ispitaj gdje je funkcija $e^z(\overline{z} + z)$ analitička.

(10 bodova)

7. Odredite sliku skupa $|z-1| < \frac{1}{2}$ preslikavanjem
$$\frac{2z}{z-1}.$$

(15 bodova)

B1

MATEMATIKA 3

(prvi kolokvij, 17.11.2003.)

1. Izračunati:

$$\mathrm{Re}\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{81}+(i^{99}+i^{55}+i^{11}+i)\right\}.$$

(10 bodova)

2. Skiciraj područje u kompleksnoj ravnini za koje vrijedi

$$\arg\frac{z}{i-1}=\frac{\pi}{6}.$$

(10 bodova)

3. Nađi sva rješenja jednadžbe

$$z^2+i\sqrt{3}z+1=0.$$

(15 bodova)

4. Odredi kako funkcija z^2 preslikava područje za koje vrijedi $0<|z|<2$ i $\arg z<\frac{3}{4}\pi$.

(15 bodova)

5. Riješi jednadžbu

$$\cos z=i\sqrt{2}.$$

(20 bodova)

6. Ispitaj gdje je funkcija

$$e^{\mathrm{Re}\,z}(\cos(\mathrm{Im}\,z)+i\sin(\mathrm{Im}\,z))$$

analitička.

(10 bodova)

7. Odredite sliku skupa $|z+2i|>4$ preslikavanjem

$$\frac{3z}{z+1}.$$

(20 bodova)

A2

MATEMATIKA 3

(prvi kolokvij, 17.11.2003.)

1. Izračunati:

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}\right)^{24}.$$

(10 bodova)

2. Skicirati u ravnini područje omeđeno s:

$$2 \leq | z+2 | \leq 3, \quad \pi/3 \leq \operatorname{Arg} z \leq 2\pi/3.$$

(10 bodova)

3. Naći sva rješenja jednadžbe:

$$z^2 - 4iz + \frac{9}{4} = 0.$$

(15 bodova)

4. Odrediti kako funkcija

$$f(z) = e^{\pi i/4} z - 1$$

preslikava pravac $z + \overline{z} = 6$.

(20 bodova)

5. Odrediti kako funkcija

$$f(z) = e^z$$

preslikava područje $\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Im} z \leq \pi$.

(15 bodova)

6. Naći sva rješenja jednadžbe

$$\operatorname{ch}(2z) = 4.$$

(20 bodova)

7. Ispitati gdje je funkcija

$$f(z) = \frac{z+2}{(z-1)(z+2)}$$

analitička i ako je moguće odrediti njenu derivaciju.

(10 bodova)

B2

MATEMATIKA 3

(prvi kolokvij, 17.11.2003.)

1. Odrediti z ako vrijedi:

$$\operatorname{Arg}(2z+i)=\frac{\pi}{4}, \quad |2z+i|=4.$$

(10 bodova)

2. Skicirati u ravnini područje omedjeno s:

$$|\ z-2+i\ |\geq 3,\ \frac{3\pi}{2}\leq \operatorname{Arg} z\leq 2\pi.$$

(10 bodova)

3. Naći sva rješenja jednadžbe:

$$z^2-3iz+4=0.$$

(15 bodova)

4. Odrediti kako funkcija

$$f(z)=\frac{z+i}{z-i}$$

preslikava krivulju $|z|=1$.

(20 bodova)

5. Odrediti kako funkcija

$$f(z)=\operatorname{Ln} z$$

preslikava područje $2\leq\ |z|\leq 3$.

(15 bodova)

6. Naći sva rješenja jednadžbe

$$\sin(iz)=i.$$

(20 bodova)

7. Ispitati gdje je funkcija

$$f(z)=\frac{\sin z}{z+i+1}$$

analitička i ako je moguće odrediti
njenu derivaciju.

(10 bodova)

A1

MATEMATIKA 3

(drugi kolokvij, 22.12.2003.)

1. Izračunajte: (15)

$$\int_C \ln z \ \ dz,$$

gdje je krivulja C gornja polukružnica sa središtem u ishodištu koja spaja točke -1 i 1.

2. Izračunajte: (20)

$$\int_C \frac{e^{2z}}{(z-i)(z-1)} dz,$$

$C \equiv |z-1| = 1$.

3. Razvijte u Taylorov red oko točke $z_0 = 0$: (15)

$$f(z) = \frac{1}{(1+z)^3} \ .$$

4. Odredi singularitete funkcije i njihov tip: (15)

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^3} \ .$$

5. Razvijte funkciju u Laurentov red oko točke $z_0 = 2$: (15)

$$f(z) = \frac{z+1}{(z-2)^2(z-1)} \ .$$

6. Odredite radijus područja konvergencije Laurentovog razvoja oko $z_0 = 2i$: (20)

$$f(z) = \frac{1}{\sin z} \ .$$

B1

MATEMATIKA 3

(drugi kolokvij, 22.12.2003.)

1. Izračunajte: (15)

$$\int_C \ln z \; dz,$$

gdje je krivulja C lijeva polukružnica sa središtem u ishodištu koja spaja točke i i $-i$.

2. Izračunajte: (20)

$$\int_C \frac{e^{iz}}{(z+1)(z-i)} dz,$$

$C \equiv |z+1| = 1$.

3. Razvijte u Taylorov red oko točke $z_0 = 0$: (15)

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \; .$$

4. Odredi singularitete funkcije i njihov tip: (15)

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^2} \; .$$

5. Razvijte funkciju u Laurentov red oko točke $z_0 = -1$: (15)

$$f(z) = \frac{z-1}{(z+1)^2(z+2)} \; .$$

6. Odredite radijus područja konvergencije Laurentovog razvoja oko $z_0 = 3 + \frac{\pi}{2}i$: (20)

$$f(z) = \frac{1}{\cos iz} \; .$$

A2 MATEMATIKA 3

(drugi kolokvij, 22.12.2003.)

1. Izračunajte:

$$\int_C \frac{1}{z-2}\,dz,$$

gdje je C polukružnica sa središtem u ishodištu koja spaja točke $-i$ i i.

(20 bodova)

2. Izračunajte:

$$\oint_C ze^{z^2}\,dz,$$

gdje je C kvadrat s vrhovima u $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$.

(15 bodova)

3. Razvijte u Taylorov red oko točke $z_0 = 2$:

$$f(z) = ze^{z^2}\ .$$

(15 bodova)

4. Odredi singularitete funkcije i njihov tip:

$$f(z) = z\sin\frac{1}{z}\ .$$

(15 bodova)

5. Razvijte funkciju u Laurentov red na području $0 < |z-2| < \frac{3}{2}$:

$$f(z) = \frac{z-1}{(z-2)(2z+1)}\ .$$

(20 bodova)

6. Odredite radijus područja konvergencije Laurentovog razvoja oko $z_0 = -1$:

$$f(z) = \frac{z^2}{\ln(2+z)}\ .$$

(15 bodova)

B2

MATEMATIKA 3

(drugi kolokvij, 22.12.2003.)

1. Izračunajte:

$$\int_C \cos z + i \sin z \;\; dz,$$

gdje je C najkraća spojnica točake 1 i $2i$.

(15 bodova)

2. Izračunajte:

$$\oint_C \frac{e^{-z}}{(z+1)^3} dz,$$

$C \equiv |z+1| = 1.$

(20 bodova)

3. Razvijte u Taylorov red oko točke $z_0 = 0$:

$$f(z) = \ln(z^2 + 5z + 6) \ .$$

(15 bodova)

4. Odredi singularitete funkcije i njihov tip:

$$f(z) = z e^{\frac{1}{z+2}} \ .$$

(15 bodova)

5. Razvijte funkciju u Laurentov red na području $0 < |z-3| < 6$:

$$f(z) = \frac{1}{(z+3)(z-3)} \ .$$

(20 bodova)

6. Odredite radijus područja konvergencije Laurentovog razvoja oko $z_0 = -1$:

$$f(z) = \frac{1}{3z+2} e^{\frac{1}{z}} \ .$$

(15 bodova)

A

MATEMATIKA 3

(treći kolokvij, 02. 02. 2004.)

1. Izračunajte sve reziduume funkcije:

$$f(z) = \frac{e^{2z}}{(z+1)^3}.$$

(20 bodova)

2. Izračunajte:

$$\oint_C \frac{z-1}{(z^2+2z+2)^2} dz,$$

gdje je C kvadrat s vrhovima u $0, -2, -2-2i, -2i$.

(25 bodova)

3. Izračunajte:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}\ d\varphi}{3+\cos\varphi}.$$

(20 bodova)

4. Izračunajte:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx.$$

(25 bodova)

5. Zadan je kompleksni potencijal $F(z) = 3z^2 - 2i$. Odrediti jednadžbe ekvipotencijalnih krivulja, strujnica te ih skicirati u kompleksnoj ravnini. Također, odrediti brzinu $v(z)$.

(10 bodova)

B **MATEMATIKA 3**

(treći kolokvij, 02. 02. 2004.)

1. Izračunajte sve reziduume funkcije:

$$f(z) = \frac{e^{-z}}{(z-1)^3}.$$

(20 bodova)

2. Izračunajte:

$$\oint_C \frac{2-z}{(z^2+2z+2)^2}dz,$$

gdje je C kvadrat s vrhovima u $0, -2, -2+2i, 2i$.

(25 bodova)

3. Izračunajte:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}\ d\varphi}{3-\cos\varphi}.$$

(20 bodova)

4. Izračunajte:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+1)(x^2+9)}dx.$$

(25 bodova)

5. Odrediti jednadžbu strujanja topline za područje određeno zrakama $\phi = \frac{\pi}{3}$ i $\phi = -\frac{\pi}{3}$ gdje se krak $\phi = \frac{\pi}{3}$ grije na 30°C, a $\phi = -\frac{\pi}{3}$ na 60°C.

(10 bodova)

MATEMATIKA 3

(drugi ponovljeni kolokvij, 06.02.2004.)

1. Izračunajte:

$$\int_C (\ln z + z)\ dz,$$

gdje je krivulja C gornja polukružnica radijusa $r = 3$, sa središtem u ishodištu koja spaja točke -3 i 3.

(15 bodova)

2. Izračunajte:

$$\int_C \frac{e^{z^2}}{(z-2i)(z-1)}\ dz,$$

gdje je C kružnica radijusa $r = 1$ oko $z_0 = 1$.

(20 bodova)

3. Razvijte u Taylorov red oko točke $z_0 = 0$:

$$f(z) = \frac{1}{2+3z}\ .$$

(15 bodova)

4. Odredi singularitete funkcije i njihov tip:

$$f(z) = \frac{\sin(z-1)}{(z-1)^3}\ .$$

(15 bodova)

5. Razvijte funkciju u Laurentov red oko točke $z_0 = 2$:

$$f(z) = \frac{z+1}{(z-2)^7(z-3)}\ .$$

(15 bodova)

6. Odredite radijus područja konvergencije Laurentovog razvoja oko $z_0 = 1 + 4i$:

$$f(z) = \frac{1}{\cos(z+1)}\ .$$

(20 bodova)

A

MATEMATIKA 3

(kolokvij iz vjerojatnosti i statistike, 17.12.2004.)

1. Bacamo dvije kockice - jedna ima redom brojeve $1, 2, 2, 3, 3, 3$ na svojim stranicama, druga na stranicama ima ispisane brojeve $2, 2, 4, 4, 4, 4$. Odredite prostor elementarnih događaja i izračunajte vjerojatnost da je zbroj na kockicama 5.

(15 bodova)

2. Pouzdanost testa na bolest B je 90%. Učestalost bolesti u općoj populaciji je 1%. Koja je vjerojatnost da osoba koja je pozitivna na test zaista boluje od bolesti B?

(15 bodova)

3. Ante i Boris gađaju metu. Ante pogađa sa vjerojatnošću 0.5, Boris sa vjerojatnošću 0.2. Ante gađa dvaput, Boris samo jednom. Nađi funkciju razdiobe i očekivanje za slučajnu varijablu X koja broji ukupan broj pogodaka za obojicu.

(15 bodova)

4. Neka je $f(x)$ gustoća slučajne varijable X, zadana s ax^2 na intervalu $(0, \pi)$, a 0 inače. Odredite parametar a, izračunati EX, $\operatorname{Var} X$ i $p(\frac{\pi}{4} \leq X \leq \frac{\pi}{2})$.

(15 bodova)

5. Kontrola provjerava aparate. Aparat ima defekt s vjerojatnošću 0.04. Radimo uzorke od po 100 proizvoda. Kolika je vjerojatnost da u uzorku imamo između 2 i 6 defektnih proizvoda? (tj. da je proporcija između 0.02 i 0.06)

(20 bodova)

6. Na uzorku od 30 kolokvija iz matematike dobivena je srednja prolaznost $\overline{X} = 0.63$. Uz pretpostavljenu standardnu devijaciju od 0.08 odredite granice za očekivanu prolaznost na kolokvijima s pouzdanošću od 99%.

(20 bodova)

B

MATEMATIKA 3

(kolokvij iz vjerojatnosti i statistike, 17.12.2004.)

1. Bacaju se istovremeno novčić i 2 kocke. Odredite prostor elementarnih događaja i izračunajte vjerojatnost da je dobivena glava i bar jedna šestica.

(15 bodova)

2. Od djece neke osnovne škole 3/7 ih se upisalo u gimnaziju, 2/7 u neku tehničku školu i 2/7 u preostale škole. Među gimnazijalcima ih je 35% odlikaša, dok ih je u tehničkim školama i preostalim školama po 21%. Kolika je vjerojatnost da je odabrani odlikaš učenik tehničke škole?

(15 bodova)

3. Kutija sadrži 2 bijele i 3 plave kuglice. Izvlačimo jednu po jednu dok ne izvučemo i drugu bijelu. Neka je slučajna varijabla X broj takvih izvlačenja. Naći funkciju razdiobe za X.

(15 bodova)

4. Slučajna varijabla X ima gustoću $f(x) = \frac{a}{x}$ na intervalu $(1, e)$, inače $f(x) = 0$. Odrediti a i izračunati očekivanje i varijancu za varijablu X. Izračunajte $p(X > \frac{e}{2})$.

(15 bodova)

5. Prosječna masa odraslog muškarca iznosi 80kg uz standardnu devijaciju od 10kg. Kolika je vjerojatnost da uzorak od 50 ljudi ima prosječnu masu ispod 79kg?

(20 bodova)

6. U uzorku od 100 studenata druge godine FSB-a njih 63 je položilo matematiku III preko kolokvija. Odrediti očekivanu proporciju svih studenata druge godine koji će ispit položiti preko kolokvija s pouzdanošću od 90%?

(20 bodova)

A

MATEMATIKA 3

(kolokvij iz vektorske analize, 01.02.2004.)

1. Za gibanje opisano parametrizacijom $\vec{r}(t) = (t^2, t - \sin t, \cos t)$ odredite $\vec{v}$ i $\vec{a}$.

(15 bodova)

2. Odredite vektor normale na plohu $z = 1 - y^2$ u točki $P(1, 0, 1)$.

(15 bodova)

3. Neka je U skalarno polje zadano s $U = x^2 - yz$. Izračunajte

$$\int_A^B U|d\vec{r}|$$

duž pravca koji spaja točke $A(1, 0, 0)$ i $B(0, 2, 2)$.

(15 bodova)

4. Odredite funkciju $\varphi(z)$ tako da za skalarno polje $U = xy + \varphi(z)$ i vektorsko polje $\overrightarrow{F} = (y, x, 3z^2)$ vrijedi

$$\nabla U = \overrightarrow{F}.$$

(15 bodova)

5. Neka je ploha P parametrizirana s $\vec{r}(u, v) = (u, v, u^4)$, $u, v \in [0, 1]$. Izračunajte

$$\iint_P \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{P}$$

gdje je $\overrightarrow{F}$ vektorsko polje zadano s $\overrightarrow{F} = (0, xy, 2x + 2y)$.

(20 bodova)

6. Izračunajte volumen cilindra radijusa $r = 2$ i visine $h = 5$ parametriziranog s

$$\vec{r}(u, v, w) = (u \cos v, w, u \sin v).$$

(20 bodova)

B # MATEMATIKA 3

(kolokvij iz vektorske analize, 01.02.2004.)

1. Neka je krivulja zadana parametrizacijom $\vec{r}(t) = (\cos t, t - \sin t, t\cos t)$. Odredite $\frac{d\vec{r}}{dt}$ i $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ u točki sa koordinatom $t = 2$.

(15 bodova)

2. Ploha P parametrizirana je s

$$\vec{r}(u, v) = (u, 1 + \cos u, uv).$$

Odredite tangencijalne krivulje plohe $\vec{r}_u$ i $\vec{r}_v$ na plohi P koje prolaze točkom s koordinatama

$$u = \frac{\pi}{2},\ v = 1.$$

(15 bodova)

3. Neka je U skalarno polje zadano s $U = x^3y^2z$. Izračunajte

$$\int_K U|d\vec{r}|$$

gdje je K dužina koja spaja točke $A(0, 0, 1)$ i $B(1, 2, 3)$.

(15 bodova)

4. Izračunajte

$$\oint_K \overrightarrow{F} d\vec{r},$$

gdje je K jedinična kružnica u xy ravnini, a polje $\overrightarrow{F} = (x, -y, z)$.
Da li $\vec{F}$ može biti potencijalno polje?

(15 bodova)

5. Neka je P dio plohe $z = x^4$ za koji je $x \in [0, 1]$ i $y \in [0, 2]$. Izračunajte

$$\iint_P \overrightarrow{F} d\overrightarrow{P}$$

gdje je $\overrightarrow{F}$ vektorsko polje zadano s $\overrightarrow{F} = (0, xy, 2x + 2y)$.

(20 bodova)

6. Izračunajte volumen tijela parametriziranog s

$$\vec{r}(u, v, w) = (1 + w, 2 + u\cos v, 3 + u\sin v),$$

gdje je $u \in [0, 1]$, $v \in [0, \pi/2]$, $w \in [0, 1]$.

(20 bodova)

MATEMATIKA 3

(ponovljeni kolokvij iz vjerojatnosti i statistike, 04.02.2005.)

1. Strijelac gađa metu s vjerojatnosću 0.7. Vrši 5 uzastopnih gađanja. Opisati prostor događaja i odrediti vjerojatnost da je pogodio cilj barem 4 puta.

(15 bodova)

2. Matematiku 3 (statistika, numerika, vektorska) sluša 25% studenata, matematiku 3A (numerika, statistika) 40%, matematiku 3B (statistika, vektorska) 35%. Koja je vjerojatnost da odabrani student koji sluša vektorsku analizu ima upisanu matematiku 3B?

(15 bodova)

3. U kutiji su 3 plave i 2 zelene kuglice. Izvlačimo kuglice dok ne izvučemo zelenu, pri tom ako smo izvukli plavu vraćamo je u kutiju. Opisati zakon vjerojatnosti za slučajnu varijablu X koja predstavlja broj izvlačenja.

(15 bodova)

4. Neka je $f(x) = ce^x$ funkcija gustoće slučajne varijable X na intervalu $(0, \ln 2)$, drugdje je ona 0. Odrediti c, EX, Var X.

(15 bodova)

5. Vjerojatnost gripe u nekom razdoblju je $p = 0.03$. Naći vjerojatnost da je u uzorku od 200 ljudi najmanje 5 i najviše 8 razboljelih.

(20 bodova)

6. U 30 gradova je dobiveno da politički kandidat ima udio od $\overline{X} = 0.61$ glasača. Uz standardnu devijaciju od 0.07 odrediti granice za očekivani udio glasača u nekom gradu s pouzdanošću od 95%.

(20 bodova)

Pismeni ispiti iz matematike 3

MATEMATIKA 3

(01. Listopad, 2003.)

1. Izračunati:

$$z^5 + 2z^3 + z = 0.$$

2. Preslikavanjem

$$f(z) = z^3$$

preslikati područje kompleksnih brojeva z za koje vrijedi $0 < |z| < 1$ i $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$.

3. Razviti funkciju

$$f(z) = \frac{1}{z} + z + e^{\frac{1}{z}} + e^z$$

u Laurentov red na području $|z| > 0$. Odredite reziduum dobivenog Laurentovog reda.

4. Provjerite je li funkcija $f(z) = 2\overline{z} + 1$ analitička na cijeloj kompleksnoj ravnini.

5. Izračunati

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4x + 5)^2} \quad .$$

6. Koristeći Cauchyjevu integralnu formulu izračunajte

$$\int_\Gamma \frac{dz}{z-1},$$

gdje je Γ kružnica radijusa 3 oko točke $z = \pi$.

MATEMATIKA 3

(07. Studeni, 2003.)

1. Izračunati:

$$z^2 + (1+i)z + \frac{i}{4} = 0.$$

2. Preslikavanjem

$$f(z) = z^2 + 1$$

preslikati područje kompleksnih brojeva z za koje vrijedi $0 < |z| < 1$ i $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$.

3. Razvijte funkciju $f(z) = \sin\frac{1}{z}$ u Laurentov red na području $|z| > 0$. Odredite reziduum dobivenog reda.

4. Provjerite je li funkcija $f(z) = 2z(\overline{z})^2 + 2z^3 + 1$ analitička na cijeloj kompleksnoj ravnini.

5. Izračunati

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + \sqrt{3}x + 1)^2} \quad .$$

6. Izračunati

$$\int z \sin z \, dz$$

po trokutu s vrhovima $z_0 = -1 - i$, $z_1 = 1 - i$ i $z_2 = i$.

MATEMATIKA 3

(16. Siječanj, 2004.)

1. Riješi jednadžbu:

$$z^2 + \frac{i}{4} = (1+i)z.$$

2. Provjerite je li funkcija $f(z) = (\overline{z})^2 + 1$ analitička na cijeloj kompleksnoj ravnini.

3. Izračunaj:

$$\int_C i \cos iz \, dz \ ,$$

gdje je C najkraća spojnica točaka 0 i $2\pi i$.

4. Razvij u Laurentov red oko $z = 1$ funkciju

$$f = \frac{1}{(z-1)(z-7)} \ ,$$

na području u kojem se nalazi $z = 0$.

5. Odredi singularitete funkcije i njihov tip:

$$f(z) = \sin z^2 + \sin \frac{1}{z^2} \ .$$

6. Izračunaj:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} \ .$$

MATEMATIKA 3

(10. Veljače, 2004.)

1. Izračunati:

$$z^4 + 2z^2 + 1 = 0.$$

2. Izračunaj:

$$\int_C (2+i) \sin iz \, dz \ ,$$

gdje je C najkraća spojnica točaka 0 i $2\pi i$.

3. Razvij u Laurentov red oko $z = 1$ funkciju

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^8(z-8)} \ ,$$

na području u kojem se nalazi $z = 0$.

4. Odredite radijus područja konvergencije Laurentovog razvoja oko $z_0 = \pi + 2i$:

$$f(z) = \tan z \ .$$

5. Izračunajte sve reziduume funkcije:

$$f(z) = \frac{e^{-z^2}}{(z-1)(z-2)^3}.$$

6. Izračunati

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2} \ .$$

MATEMATIKA 3

(19. Studeni, 2004.)

1. Riješi jednadžbu:

$$(z+i)^2 + 2i(z+i) - 1 = 0.$$

2. Preslikavanjem

$$f(z) = z^2 + 1$$

preslikati područje kompleksnih brojeva z za koje vrijedi $0 < |z| < 1$ i $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$.

3. Razvijte funkciju $f(z) = \frac{1}{z} + \cos\frac{1}{z}$ u Laurentov red na području $|z| > 0$. Odredite reziduum dobivenog reda.

4. Korištenjem Cauchy-Riemannovih uvjeta provjerite je li funkcija $f(z) = z(\overline{z})^2 + z^2(\overline{z})$ analitička na cijeloj kompleksnoj ravnini.

5. Izračunati

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)^2} \quad .$$

6. Izračunati

$$\int z \sin z \, dz$$

po rubu trokuta s vrhovima $z_0 = -10 - i$, $z_1 = 10 - i$ i $z_2 = 20i$ u pozitivnom smjeru.

MATEMATIKA 3

(01. Listopad 2003.)

1. Izračunati:

$$z^5 + 2z^3 + z = 0.$$

2. Preslikavanjem

$$f(z) = z^3$$

preslikati područje kompleksnih brojeva z za koje vrijedi $0 < |z| < 1$ i $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$.

3. Razviti funkciju

$$f(z) = \frac{1}{z} + z + e^{\frac{1}{z}} + e^z$$

u Laurentov red na području $|z| > 0$. Odredite reziduum dobivenog Laurentovog reda.

4. Provjerite je li funkcija $f(z) = 2\overline{z} + 1$ analitička na cijeloj kompleksnoj ravnini.

5. Izračunati

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4x + 5)^2} \quad .$$

6. Koristeći Cauchyjevu integralnu formulu izračunajte

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z - 1},$$

gdje je Γ kružnica radijusa 3 oko točke $z = \pi$.

MATEMATIKA 3

(07. Studeni, 2003.)

1. Izračunati:

$$z^2 + (1+i)z + \frac{i}{4} = 0.$$

2. Preslikavanjem

$$f(z) = z^2 + 1$$

preslikati područje kompleksnih brojeva z za koje vrijedi $0 < |z| < 1$ i $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$.

3. Razvijte funkciju $f(z) = \sin\frac{1}{z}$ u Laurentov red na području $|z| > 0$. Odredite reziduum dobivenog reda.

4. Provjerite je li funkcija $f(z) = 2z(\overline{z})^2 + 2z^3 + 1$ analitička na cijeloj kompleksnoj ravnini.

5. Izračunati

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + \sqrt{3}x + 1)^2} \quad .$$

6. Izračunati

$$\int z \sin z \, dz$$

po trokutu s vrhovima $z_0 = -1 - i$, $z_1 = 1 - i$ i $z_2 = i$.

MATEMATIKA 3

(16. Siječanj, 2004.)

1. Riješi jednadžbu:

$$z^2 + \frac{i}{4} = (1+i)z.$$

2. Provjerite je li funkcija $f(z) = (\overline{z})^2 + 1$ analitička na cijeloj kompleksnoj ravnini.

3. Izračunaj:

$$\int_C i \cos iz \, dz \ ,$$

gdje je C najkraća spojnica točaka 0 i $2\pi i$.

4. Razvij u Laurentov red oko $z = 1$ funkciju

$$f = \frac{1}{(z-1)(z-7)} \ ,$$

na području u kojem se nalazi $z = 0$.

5. Odredi singularitete funkcije i njihov tip:

$$f(z) = \sin z^2 + \sin \frac{1}{z^2} \ .$$

6. Izračunaj:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} \ .$$

MATEMATIKA 3

(10. Veljače, 2004.)

1. Izračunati:

$$z^4 + 2z^2 + 1 = 0.$$

2. Izračunaj:

$$\int_C (2+i)\sin iz \, dz \ ,$$

gdje je C najkraća spojnica točaka 0 i $2\pi i$.

3. Razvij u Laurentov red oko $z = 1$ funkciju

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^8(z-8)} \ ,$$

na području u kojem se nalazi $z = 0$.

4. Odredite radijus područja konvergencije Laurentovog razvoja oko $z_0 = \pi + 2i$:

$$f(z) = \tan z \ .$$

5. Izračunajte sve reziduume funkcije:

$$f(z) = \frac{e^{-z^2}}{(z-1)(z-2)^3}.$$

6. Izračunati

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2} \ .$$

MATEMATIKA 3

(19. Studeni, 2004.)

1. Riješi jednadžbu:

$$(z+i)^2 + 2i(z+i) - 1 = 0.$$

2. Preslikavanjem

$$f(z) = z^2 + 1$$

preslikati područje kompleksnih brojeva z za koje vrijedi $0 < |z| < 1$ i $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$.

3. Razvijte funkciju $f(z) = \frac{1}{z} + \cos\frac{1}{z}$ u Laurentov red na području $|z| > 0$. Odredite reziduum dobivenog reda.

4. Korištenjem Cauchy-Riemannovih uvjeta provjerite je li funkcija $f(z) = z(\overline{z})^2 + z^2(\overline{z})$ analitička na cijeloj kompleksnoj ravnini.

5. Izračunati

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)^2} \quad .$$

6. Izračunati

$$\int z \sin z \, dz$$

po rubu trokuta s vrhovima $z_0 = -10 - i$, $z_1 = 10 - i$ i $z_2 = 20i$ u pozitivnom smjeru.

MATEMATIKA 3

(01. Veljače 2005.)

Napomena. *Ovo je pismena zadaća za studente koji su slušali matematiku 3 (gradivo kompleksne analize) 2003/2004. ili ranijih godina.*

1. Riješi jednadžbu:

$$z^2 + \frac{i}{4} = (1+i)z.$$

2. Preslikavanjem

$$f(z) = z^3$$

preslikati područje kompleksnih brojeva z za koje vrijedi $0 < |z| < 1$ i $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$.

3. Razviti funkciju

$$f(z) = \frac{1}{z} + z + e^{\frac{1}{z}} + e^z$$

u Laurentov red na području $|z| > 0$. Odredite reziduum dobivenog Laurentovog reda.

4. Provjerite je li funkcija $f(z) = 2z(\overline{z})^2 + 2z^3 + 1$ analitička na cijeloj kompleksnoj ravnini.

5. Izračunati

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2} \quad .$$

6. Koristeći Cauchyjevu integralnu formulu izračunajte

$$\int_\Gamma \frac{dz}{z-1},$$

gdje je Γ kružnica radijusa 3 oko točke $z = \pi$.

MATEMATIKA 3

(01. Veljače, 2005.)

Napomena. *Matematika 3A rješava zadatke 1–6; Matematika 3 rješava 1,3, 4, 6, 7, 9; Matematika 3B rješava zadatke 4-9.*

1. Poznata je LR faktorizacija (s parcijalnim pivotiranjem) matrice $PA = LR$, gdje su

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ & 4 & 0 \\ & & 4 \end{bmatrix}.$$

Korištenjem te faktorizacije nađite rješenje sustava $Ax = b$, ako je

$$b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. Nađite interpolacijski polinom u Newtonovoj formi, koji interpolira funkciju

$$f(x) = \log_{10} x$$

u točkama s x-koordinatama 0.1, 1 i 10. Nađite vrijednost tog polinoma u točki 5.

3. Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nađite parabolu koja prolazi točkom $A = (0, 2)$ i u točki A ima derivaciju jednaku 4, a aproksimira skup podataka (x_k, f_k), $k = 0, \ldots, n$.

4. Iz kutije s 5 plavih, 3 zelene i 4 žute loptice izvlacimo 3 loptice. Kolika je vjerojatnost da smo izvukli po jednu od svake boje? Opišite prostor elementarnih događaja.

5. Strijelac gađa metu. Pogodak u središnji krug iznosi 10 bodova, pogodak u vanjski krug 5 bodova, a sve ostalo je promašaj (0 bodova). Strijelac gađa središnji krug s vjerojatnoscu 0.4, vanjski s vjerojatnošću 0.5, te promašuje s vjerojatnošću 0.1. Strijelac gađa 2 puta. Napravite zakon razdiobe (funkciju vjerojatnosti) za slučajnu varijablu X koja predstavlja ukupan broj bodova strijelca nakon dva gađanja. Izračunajte očekivanje EX.

6. Kolika je vjerojatnost da u 200 bacanja (pravednog) novčića padne barem 105 glava?

7. Odredite vektor normale na plohu $z = 1 - y^2$ u točki $P(1, 0, 1)$.

8. Odredite funkciju $\varphi(z)$ tako da za skalarno polje $U = xy + \varphi(z)$ i vektorsko polje $\overrightarrow{F} = (y, x, 3z^2)$ vrijedi

$$\nabla U = \overrightarrow{F}.$$

9. Izračunajte volumen tijela parametriziranog s

$$\vec{r}(u, v, w) = (1 + w, 2 + u\cos v, 3 + u\sin v),$$

gdje je $u \in [0, 1]$, $v \in [0, \pi/2]$, $w \in [0, 1]$.

MATEMATIKA 3

(15. Veljače, 2005.)

Napomena. *Matematika 3A rješava zadatke 1–6; Matematika 3 rješava 1,3, 4, 6, 7, 9; Matematika 3B rješava zadatke 4-9.*

1. Metodom bisekcije nađite nultočku funkcije

$$f(x) = \sin x - \frac{1}{x}$$

koja se nalazi na intervalu $[0.5, 1.5]$, tako da greška bude manja ili jednaka 10^{-2}.

2. Nađite LR faktorizaciju matrice A s parcijalnim pivotiranjem, preciznije, nađite matrice P, L i R takve da je $PA = LR$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

3. Zadana je diferencijalna jednadžba trećeg reda

$$y''' + 2y'' - y' + y = 2x^2$$

uz početne uvjete $y(1) = 2$, $y'(1) = 0$, $y''(1) = -1$. Diferencijalnu jednadžbu napišite kao sustav diferencijalnih jednadžbi prvog reda.

4. Na strane kockice napisali smo redom brojeve 1, 2, 2, 3, 3, 3. Bacimo kocicku dva puta. Koja je vjerojatnost da smo dobili iste brojeve? Odredite razdiobu za slučajnu varijablu X koja računa zbroj u dva bacanja.

5. Slučajna varijabla X ima normalnu razdiobu s parametrima $\mu = 75$, $\sigma = 5$. Odredite interval $[\mu - c, \mu + c]$ u kojem je 90% vrijednosti varijable X.

6. Mirko će pobijediti Slavka na predsjedničkim izborima sa omjerom glasova 55:45. Izračunajte vjerojatnost da slučajni uzorak od 200 glasača predvidi krivi rezultat izbora (Slavkovu pobjedu).

7. Odredite vektor normale na plohu koja je paramerizirana s $\vec{r}(u, v) = (u + \cos v, v + \sin u, uv)$ u točki s koordinatama $u = \frac{\pi}{3}$, $v = \frac{\pi}{6}$.

8. Neka je U skalarno polje zadano s $U = x^3 + y^2 + z$. Izračunajte

$$\int_K U|d\vec{r}|$$

gdje je K dužina koja spaja točke $A(0, 0, 1)$ i $B(1, 2, 3)$.

9. Tijelo V je parametrizirano s

$$\vec{r}(u, v, w) = (u, u + v, u + w), \qquad u, v, w \in [0, 1].$$

Izračunajte

$$\iiint_V dV \, .$$

MATEMATIKA 3

(01. Travanj, 2005.)

Napomena. *Ovo je pismena zadaća za studente koji su slušali matematiku 3 (gradivo kompleksne analize) 2003/2004. ili ranijih godina.*

1. Riješite jednadžbu:

$$z^2 + (-1+2i)z - 2i = 0.$$

(15 bodova)

2. Odredite bilinearnu funkciju $f(z)$ za koju vrijedi:

$$f(0) = \infty,\ f(i) = 2,\ f(-i) = 0$$

Što dobivamo preslikavanjem imaginarne osi pomoću te funkcije?

(20 bodova)

3. Izračunajte:

$$\int_C (\overline{z})^2 dz$$

gdje je C donja polukružnica sa središtem u ishodištu koja spaja točke -1 i 1.

(15 bodova)

4. Razvijte u Laurentov red oko $z_0 = 1$ funkciju

$$f(z) = \frac{z-1}{z+1}$$

na području $|z-1| < 2$.

(20 bodova)

5. Nađite sve singularitete funkcije

$$f(z) = z^3 \sin\frac{1}{z}$$

i odredite njihov tip.

(15 bodova)

6. Izračunajte:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

(15 bodova)

***Rezultati ispita**: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

MATEMATIKA 3

(01. Travanj, 2005.)

Napomena. *Matematika 3A rješava zadatke 1–6; Matematika 3 rješava 1,3, 4, 6, 7, 9; Matematika 3B rješava zadatke 4-9.*

1. Broj e^{-10} računamo računalom u aritmetici pomičnog zareza na dva načina.

(1) e^{-x} izračunamo razvojem funkcije e^{-x} u Taylorov red oko 0.

(2) Znamo da je $e^{-x} = 1/e^{x}$. Vrijednost e^{x} računamo razvojem u Taylorov red oko 0, a zatim 1 podijelimo s dobivenom aproksimacijom za e^{x}.

Ima li razlike u točnosti dobivenih rezultata? Imaju li relativno veliku ili relativno malu grešku? Ako je jedan od načina bolji, koji je to i zašto.

(12 bodova)

2. Gaussovim eliminacijama s parcijalnim pivotiranjem nađite rješenje linearnog sustava $Ax = b$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(12 bodova)

3. Zadana je diferencijalna jednadžba drugog reda

$$y'' - 2y' + y = x$$

uz početne uvjete $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$. Diferencijalnu jednadžbu napišite kao sustav diferencijalnih jednadžbi prvog reda i nađite aproksimaciju njenog rješenja u $x = 1.1$, korištenjem RK–1 metode s korakom $h = 0.1$.

(12 bodova)

4. Iz špila od 32 karte izvlačimo 3. Kolika je vjerojatnost da a) izvučemo bar jednog pika; b) izvučemo karte različitih boja? Pritom u špilu imamo po 8 karata svake boje: pik, tref, herc, karo. Opisati prostor elementarnih događaja.

(12 bodova)

5. Pouzdanost testa na neku bolest je 95%. U populaciji je 1% oboljelih. Kolika je vjerojatnost da u uzorku od 200 ljudi bude vise od 2% oboljelih? Kolikom ce broju od njih biti dijagnosticirana bolest?

(12 bodova)

6. Prosječna visina studenta u populaciji je 182cm, standardnu devijaciju 8cm. Naći interval oko te vrijednosti (182cm) u koji ce uz 95%-tnu pouzdanost spadati studenti iz uzorka velicine 200.

(12 bodova)

7. Ploha P parametrizirana je s
$$\overrightarrow{r}(u,v)(u, u-\cos v, uv^2).$$
Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na plohu P koja prolazi točkom $T(1,2,\pi^2)$.

(12 bodova)

8. Neka je U skalarno polje zadano s
$$U = xy + xz^2.$$
Izračunajte
$$\int_K U|d\overrightarrow{r}|$$
gdje je K dužina koja spaja točke $A(-1,0,1)$ i $B(0,1,1)$.

(12 bodova)

9. Izračunajte volumen tijela parametriziranog s
$$\overrightarrow{r} = (2+uw, v+e^w, uv)$$
gdje su $u, v, w \in [0,1]$.

(12 bodova)

***Rezultati ispita**: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

Zadaće iz matematike 3

MATEMATIKA 3

(vjerojatnost - prva zadaća)

Vjerojatnost

1. Kolika je vjerojatnost da bacanjem dviju kockica dobijemo zbroj veći od 6?

2. Strijelac A i strijelac B gađaju metu 3 puta. Vjerojatnost pogotka strijelca A je 50%, strijelca B 75%. Što je vjerojatnije - da strijelac A pogodi metu barem jednom ili da strijac B pogodi metu barem dvaput?

3. U kutiji je 30 kuglica: 10 crvenih, 10 plavih i 10 bijelih. Izvlačimo nasumce tri kuglice. Kolika je vjerojatnost da ćemo imati po jednu od svake boje?

4. Strijelac A ima vjerojatnost pogotka 0.5 i gađa metu jedanput. Strijelac B ima vjerojatnost pogotka 0.25 i gađa dvaput. Za kojeg je strijelca vjerojatnije da će pogoditi metu?

Uvjetna vjerojatnost

5. Tri stroja proizvode vijke. Polovina svih vijaka proizvedena je na I. stroju, petina na II., a ostatak na III. Postotak defektnih proizvoda na I. je 2% , na II. 4% , a na III. 3% . Kolika je vjerojatnost da je vijak za kojeg je kontrola utvrdila da je neispravan proizveden na III. stroju?

6. Izvlačimo 4 karte iz špila od 32.

a) Koja je vjerojatnost da niti jedna od njih nije srce?

b) Koja je vjerojatnost da su izvučena 4 asa?

7. Od tri novčića jedan je osobit: na obje strane ima grb. Uzet je jedan novčić i baca se četiri puta. Četiri puta je pao grb. Kolika je vjerojatnost da je bacan osobit novčić?

8. Ptica slijeće na slučajno izabrano gnijezdo, od tri moguća u blizini. Svako gnijezdo sadrži dva jaja i to: dva dobra su u prvom, jedno dobro i jedan mućak u drugom, i dva su mućka u trećem. Ptica sjedi na samo jednom jajetu u gnijezdu. Naći vjerojatnost da sjedi na mućku! Ako je sjela na mućak, koja je vjerojatnost da sjedi u drugom gnijezdu?

9. U dvije kutije stavili smo bijele i crne kuglice. U prvoj kutiji nalazi se 6 bijelih i 5 crnih kuglica, u drugoj 4 bijele i 4 crne kuglice. Kolika je vjerojatnost da se izvuče bijela kuglica iz druge kutije nakon što smo prenijeli dvije kuglice iz prve u drugu kutiju.

10. U svakoj od dvije kutije nalaze se po tri bijele kuglice. U prvoj kutiji se nalaze tri crne kuglice, u drugoj dvije. Prenesemo dvije kuglice iz prve u drugu kutiju. Zatim prenesemo dvije kuglice iz druge u prvu kutiju. Nakon toga izvucemo dvije kuglice iz druge kutije.

a) Kolika je vjerojatnost su kuglice bijele?

b) Kolika je vjerojatnost da je u prvoj kutiji samo jedna bijela kuglica ako smo izvukli dvije bijele kuglice?

Slučajne varijable i distribucije

11. Četiri novčića bacaju se istovremeno. Naći funkciju vjerojatnosti (zakon razdiobe vjerojatnosti) za slučajnu varijablu X koja predstavlja broj grbova. Kolike su vjerojatnosti da se pojavi jedan grb, najmanje jedan grb, ne više od tri grba?

12. Strijelac gađa cilj s vjerojatnošću 0.7. Naći funkciju vjerojatnosti za slučajnu varijablu X koja predstavlja broj pogodaka u 5 gađanja.

13. 10% proizvoda su neispravni. Naći vjerojatnost da su u uzorku od 10 proizvoda bar 2 neispravna.

14. Bacaju se dvije kocke. Kolika je vjerojatnost da se dobije suma brojeva veća od 10 ili djeljiva sa 6?

15. Bacaju se dvije kocke. Slučajna varijabla X računa zbroj vrijednosti na kockama. Odredite razdiobu od X te izračunajte očekivanje EX i varijancu $\operatorname{Var} X$.

16. Strijelac pogađa metu s vjerojatnošću $p = 0.8$. Ima dva metka. Kada ih potroši dobije još onoliko metaka koliko je imao pogodaka u prvoj seriji i također ih ispaljuje u metu. Kolika je vjerojatnost da je cilj pogođen? Naći razdiobu broja pogodaka X, očekivanje i varijancu od X.

Kontinuirane distribucije

17. Neka je $f(x)$ gustoća slučajne varijable X, zadana s ax^2 na intervalu $(-1, 2)$, a 0 inače. Odrediti a, izračunati $\operatorname{Var} X$ i $P(0 \leq X \leq 3)$.

18. Slučajna varijabla ima gustoću razdiobe $f(x) = \frac{k}{1+x^2}$ na cijelom skupu $\mathbb{R}$. Odrediti k, naći očekivanje i varijancu.

19. Neka je $f(x)$ funkcija vjerojatnosti slučajne varijable X, zadana s $\sin x$ na intervalu $(0, \pi)$, a 0 inače. Odredite parametar a, izračunati μ, σ i $p(\frac{\pi}{4} \leq X \leq \frac{\pi}{2})$.

MATEMATIKA 3

(statistika - zadaća)

Normalna razdioba

1. Slučajna varijabla X ima normalnu razdiobu sa parametrima $\mu = 15$, i standardnom devijacijom $\sigma = 5$. Nađi interval $\mu \pm c$ takav da je

$$p(\mu - c \leq X \leq \mu + c) \approx 50\%.$$

2. Slučajna varijabla X sa normalnom razdiobom ima sredinu $\mu = 0$ i nepoznatu standardnu devijaciju σ. Kolika je standardna devijacija σ ako znamo da je vjerojatnost da X budu u intervalu $[-10, 10]$

$$p(-10 \leq X \leq 10) = 0.91 \text{ ?}$$

Statistika

3. Za uzorak populacije studenata sa težinama 75, 77, 81, 86 kg izračunajte sredinu i varijancu.

4. Proučavanjem visina muške populacije pomoću uzoraka od po 1000 muškaraca došlo se do sljedećih podataka: standardna devijacija uzoraka je 0.3cm, prosječna visina uzoraka je 178cm. Procijenite koliki dio populacije je niži od 170cm i koliki je dio populacije viši od 2m, uz pretpostavku da visina muške populacije ima normalnu razdiobu.

5. Koja je vjerojatnost da pri 100 bacanja (pravednog) novčića dobijemo više od 60 glava?

6. Parametri populacije su $\mu = 1500$, $\sigma = 20$. Koja je vjerojatnost da je sredina slučajnog uzorka veličine $N = 30$ u intervalu $\mu \pm 3$?

7. Na raspolaganju nam je 6 danskih doga, od toga 4 imaju kupirane uši, a 2 nemaju. Napravite sve moguće uzorke od po tri psa (bez vraćanja!), i izračunajte očekivanje i disperziju za proporciju uzorka P (vjerojatnost kupiranog psa u uzorku). Usporedite te podatke sa sredinom i disperzijom za broj pasa s kupiranim ušima na nivou uzorka.

8. Lhasa apso ima njušku duljine $\mu = 4$cm, a očekivano je odstupanje $\sigma = 0.5$cm. Promatramo uzgajivačnice sa po 30 jedinki. S kojom će vjerojatnošću srednja vrijednost duljine njuške takvog uzorka biti između 3.7cm i 4.3cm, što su za tu vrstu dozvoljene veličine na natjecanjima?

9. Pretpostavimo da prosječan 70-godišnjak neke populacije ima $\mu = 25$ vlastitih zubiju, i neka je varijanca $\sigma = 1.39$. Iz populacije od 1500 70-godišnjaka radimo uzorke od po 100, bez vraćanja. Koliko je vjerojatnost da će sredina broja zubiju u slučajnom uzorku biti veća ili jednaka 25.2? U kolikom broju uzoraka pretpostavljamo da će se to dogoditi?

10. Azori su jedino mjesto u Europi gdje raste ananas. Od ananasa plasiranog na tržište 95% je prvoklasno. Rade se pošiljke od po 3000 ananasa. U kojim će se granicama nalaziti proporcija prvoklasnog ananasa u pošiljci s koeficijentom pouzdanosti $z_c = 2.40$?

11. Mjerenje dijametara slučajnog uzorka od 200 kugličnih ležajeva dalo je sredinu od 2.09cm i standardnu grešku od 0.11cm. Naći očekivani dijametar svih vijaka s pouzdanošću:

a) 90%

b) 99.73%

12. U 40 bacanja novčića dobivene su 24 glave. Naći interval u kojem se nalazi proporcija broja glavi dobivena za beskonačni broj bacanja novčića s pouzdanošću:

a) 95%

b) 98%

MATEMATIKA 3

(vektorska analiza - zadaća)

Koordinatizacija krivulje

1. Nađite koordinatizaciju jedinične kružnice čija je kutna akceleracija $\omega(t) = \ln t$.