

MATEMATIKA 1

(15. prosinca 2006.)

Sadržaj

Podloge za vježbe	1
Podloge za vježbe	1
Linearna algebra – 1	2
Linearna algebra – 2	5
Derivacija	8
Tok funkcije	10
Integrali	12
Rješenja zadataka	13

MATEMATIKA 1

(Linearna algebra – 1)

Vektori i primjene

1. U trokutu $\triangle ABC$ točke M i N dijele stranicu \overline{AB} na tri jednaka dijela. Označite $CA = \vec{a}$, $CB = \vec{b}$ i izrazite vektore CM i CN pomoću vektora \vec{a} i \vec{b} .

Rj. $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

2. Zadani su vrhovi trokuta $A(1, 2, 3)$, $B(3, 2, 1)$ i $C(1, 4, 1)$. Pokažite da je trokut ABC jednakostraničan.

Rj. Sve stranice imaju duljinu $2\sqrt{2}$

3. Zadani su radij-vektori vrhova trokuta: $r_A = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $r_B = \vec{i} + \vec{k}$ i $r_C = \vec{j} + \vec{k}$. Odredite radij-vektor težišta trokuta.

Rj. $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1)$

4. Za vektor $\vec{d} = AB + CD$, $A(0, 0, 1)$, $B(3, 2, 1)$, $C(4, 6, 5)$ i $D(1, 6, 3)$ odredite duljinu i napišite vektor \vec{a}_0 (jedinični vektor vektora \vec{d}).

Rj. $(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

5. Odredite jednadžbu pravca koji prolazi točkom $A(1, 2, 1)$ i

- točkom $B(2, -1, -3)$
- ima vektor smjera $\vec{s} = (3, 3, 4)$
- paralelan je s pravcem određenim s $\frac{x-1}{2} = \frac{y+7}{0} = \frac{z+1}{3}$
- okomit je na ravninu $5x - 11y + z = 2$.

Rj. a) $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{3}$, b) $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{4}$, d) $\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{-11} = \frac{z-1}{1}$

6. Odredite jednadžbu ravnine koja prolazi točkom $A(1, 2, 3)$ i paralelna je vektorima $\vec{p} = (-1, 0, 2)$ i $\vec{q} = (2, 1, 3)$.

Rj. $2x - 7y + z + 9 = 0$

7. Izračunajte $\vec{a} \cdot \vec{b}$ i odredite kut koji zatvaraju vektori \vec{a} i \vec{b} ako je

- $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (-2, 2, 1)$
- $\vec{a} = (2, -1, 3)$, $\vec{b} = (-2, 1, 1)$
- $\vec{a} = (1, -2, -1)$, $\vec{b} = (1, 0, 1)$.

Rj. a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$, $\angle = 63.5488^\circ$, b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2$, $\angle = 102.604^\circ$, c) vektori su okomiti

8. Odredite kuteve trokuta $\triangle ABC$ određenog vrhovima $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(2, 1, 2)$.

Rj. $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 30^\circ$

9. Zadani su vektori $\vec{a} = (0, 2, -2)$ i $\vec{b} = (2, -2, 1)$. Izračunajte skalarnu projekciju a_b vektora \vec{a} na vektor \vec{b} , te kut $\angle(a, b)$ vektora \vec{a} i \vec{b} .

10. Odredite projekcije vektora \vec{d} na koordinatne osi, ako je $\vec{d} = AB + DC$, $A(1, 0, 1)$, $B(0, 1, -1)$, $C(-2, 0, 1)$ i $D(3, -2, 1)$.

Rj. $a_x = -6, a_y = 3, a_z = -2$

11. Odredite m tako da vektori $\vec{d} = (m, 4, -3)$ i $\vec{b} = (1, -2, \frac{3}{2})$ budu
a) okomiti; b) kolinearni.

Rj. a) $m = \frac{25}{2}$, b) $m = -2$

12. Izračunajte

- a) $(5\vec{d} + 2\vec{b}) \cdot (2\vec{d} - \vec{b})$, ako je $|\vec{d}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ i $\vec{d} \perp \vec{b}$.
b) $|2\vec{d} - 5\vec{b}|$, ako je $|\vec{d}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$ i $\angle(\vec{d}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$.

Rj. a) 22, b) $\sqrt{104 - 20\sqrt{2}}$

13. Izračunajte vektorski produkt $\vec{d} \times \vec{b}$ za

- a) $\vec{d} = (2, 3, 5)$ i $\vec{b} = (1, 2, 1)$.
b) $\vec{d} = (1, 3, 7)$ i $\vec{b} = (-2, -6, -14)$.

Rj. a) $(-7, 3, 1)$, b) $(0, 0, 0)$

14. Odredite jedinični vektor koji je okomit na vektore \vec{d} i \vec{b} , ako je

- a) $\vec{d} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.
b) $\vec{d} = AB$, $A(1, 0, 1)$, $B(2, 1, 3)$, a \vec{b} zatvara s osi y kut $\frac{\pi}{3}$, s osi z kut $\frac{\pi}{4}$ i $|\vec{b}| = 1$, te sa osi x zatvara oštar kut.

Rj. a) $\pm(0, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$.

15. Neka je $\vec{d} = (1, 2, -1)$. Odredite dva vektora \vec{b} i \vec{c} tako da su vektori \vec{d} , \vec{b} , \vec{c} međusobno okomiti.

16. Za trokut $\triangle ABC$ zadan s $A(1, 1, 1)$, $B(2, 3, 4)$, $C(4, 3, 2)$ odredite

- a) površinu; b) visinu na stranicu \overline{AB} .

Rj. a) $2\sqrt{6}$, b) $\frac{4\sqrt{21}}{7}$

17. Napišite jednadžbu ravnine koja sadrži točku $A(0, 1, 2)$ i

- a) okomita je na pravac $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z+2}{4}$.
b) sadrži pravac iz a).

Rj. a) npr. $3x + 5(y-1) + 4(z-2) = 0$, b) $2x - 2y + z = 0$

18. Napišite jednadžbu ravnine koja sadrži točke $A(0, 2, 0)$, $B(1, 1, \frac{1}{3})$, $C(-1, 1, 1)$.

Rj. $x + 2y + 3z - 4 = 0$

19. Odredite m i n tako da ravnina $x - 2y + 7z = 4$ i pravac $\frac{x-n}{m} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{n}$ budu okomiti.

Rj. $\vec{n} = (1, -2, 7)$, $\vec{s} = (m, 4, n)$, $m = -2$, $n = -14$

20. Odredite m tako da ravnine $x - 4y + z = 0$, $mx + y - 11z = 1$ budu međusobno okomite.

Rj. $m = 15$

21. Nađite probodište pravca $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ s ravninom $x + 2y + z = 3$.

Rj. $P(3, -\frac{1}{2}, 1)$

22. Izračunajte $\vec{d} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ ako je

a) $\vec{d} = (2, -1, -1), \vec{b} = (1, 3, -1), \vec{c} = (1, 1, 4)$.

b) $\vec{d} = (2, 0, 1), \vec{b} = (3, -1, 0), \vec{c} = (4, 2, 3)$.

Rj. a) 33, b) 4

23. Ispitajte jesu li vektori $\vec{a} = (2, 5, 7), \vec{b} = (1, 1, -1)$ i $\vec{c} = (1, 2, 2)$ komplanarni. Ako jesu, izrazite vektor \vec{c} pomoću vektora \vec{a} i \vec{b} .

24. Ispitajte leže li točke $A(5, 7, -2), B(3, 1, -1), C(9, 4, -4)$ i $D(1, 5, 0)$ u istoj ravnini.

Rj. Da.

25. Vrhovi trostrane piramide su: $A(2, 2, 2), B(4, 3, 3), C(4, 5, 4)$ i $D(5, 5, 6)$. Izračunajte

a) volumen

b) površinu baze ΔABC

c) visinu piramide spuštene na bazu ΔABC .

Rj. a) $\frac{7}{6}$, b) $\frac{1}{2} \sqrt{21}$, c) $\frac{\sqrt{21}}{3}$

.....

MATEMATIKA 1

(Linearna algebra – 2)

Matrice, vektori

1. Ako je $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ naći:

a) $2A - 3B$, b) $(2A - 3B)^T$, c) $2A^T - 3B^T$.

2. Za matrice iz prethodnog zadatka izračunajte AB^T i $B^T A$.

3. Za matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

izračunajte AB i BA .

4. Za matrice A i B izračunajte AB i BA .

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$

Rj. a) $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, b) $BA = \begin{bmatrix} 14 & 28 \\ -7 & -14 \end{bmatrix}$

5. Izračunajte a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

Rj. a) $(-2, 4, 3)$, b) $(3, 0, -6)$

Rješavanje sustava linearnih jednadžbi

6. Riješite sustav:

$$2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6$$

$$3x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 4$$

$$9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2.$$

7. Odrediti a tako da sustav

$$x - y + az = 1$$

$$2x + 4y - 2z = 2$$

$$3x + 5z = 5$$

nema rješenja.

8. Riješi sustave:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

9. Dvije ravnine koje sadrže ishodište zadane su sa vektorima normala $\vec{n}_1 = (1, 2, 3)$ i $\vec{n}_2 = (0, 4, 5)$. Presjek ovih ravnina je pravac. Odredite parametarsku jednadžbu toga pravca rješavanjem sustava jednadžbi dobivenog iz jednadžbi ovih ravnina.

10. Odredite $\lambda \in \mathbb{R}$ tako da sustav

$$\begin{aligned} x_1 &+ 3x_3 = -3 \\ 2x_1 + \lambda x_2 + x_3 &= -2 \\ x_1 + 2x_2 - \lambda x_3 &= 1 \end{aligned}$$

- a) ima jedinstveno rješenje,
- b) nema rješenja,
- c) ima beskonačno rješenja.

11. Riješite sustav

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Determinante

12. Izračunajte determinante

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

13. Izračunajte determinante

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 7 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Rang

Primjer 1. Odredi rang matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Rješenje.

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow^{-3} \\ \leftarrow_+ \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -9 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow_+ \\ \leftarrow_+ \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -9 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Ešalonska forma ima 3 nenul retka pa zaključujemo da je rang $r(A) = 3$. □

14. Odredite rang matrice

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -9 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Inverzne matrice

15. Odredite inverzne matrice za:

a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

16. Odredi A^{-1} za

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \frac{\pi}{6} & \sin \frac{\pi}{6} \\ 0 & -\sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

17. Odredi A_1^{-1} i A_2^{-1} , za $A_1 = B^{-1}C^2$, $A_2 = B + C^{-1}$. Matrice B i C su zadane sa

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Svojstveni vektori i svojstvene vrijednosti

18. Odredite svojstvene vrijednosti za matrice

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Rj. $3 \pm \sqrt{2}$

19. Odredite svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene vektore matrica:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

MATEMATIKA 1

(Derivacija)

Derivacija funkcije. Tangenta na krivulju

1. Nađite derivacije sljedećih funkcija tj. nađite $\frac{dy}{dx}$:

a) $y = x^6 - 3x^2 + 2x - 5$

b) $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - \frac{x^4}{2}$

c) $y = \frac{-5x^3}{a}$

d) $y = \frac{\pi}{x} + \ln 2$

e) $y = x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}$

f) $y = 3x^{\frac{2}{3}} - x^{-3}$

g) $y = \operatorname{tg} x - x \cos x$

h) $y = \frac{2x + 3}{x^2 - 2x + 7}$

i) $y = x \cdot 3^x$

j) $y = e^x \cos x$

k) $y = (x^2 + 3x - 1) \ln x$

l) $y = 2x \sin x - (x^2 - 2) \cos x$

m) $y = \frac{x^2}{\ln x}$

n) $y = \frac{1}{x} + 2 \log_{10} x - \frac{\ln x}{x}$

2. Nađite jednadžbu tangente na krivulju

a) $y = x^2 - 3x + 1$

b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

c) $y = 2^x$

d) $y = \sin \frac{\pi}{2}x$

u točki $x = 3$. Skicirajte krivulju i tangentu.

3. Nađite jednadžbu tangente na krivulju $y = x^2 - 4$ koja je okomita na pravac $y = -x + 1$.

Linearna aproksimacija i totalni diferencijal

4. Nađite linearnu aproksimaciju funkcije $y = \sqrt[3]{x}$ za $x = 1$. Koristeći se tom aproksimacijom približno izračunajte $\sqrt[3]{1.02}$.

5. Nađite linearnu aproksimaciju funkcije $y = e^x$ za $x = 0$. Koristeći se tom aproksimacijom približno izračunajte $e^{-0.02}$.

6. Za funkciju $y = \cos x$ i za $x = \frac{\pi}{6}$ i $\Delta x = \frac{\pi}{36}$ nađite diferencijal (linearnu aproksimaciju prirasta).

7. Za funkciju $y = \ln x$ i za $x = 1$ i $\Delta x = -0.5$ nađite diferencijal (linearnu aproksimaciju prirasta).

Put, brzina, akceleracija

8. Položaj točke koja se giba po pravcu zadan je funkcijom $x(t) = 3t - t^3$ (t u sekundama, x u centimetrima). Nađite brzinu i ubrzanje te točke u trenutku $t = 2$.

9. Položaj točke koja se giba po pravcu zadan je funkcijom $x(t) = 2t - \frac{1}{2}t^4$ (t u sekundama, x u centimetrima). Nađite brzinu i ubrzanje te točke u trenutku $t = 4$.

Lančano deriviranje

10. Nađite derivacije sljedećih funkcija:

a) $y = \left(\frac{ax+1}{3}\right)^4$

b) $y = (3+2x)^{10}$

c) $y = \cos^3 x + \cos 3x$

d) $y = \sin 3x + \sin^3 x$

e) $y = \ln^2(2x^2+1)$

f) $y = \sqrt{\ln(3x^2+4)}$

11. Nađite

a) $y'(0)$ za $y = 5e^{-x^2} + 2e^{2x+1}$

b) $y'(0)$ za $y = 4e^{x^2-2x} + \frac{1}{2}e^{x-1}$

c) $y'(0)$ za $y = \frac{1 - \sin 2x}{1 + \sin 2x}$

d) $y'(\frac{\pi}{2})$ za $y = \frac{1 - \cos 3x}{1 + \cos 3x}$

12. Nađite derivaciju y' funkcije zadane s

a) $\ln y + \frac{x}{y} = e$,

b) $y^3 = \frac{x-y}{x+y}$.

13. Izračunajte vrijednost y' funkcije $(x+y)^3 = 2(x-y)$ za $x = 3$ i $y = -1$. Napišite jednadžbu tangente na krivulju u točki $T(3, -1)$.

14. Izračunajte vrijednost y' funkcije $y^2 = x + \ln \frac{y}{x}$ za $x = 1$, $y = 1$. Napišite jednadžbu tangente na krivulju u točki $T(1, 1)$.

15. Nađite derivaciju $y' = \frac{dy}{dx}$ funkcije zadane parametarski:

a) $x = \frac{1}{1+t}$, $y = \left(\frac{t}{1+t}\right)^2$

b) $x = \frac{2at}{1+t^2}$, $y = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2}$

16. Izračunajte $y' = \frac{dy}{dx}$ za zadanu vrijednost parametra t , ako je

a) $x = \frac{1}{1+t}$, $y = \left(\frac{t}{1+t}\right)^2$, $t = \frac{\pi}{2}$,

b) $x = t \ln t$, $y = \frac{\ln t}{t}$, $t = 1$.

Vezane brzine

17. Jedna stranica pravokutnika ima konstantnu veličinu $a = 2\text{cm}$, a druga stranica b raste konstantnom brzinom 4cm/s . Kojom brzinom rastu dijagonala i površina tog pravokutnika kada je $b = 30\text{cm}$?

18. Polumjer kugle povećava se jednoliko brzinom od 5cm/s . Kojom se brzinom povećava površina kugline plohe i volumen kugle u trenutku kada polumjer postane jednak 50cm ?

L'Hôpitalovo pravilo

19. Koristeći L'Hôpitalovo pravilo izračunajte

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$,

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin 3x}$,

c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}$,

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^3}$.

MATEMATIKA 1

(Tok funkcije)

1. Odredite intervale rasta i pada, te lokalne ekstreme sljedećih funkcija

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$

b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$

c) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

d) $f(x) = \frac{(x - 2)(8 - x)}{x^2}$

e) $f(x) = \sqrt[3]{(x - 2)^2}$

f) $f(x) = \sqrt[3]{(x + 1)^2}$

g) $f(x) = x \ln x$

h) $f(x) = xe^x$

Rješenje.

a) $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3$. Kandidati za lokalne ekstreme su rješenja jednadžbe $f'(x) = 0$. To su $x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2 \cdot 3} = -1$. Intervali na kojima je funkcija monotona su $\langle -\infty, -1 \rangle$ i $\langle -1, \infty \rangle$. Na oba intervala je f' pozitivna (možemo pogledati $f'(-2) = 3 > 0$ i npr. $f'(0) = 3 > 0$) pa prema tome na tim intervalima f raste.

x	$\langle -\infty, -1 \rangle$	-1	$\langle -1, \infty \rangle$
f'	$+$	0	$+$
f	\nearrow	nije lokalni ekstrem	\nearrow

□

2. Odredite intervale zakretanja, te točke pregiba sljedećih funkcija

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$

b) $f(x) = \frac{1}{x + 3}$

c) $f(x) = (1 + x^2)e^x$

d) $f(x) = x^2 \ln x$

3. Izračunajte sljedeće limese:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x + 3)(x - 2)}{1 - 4x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x^4 + 1}}$

c) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x + 10}{x^2 - 25}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

f) $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$

g) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49}$

h) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5 + x}}{x - 4}$

i) $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$

j) $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x \cdot \ln(x - 1)$

4. Ispitajte granično ponašanje sljedećih funkcija u okolini točkica prekida i "u beskonačnosti".

a) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$

b) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4x + 3}$

c) $f(x) = \frac{x^2 - x}{x + 1}$

d) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$

e) $f(x) = \frac{1}{1 - e^x}$

f) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

5. Ispitajte tok i skicirajte graf sljedećih funkcija

a) $f(x) = x^3 - 3x^2$

b) $f(x) = \frac{6x^2 - x^4}{9}$

c) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

d) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$

e) $f(x) = x \sqrt{x + 3}$

f) $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x}$

g) $f(x) = xe^{-x}$

h) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

6. Odredite najveću i najmanju vrijednost funkcije na zadanom intervalu

a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ za $x \in [-1, 5]$

b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ za $x \in [-10, 12]$

c) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ za $x \in [-5, 2)$

d) $f(x) = \sqrt{x(10-x)}$ za $x \in [1, 6)$

7. Odredite stranice pravokutnika čija je površina 9cm^2 tako da mu opseg bude minimalan.

8. Odredite stranice a, b pravokutnika čija je površina 16cm^2 tako da zbroj $a + b$ bude minimalan.

9. Zadanoj kugli radijusa R treba upisati valjak najvećeg volumena. Koje su dimenzije tog valjka?

10. Zadanoj kugli radijusa R treba upisati stožac najvećeg volumena. Koje su dimenzije tog stošca?

MATEMATIKA 1

(Integrali)

1. Izračunajte neodređene integrale:

a) $\int 2(3x - 1)^2 dx$

b) $\int (1 + x)(2 - x + x^2) dx$

c) $\int \frac{x^4 + 2x^3 + 7}{\sqrt[3]{x}} dx$

d) $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 2x^4 + \frac{x}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx$

e) $\int \frac{5}{\cos^2 x} dx$

f) $\int (\sin x + 5 \cos x) dx$

g) $\int (5^x + 5x) dx$

h) $\int (e^x + x^2) dx$

2. Nađite funkciju čija je derivacija $y' = 7x + 4$ ako je za $x = 2$ vrijednost funkcije 16.

3. Nađite funkciju čija je derivacija $y' = 3x^2 + 5$ ako je za $x = 1$ vrijednost funkcije 9.

4. Brzina čestice koja se giba duž osi x u trenutku t iznosi $v(t) = 3t^2 + 4$. Odredite položaj čestice u proizvoljnom trenutku t ako je u trenutku $t = 2$ čestica u točki $x = 20$.

5. Brzina čestice koja se giba duž osi x u trenutku t iznosi $v(t) = t^2 - 8t + 2$. Odredite položaj čestice u proizvoljnom trenutku t ako je u trenutku $t = 4$ čestica u točki $x = 24$.

6. Ubrzanje čestice koja se giba po osi x iznosi $a(t) = 12t^2 + 6t$. Odredite položaj i brzinu čestice u proizvoljnom trenutku ako je u trenutku $t = 1$ brzina $v = 8$ i položaj $x = 8$.

7. Ubrzanje čestice koja se giba po osi x iznosi $a(t) = -6t + 18$. Odredite položaj i brzinu čestice u proizvoljnom trenutku ako je u trenutku $t = 0$ brzina $v = 24$ i položaj $x = 15$.

8. Izračunajte određene integrale:

a) $\int_{-1}^2 (x^2 + 2x + 1) dx$

b) $\int_{-1}^0 (x^3 + 2x) dx$

c) $\int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$

d) $\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx$

f) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x} dx$

9. Izračunajte površine likova koji su omeđeni s

a) $x + 2y - 4 = 0, y = 0, x = -3, x = 2$

b) $x - 2y + 4 = 0, x + y - 5 = 0, y = 0$

c) $y = x^2, y = 0, x = 2, x = 3$

d) $y = -x^2 + 4, y = 0$

e) $y = x^2, y = 2x$

f) $7x^2 - 9y + 9 = 0, 5x^2 - 9y + 27 = 0$

g) $y = \sin x, y = x^2 - \pi x$

h) $y = \sin x, y = \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

10. Izračunajte neprave integrale:

a) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 x}$

c) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3}$

d) $\int_{-1}^1 \frac{2}{x} dx$

e) $\int_1^{\infty} \frac{3}{x} dx$

f) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2}$

g) $\int_{-\infty}^1 3^x dx$

h) $\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^x dx$

Rješenja zadataka

MATI – vektori i primjene str: 2

- $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$
- Sve stranice imaju duljinu $2\sqrt{2}$
- $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1)$
- $(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2})$
- a) $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{3}$, b) $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{4}$, d) $\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{-11} = \frac{z-1}{1}$
- $2x - 7y + z + 9 = 0$
- a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$, $\angle = 63.5488^\circ$, b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2$, $\angle = 102.604^\circ$,
c) vektori su okomiti
- $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 30^\circ$
- $a_x = -6$, $a_y = 3$, $a_z = -2$
- a) $m = \frac{25}{2}$, b) $m = -2$
- a) 22, b) $\sqrt{104 - 20\sqrt{2}}$
- a) $(-7, 3, 1)$, b) $(0, 0, 0)$
- a) $\pm(0, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$,

- a) $2\sqrt{6}$, b) $\frac{4\sqrt{21}}{7}$
- a) npr. $3x + 5(y - 1) + 4(z - 2) = 0$, b) $2x - 2y + z = 0$
- $x + 2y + 3z - 4 = 0$
- $\vec{n} = (1, -2, 7)$, $\vec{s} = (m, 4, n)$, $m = -2$, $n = -14$
- $m = 15$
- $P(3, -\frac{1}{2}, 1)$
- a) 33, b) 4
- Da.
- a) $\frac{7}{6}$, b) $\frac{1}{2}\sqrt{21}$, c) $\frac{\sqrt{21}}{3}$

MATI – linearna algebra str: 5

- a) $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, b) $BA = \begin{bmatrix} 14 & 28 \\ -7 & -14 \end{bmatrix}$
- a) $(-2, 4, 3)$, b) $(3, 0, -6)$
- $3 \pm \sqrt{2}$