Kolokviji i pismeni ispiti

Sadržaj

MATEMATIKA

1

ZADAĆE IZ MATEMATIKE 1

MATEMATIKA 1

(prva zadaća)

Vektori i primjene

1. U trokutu ΔABC točke M i N dijele stranicu $\overline{AB}$ na tri jednaka dijela. Označite $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$ i izrazite vektore $\overrightarrow{CM}$ i $\overrightarrow{CN}$ pomoću vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

2. Zadani su vrhovi trokuta $A(1, 2, 3)$, $B(3, 2, 1)$ i $C(1, 4, 1)$. Pokažite da je trokut ABC jednakostraničan.

3. Zadani su radij-vektori vrhova trokuta: $\vec{r_A} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{r_B} = \vec{i} + \vec{k}$ i $\vec{r_C} = \vec{j} + \vec{k}$. Odredite radij-vektor težišta trokuta.

4. Za vektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, $A(0, 0, 1)$, $B(3, 2, 1)$, $C(4, 6, 5)$ i $D(1, 6, 3)$ odredite duljinu i napišite vektor $\vec{a_0}$ (jedinični vektor vektora $\vec{a}$).

5. Odredite jednadžbu pravca koji prolazi točkom $A(1, 2, 1)$ i

a) točkom $B(2, -1, -3)$
b) ima vektor smjera $\vec{s} = (3, 3, 4)$
c) paralelan je s pravcem određenim s $\frac{x-1}{2} = \frac{y+7}{0} = \frac{z+1}{3}$
d) okomit je na ravninu $5x - 11y + z = 2$.

6. Odredite jednadžbu ravnine koja prolazi točkom $A(1, 2, 3)$ i paralelna je vektorima $\vec{p} = (-1, 0, 2)$ i $\vec{q} = (2, 1, 3)$.

7. Izračunajte $\vec{a} \cdot \vec{b}$ i odredite kut koji zatvaraju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ako je

a) $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (-2, 2, 1)$
b) $\vec{a} = (2, -1, 3)$, $\vec{b} = (-2, 1, 1)$
c) $\vec{a} = (1, -2, -1)$, $\vec{b} = (1, 0, 1)$.

8. Odredite kuteve trokuta ΔABC određenog vrhovima $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(2, 1, 2)$.

9. Zadani su vektori $\vec{a} = (0, 2, -2)$ i $\vec{b} = (2, -2, 1)$. Izračunajte skalarnu projekciju a_b vektora $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$, te kut $\angle(a, b)$ vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

10. Odredite projekcije vektora $\vec{a}$ na koordinatne osi, ako je $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$, $A(1, 0, 1)$, $B(0, 1, -1)$, $C(-2, 0, 1)$ i $D(3, -2, 1)$.

11. Odredite m tako da vektori $\vec{a} = (m, 4, -3)$ i $\vec{b} = (1, -2, \frac{3}{2})$ budu
a) okomiti; b) kolinearni.

12. Izračunajte

a) $(5\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b})$, ako je $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ i $\vec{a} \perp \vec{b}$.
b) $|2\vec{a} - 5\vec{b}|$, ako je $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$ i $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$.

13. Izračunajte vektorski produkt $\vec{a} \times \vec{b}$ za

a) $\vec{a} = (2, 3, 5)$ i $\vec{b} = (1, 2, 1)$.
b) $\vec{a} = (1, 3, 7)$ i $\vec{b} = (-2, -6, -14)$.

14. Odredite jedinični vektor koji je okomit na vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$, ako je

a) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

b) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $A(1,0,1)$, $B(2,1,3)$, a $\vec{b}$ zatvara s osi y kut $\frac{\pi}{3}$, s osi z kut $\frac{\pi}{4}$ i $|\vec{b}| = 1$, te sa osi x zatvara oštar kut.

15. Neka je $\vec{a} = (1,2,-1)$. Odredite dva vektora $\vec{b}$ i $\vec{c}$ tako da su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ međusobno okomiti.

16. Za trokut ΔABC zadan s $A(1,1,1)$, $B(2,3,4)$, $C(4,3,2)$ odredite
a) površinu; b) visinu na stranicu $\overline{AB}$.

17. Napišite jednadžbu ravnine koja sadrži točku $A(0,1,2)$ i

a) okomita je na pravac $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z+2}{4}$.

b) sadrži pravac iz zadatka a).

18. Napišite jednadžbu ravnine koja sadrži točke $A(0,2,0)$, $B(1,1,\frac{1}{3})$, $C(-1,1,1)$.

19. Odredite m i n tako da ravnina $x - 2y + 7z = 4$ i pravac $\dfrac{x-n}{m} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z}{n}$ budu okomiti.

20. Odredite m tako da ravnine $x - 4y + z = 0$, $mx + y - 11z = 1$ budu međusobno okomite.

21. Nađite probodište pravca $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{2}$ s ravninom $x + 2y + z = 3$.

22. Izračunajte $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ ako je

a) $\vec{a} = (2,-1,-1)$, $\vec{b} = (1,3,-1)$, $\vec{c} = (1,1,4)$.

b) $\vec{a} = (2,0,1)$, $\vec{b} = (3,-1,0)$, $\vec{c} = (4,2,3)$.

23. Ispitajte jesu li vektori $\vec{a} = (2,5,7)$, $\vec{b} = (1,1,-1)$ i $\vec{c} = (1,2,2)$ komplanarni. Ako jesu, izrazite vektor $\vec{c}$ pomoću vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

24. Ispitajte leže li točke $A(5,7,-2)$, $B(3,1,-1)$, $C(9,4,-4)$ i $D(1,5,0)$ u istoj ravnini.

25. Vrhovi trostrane piramide su: $A(2,2,2)$, $B(4,3,3)$, $C(4,5,4)$ i $D(5,5,6)$. Izračunajte

a) volumen

b) površinu baze ΔABC

c) visinu piramide spuštene na bazu ΔABC.

......

MATEMATIKA 1

(druga zadaća)

Matrice, vektori

1. Ako je $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ naći:

a) $2A - 3B$, b) $(2A - 3B)^T$, c) $2A^T - 3B^T$.

2. Za matrice iz prethodnog zadatka izračunajte AB^T i $B^T A$.

3. Za matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

naći AB i BA.

4. Za matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ naći AB i BA.

5. Izračunajte a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

Rješavanje sustava linearnih jednadžbi

6. Riješite sustav:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 &= 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 &= 2. \end{aligned}$$

7. Odrediti a tako da sustav

$$\begin{aligned} x - y + az &= 1 \\ 2x + 4y - 2z &= 2 \\ 3x + 5z &= 5 \end{aligned}$$

nema rješenja.

8. Riješi sustave:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

9. Dvije ravnine koje sadrže ishodište zadane su sa vektorima normala $\vec{n}_1 = (1,2,3)$ i $\vec{n}_2 = (0,4,5)$. Presjek ovih ravnina je pravac. Odredite parametarsku jednadžbu toga pravca rješavanjem sustava jednadžbi dobivenog iz jednadžbi ovih ravnina.

10. Odredite $\lambda \in \mathbb{R}$ tako da sustav

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad + 3x_3 &= -3 \\ 2x_1 + \lambda x_2 + \;\; x_3 &= -2 \\ x_1 + 2x_2 - \lambda x_3 &= \;\;\, 1 \end{aligned}$$

a) ima jedinstveno rješenje,

b) nema rješenja,

c) ima beskonačno rješenja.

Inverzne matrice

11. Odredite inverzne matrice za:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{b)} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{c)} \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{d)} \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{e)} \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

12. Odredi A^{-1} za

$$\text{a)}\ \ A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{b)}\ \ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6} \\ 0 & -\sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{bmatrix} \qquad \text{c)}\ \ A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

13. Odredi A_1^{-1} i A_2^{-1}, za $A_1 = B^{-1}C^2$, $A_2 = B + C^{-1}$. Matrice B i C su zadane sa

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Svojstveni vektori i svojstvene vrijednosti

14. Odredite svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene vektore matrica:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{b)} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{c)} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{d)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e)} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MATEMATIKA 1

(treća zadaća)

Derivacija funkcije. Tangenta na krivulju

1. Nađite derivacije sljedećih funkcija tj. nađite $\frac{dy}{dx}$:

a) $y = x^6 - 3x^2 + 2x - 5$

b) $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - \frac{x^4}{2}$

c) $y = \frac{-5x^3}{a}$

d) $y = \frac{\pi}{x} + \ln 2$

e) $y = x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}$

f) $y = 3x^{\frac{2}{3}} - x^{-3}$

g) $y = \operatorname{tg} x - x \cos x$

h) $y = \dfrac{2x + 3}{x^2 - 2x + 7}$

i) $y = x \cdot 3^x$

j) $y = e^x \cos x$

k) $y = (x^2 + 3x - 1) \ln x$

l) $y = 2x \sin x - (x^2 - 2) \cos x$

m) $y = \frac{x^2}{\ln x}$

n) $y = \frac{1}{x} + 2 \log_{10} x - \frac{\ln x}{x}$

2. Nađite jednadžbu tangente na krivulju

a) $y = x^2 - 3x + 1$

b) $y = (\frac{1}{2})^x$

c) $y = 2^x$

d) $y = \sin \frac{\pi}{2} x$

u točki $x = 3$. Skicirajte krivulju i tangentu.

3. Nađite jednadžbu tangente na krivulju $y = x^2 - 4$ koja je okomita na pravac $y = -x + 1$.

Linearna aproksimacija i totalni diferencijal

4. Nađite linearnu aproksimaciju funkcije $y = \sqrt[3]{x}$ za $x = 1$. Koristeći se tom aproksimacijom približno izračunajte $\sqrt[3]{1.02}$.

5. Nađite linearnu aproksimaciju funkcije $y = e^x$ za $x = 0$. Koristeći se tom aproksimacijom približno izračunajte $e^{-0.02}$.

6. Za funkciju $y = \cos x$ i za $x = \frac{\pi}{6}$ i $\Delta x = \frac{\pi}{36}$ nađite diferencijal (linearnu aproksimaciju prirasta).

7. Za funkciju $y = \ln x$ i za $x = 1$ i $\Delta x = -0.5$ nađite diferencijal (linearnu aproksimaciju prirasta).

8. Položaj točke koja se giba po pravcu zadan je funkcijom $x(t) = 3t - t^3$ (t u sekundama, x u centimetrima). Nađite brzinu i ubrzanje te točke u trenutku $t = 2$.

9. Položaj točke koja se giba po pravcu zadan je funkcijom $x(t) = 2t - \frac{1}{2}t^4$ (t u sekundama, x u centimetrima). Nađite brzinu i ubrzanje te točke u trenutku $t = 4$.

Lančano deriviranje

10. Nađite derivacije sljedećih funkcija:

a) $y = \left(\frac{ax+1}{3}\right)^4$

b) $y = (3+2x)^{10}$

c) $y = \cos^3 x + \cos 3x$

d) $y = \sin 3x + \sin^3 x$

e) $y = \ln^2(2x^2+1)$

f) $y = \sqrt{\ln(3x^2+4)}$

11. Nađite

a) $y'(0)$ za $y = 5e^{-x^2} + 2e^{2x+1}$

b) $y'(0)$ za $y = 4e^{x^2-2x} + \frac{1}{2}e^{x-1}$

c) $y'(0)$ za $y = \frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}$

d) $y'(\frac{\pi}{2})$ za $y = \frac{1-\cos 3x}{1+\cos 3x}$

12. Jedna stranica pravokutnika ima konstantnu veličinu $a = 2cm$, a druga stranica b raste konstantnom brzinom $4cm/s$. Kojom brzinom rastu dijagonala i površina tog pravokutnika kada je $b = 30cm$?

13. Polumjer kugle povećava se jednoliko brzinom od $5cm/s$. Kojom se brzinom povećava površina kugline plohe i volumen kugle u trenutku kada polumjer postane jednak $50cm$?

14. Nađite derivaciju y' funkcije zadane s

a) $\ln y + \frac{x}{y} = e$,

b) $y^3 = \frac{x-y}{x+y}$.

15. Izračunajte vrijednost y' funkcije $(x+y)^3 = 2(x-y)$ za $x = 3$ i $y = -1$. Napišite jednadžbu tangente na krivulju u točki $T(3,-1)$.

16. Izračunajte vrijednost y' funkcije $y^2 = x + \ln\frac{y}{x}$ za $x = 1$, $y = 1$. Napišite jednadžbu tangente na krivulju u točki $T(1,1)$.

17. Nađite derivaciju $y' = \frac{dy}{dx}$ funkcije zadane parametarski:

a) $x = \frac{1}{1+t}$, $y = \left(\frac{t}{1+t}\right)^2$

b) $x = \frac{2at}{1+t^2}$, $y = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2}$

18. Izračunajte $y' = \frac{dy}{dx}$ za zadanu vrijednost parametra t, ako je

a) $x = \frac{1}{1+t}$, $y = \left(\frac{t}{1+t}\right)^2$, $t = \frac{\pi}{2}$,

b) $x = t\ln t$, $y = \frac{\ln t}{t}$, $t = 1$.

19. Koristeći L'Hospitalovo pravilo izračunajte

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin 3x}$,

c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}$,

d) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{e^x}{x^3}$.

MATEMATIKA 1

(četvrta zadaća)

Tok funkcije

1. Odredite intervale rasta i pada, te lokalne ekstreme sljedećih funkcija

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ d) $f(x) = \dfrac{(x-2)(8-x)}{x^2}$

e) $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ f) $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2}$

g) $f(x) = x \ln x$ h) $f(x) = xe^x$

2. Odredite intervale zakretanja, te točke pregiba sljedećih funkcija

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$

c) $f(x) = (1 + x^2)e^x$ d) $f(x) = x^2 \ln x$

3. Izračunajte sljedeće limese:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x+3)(x-2)}{1 - 4x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x^4 + 1}}$

c) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2 - 5x + 10}{x^2 - 25}$ d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ f) $\lim\limits_{x\to 64} \dfrac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$

g) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$ h) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3 - \sqrt{5+x}}{x - 4}$

i) $\lim\limits_{x\to 1}(1 - x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$ j) $\lim\limits_{x\to 1} \ln x \cdot \ln(x-1)$

4. Ispitajte granično ponašanje sljedećih funkcija u okolini točaka prekida i "u beskonačnosti".

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$ b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4x + 3}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x + 1}$ d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{1 - e^x}$ f) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

5. Ispitajte tok i skicirajte graf sljedećih funkcija

a) $f(x) = x^3 - 3x^2$ b) $f(x) = \dfrac{6x^2 - x^4}{9}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

e) $f(x) = x\sqrt{x+3}$ f) $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x}$

g) $f(x) = xe^{-x}$ h) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

6. Odredite najveću i najmanju vrijednost funkcije na zadanom intervalu

a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ za $x \in [-1, 5]$

b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ za $x \in [-10, 12]$

c) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$ za $x \in [-5, 2\rangle$

d) $f(x) = \sqrt{x(10 - x)}$ za $x \in [1, 6\rangle$

7. Odredite stranice pravokutnika čija je površina $9cm^2$ tako da mu opseg bude minimalan.

8. Odredite stranice a, b pravokutnika čija je površina $16cm^2$ tako da zbroj $a + b$ bude minimalan.

9. Zadanoj kugli radijusa R treba upisati valjak najvećeg volumena. Koje su dimenzije tog valjka?

10. Zadanoj kugli radijusa R treba upisati stožac najvećeg volumena. Koje su dimenzije tog stošca?

MATEMATIKA 1

(peta zadaća)

1. Izračunajte neodređene integrale:

a) $\int 2(3x-1)^2 dx$

b) $\int (1+x)(2-x+x^2)dx$

c) $\int \frac{x^4+2x^3+7}{\sqrt[3]{x}}dx$

d) $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+2x^4+\frac{x}{\sqrt[5]{x^2}}\right)dx$

e) $\int \frac{5}{\cos^2 x}dx$

f) $\int (\sin x + 5\cos x)dx$

g) $\int (5^x+5x)dx$

h) $\int (e^x+x^2)dx$

2. Nađite funkciju čija je derivacija $y' = 7x+4$ ako je za $x=2$ vrijednost funkcije 16.

3. Nađite funkciju čija je derivacija $y' = 3x^2+5$ ako je za $x=1$ vrijednost funkcije 9.

4. Brzina čestice koja se giba duž osi x u trenutku t iznosi $v(t) = 3t^2+4$. Odredite položaj čestice u proizvoljnom trenutku t ako je u trenutku $t=2$ čestica u točki $x=20$.

5. Brzina čestice koja se giba duž osi x u trenutku t iznosi $v(t) = t^2-8t+2$. Odredite položaj čestice u proizvoljnom trenutku t ako je u trenutku $t=4$ čestica u točki $x=24$.

6. Ubrzanje čestice koja se giba po osi x iznosi $a(t) = 12t^2+6t$. Odredite položaj i brzinu čestice u proizvoljnom trenutku ako je u trenutku $t=1$ brzina $v=8$ i položaj $x=8$.

7. Ubrzanje čestice koja se giba po osi x iznosi $a(t) = -6t+18$. Odredite položaj i brzinu čestice u proizvoljnom trenutku ako je u trenutku $t=0$ brzina $v=24$ i položaj $x=15$.

8. Izračunajte određene integrale:

a) $\int_{-1}^{2}(x^2+2x+1)dx$

b) $\int_{-1}^{0}(x^3+2x)dx$

c) $\int_{1}^{4}(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})dx$

d) $\int_{1}^{9}\frac{x-1}{\sqrt{x}}dx$

e) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos x dx$

f) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin^2 x}dx$

9. Izračunajte površine likova koji su omeđeni s

a) $x+2y-4=0,\ y=0,\ x=-3,\ x=2$

b) $x-2y+4=0,\ x+y-5=0,\ y=0$

c) $y=x^2,\ y=0,\ x=2,\ x=3$

d) $y=-x^2+4,\ y=0$

e) $y=x^2,\ y=2x$

f) $7x^2-9y+9=0,\ 5x^2-9y+27=0$

g) $y=\sin x,\ y=x^2-\pi x$

h) $y=\sin x,\ y=\cos x,\ 0\le x\le \frac{\pi}{4}$

10. Izračunajte neprave integrale:

a) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 x}$

c) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3}$

d) $\int_{-1}^1 \frac{2}{x}dx$

e) $\int_1^{\infty} \frac{3}{x}dx$

f) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2}$

g) $\int_{-\infty}^1 3^x dx$

h) $\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x dx$

MATEMATIKA 1

(šesta zadaća)

1. Poznavajući graf funkcije $y = \sin x$ skicirajte grafove funkcija:

a) $y = 3\sin\dfrac{x}{2}$; b) $y = \dfrac{3}{2}\sin 2x$;

c) $y = \dfrac{1}{2}\sin(3x + \pi)$; d) $y = 2\sin\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

2. Nađite najveću i najmanju vrijednost funkcija na zadanim intervalima:

a) $f(x) = x - \sin x,\ x \in [0, \frac{\pi}{2}]$; b) $f(x) = \sin x - \cos x,\ x \in [0, \pi]$.

3. Odredite pomoću trigonometrijske kružnice:

a) $\text{arc}\cos(\cos(-\dfrac{\pi}{4}))$; b) $\text{arc}\sin(\sin\dfrac{3\pi}{4})$.

4. Nađite derivacije funkcija:

a) $f(x) = \sqrt{\arcsin x} - (\text{arc tg}\, x)^2$; b) $f(x) = \sqrt{\text{arc tg}\, x} + \dfrac{1}{\arcsin x}$.

5. Pod kojim kutem grafovi funkcija: a) $y = \sqrt{3}\cdot\sin\frac{x}{3}$; b) $y = 3\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}$ sijeku x–os u ishodištu?

6. Izračunajte integrale

a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

7. Izračunajte neprave integrale

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$, b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

8. Poznavajući grafove funkcija $y = e^x$ i $y = \ln x$ skicirajte grafove funkcija

a) $y = \ln(-x)$ b) $y = -e^x$ c) $y = e^x - 1$ d) $y = \ln(x+1)$

9. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcija:

a) $y = x^2 \ln x$, b) $y = x^2 e^{-x}$.

10. Primjenom prethodnog logaritmiranja derivirajte funkcije:

a) $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\,\sqrt{(x+3)^3}}$; b) $y = \dfrac{(x-2)^9}{\sqrt{(x^2+1)^5\cdot(x-3)^3}}$;

c) $y = x^{\sin x}$; d) $y = (\cos x)^x$.

11. Vrijeme poluraspada radija je $T = 1690$ godina. Koliko će ostati od 1 grama radija nakon 10000 godina?

12. 20% radioaktivnog elementa raspadne se u godinu dana. Koliko je vrijeme poluraspada tog elementa?

MATEMATIKA 1

(dodatni zadaci sa sustavima)

Riješite sustave Gaussovom metodom:

FiXme P
stav

1.*

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

2.

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

KOLOKVIJI IZ MATEMATIKE 1

A

MATEMATIKA 1

(drugi kolokvij, 18.12.2003.)

1. Nađite derivacije sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = 2^x \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)$,

(b) $y(\sin^2 x + \sin 2x) = 5$,

(c) $x(t) = 2\cos t, \quad y(t) = \frac{3\sin t}{t}$.

(20 bodova)

2. Kojom se brzinom mijenja volumen kugle u trenutku $t = 3s$, ako je kuglin radijus r u trenutku t zadan sa

$$r(t) = 3 + \sin\left(t \cdot \frac{\pi}{4}\right) \ ?$$

(20 bodova)

3. Odredite jednadžbu tangente i normale na krivulju

$$y^2 = x^3 + 8x + 1$$

u točki $T(2, -5)$.

(20 bodova)

4. Odredite intervale rasta i pada funkcije

$$f(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 4).$$

Pomoću dobivenih intervala skicirajte graf funkcije.

(20 bodova)

5. Odredite stranice pravokutnika čiji je opseg 12cm tako da mu površina bude maksimalna.

(20 bodova)

B

MATEMATIKA 1

(drugi kolokvij, 18.12.2003.)

1. Nađite derivacije sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = \cos\left(x^2 + \dfrac{1}{1-x}\right)$,

(b) $y^2\,(\sin x + \cos(1-x)) = 5\ln x$,

(c) $x(t) = 2e^{t-1}, \quad y(t) = \dfrac{3\sin t}{e^t}$.

(20 bodova)

2. Kojom se brzinom mijenja volumen kocke u trenutku $t = 1s$, ako je stranica a u trenutku t zadana s

$$a(t) = \sqrt{7 + 2(t-2)^2} \ \ ?$$

(20 bodova)

3. Odredite jednadžbu tangente i normale na krivulju

$$x^2 + 2 = y^3 + 5y$$

u točki $T(-4, 2)$.

(20 bodova)

4. Odredite intervale rasta i pada funkcije

$$f(x) = (x-2)(x^2 - 3x + 2).$$

Pomoću dobivenih intervala skicirajte graf funkcije.

(20 bodova)

5. Odredite stranice pravokutnika čija je površina 9 cm tako da mu opseg bude bude minimalan.

(20 bodova)

MATEMATIKA 1

(ponovljeni 2. kolokvij, 06.02.2004.)

1. Nađite derivacije sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = x + \dfrac{3}{1-x}$,

(b) $\ln x + \cos(1-x) = 5y^2$,

(c) $x(t) = 2\ln(t^2+1), \quad y(t) = 3\cos t$.

(20 bodova)

2. Kojom se brzinom mijenja volumen cilindra u trenutku $t = 1s$, ako je visina $v = 5$, a radijus se mijenja u vremenu prema formuli

$$r(t) = t^2 + 3t.$$

Volumen cilindra računa se prema formuli $V = (r^2\pi)v$.

(20 bodova)

3. Odredite jednadžbu tangente na krivulju

$$x^2 + 2x - 2 = 2y^3 + 4y$$

u točki $T(-4, 1)$.

(20 bodova)

4. Odredite asimptote (horizontalne i vertikalne) grafa funkcije

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+2}.$$

Skicirajte graf.

(20 bodova)

5. Odredite stranice a, b pravokutnika čija je površina 16 cm tako da zbroj $a + b$ bude bude minimalan.

(20 bodova)

A **MATEMATIKA 1**

(1. kolokvij, 12.11.2004.)

1. Zadan je pravokutnik $OABC$. Točka P je polovište stranice BC, a točke M i N dijele stranicu AB na tri jednaka dijela. Izrazite vektor $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}$ pomoću vektora $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{OC}$.

(15 bodova)

2. Odredite vrijednosti parametra m tako da pravci

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+3}{-1},$$

i

$$\begin{aligned} x &= 3 - 2t \\ y &= 4 + 5t \\ z &= -1 \end{aligned}$$

budu okomiti.

(10 bodova)

3. Napišite jednadžbu ravnine koja je određena točkama $A(3, -2, 0)$, $B(2, -1, 1)$, $C(-3, -1, 3)$.

(15 bodova)

4. Riješite sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & -3 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \end{array}$$

(15 bodova)

5. Nađite inverznu matricu matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(15 bodova)

6. Odredite svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene vektore matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(15 bodova)

7. Definirajte pojam linearne zavisnosti vektora. Navedite primjer tri linearno zavisna vektora u $\mathbb{R}^3$ (u prostoru).

(15 bodova)

B

MATEMATIKA 1

(1. kolokvij, 12.11.2004.)

1. Zadan je pravokutnik $OABC$. Točka P raspolavlja stranicu AB, a točke M i N dijele stranicu BC na tri jednaka dijela. Izrazite vektor $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}$ pomoću vektora $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{OC}$.

(15 bodova)

2. Odredite vrijednosti parametra n tako da pravci

$$\frac{x-3}{n} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{-2},$$

i

$$\begin{aligned} x &= 1 - t \\ y &= -2 \\ z &= 4 + 3t \end{aligned}$$

budu okomiti.

(10 bodova)

3. Napišite jednadžbu ravnine koja je određena točkama $K(-1, -3, 3)$, $L(-2, 3, 0)$, $M(-1, 2, 1)$.

(15 bodova)

4. Riješite sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & -4 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -2 \end{array}$$

(15 bodova)

5. Nađite inverznu matricu matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(15 bodova)

6. Odredite svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene vektore matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

(15 bodova)

7. Definirajte pojam linearne nezavisnosti vektora. Navedite primjer tri linearno nezavisna vektora u $\mathbb{R}^3$ (u prostoru).

(15 bodova)

MATEMATIKA 1

(ponovljeni 1. kolokvij, 04.02.2005.)

1. Nađite kosinus kuta pri vrhu A trokuta s vrhovima $A(1, 1, 1)$, $B(1, 2, 3)$, $C(2, 3, 1)$.

(15 bodova)

2. Odredite vrijednosti parametra m tako da pravci

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{m} = \frac{z+3}{-1},$$

i

$$\begin{aligned} x &= 3 + 2t \\ y &= 4 + 5t \\ z &= -1 \end{aligned}$$

budu okomiti.

(10 bodova)

3. Napišite jednadžbu ravnine koja prolazi točkom $A(1, 0, 1)$ i okomita je na pravac koji prolazi točkama $B(0, 0, 0)$ i $C(1, 2, 3)$.

(15 bodova)

4. Riješite sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -2 \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & -4 \end{array}$$

(15 bodova)

5. Nađite inverznu matricu matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(15 bodova)

6. Odredite svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene vektore matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(15 bodova)

7. Ispitajte jesu li vektori $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (2, 3, 1)$ i $\vec{c} = (3, 1, 2)$ linearno nezavisni.

(15 bodova)

A

MATEMATIKA 1

(2. kolokvij, 17.12.2004.)

1. Nađite derivacije sljedećih funkcija:

a) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 1} \cdot e^{2x-1}$

b) $g(x) = \dfrac{\sin(2x) - \cos(2x)}{x}$

(dobivene derivacije ne treba sređivati)

(15 bodova)

2. Nađite jednadžbu tangente krivulje

$$x = 4\sqrt{t} + 3t, \qquad y = \frac{4}{t},$$

u točki s parametrom $t = 4$.

(10 bodova)

3. Čestica se giba po krivulji $y^2 = x^3$. Kad se nalazi u točki $T(1, -1)$ brzina promjene x-koordinate iznosi 2. Kolika je tada brzina promjene y-koordinate?

(10 bodova)

4. Nađite linearnu aproksimaciju funkcije $f(x) = \sqrt[4]{x}$ u okolini točke $x_0 = 16$ i pomoću nje približno izračunajte $\sqrt[4]{16.1}$.

(15 bodova)

5. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije

$$f(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}x^4.$$

(20 bodova)

6. Kako rastaviti broj 300 na sumu dva pozitivna broja a, b ($a + b = 300$) tako da umnožak prvog broja i kvadrata drugog (ab^2) bude maksimalan?

(15 bodova)

7. Definirajte pojam derivacije funkcije f u točki x. Na osnovu definicije izračunajte $f'(2)$ za $f(x) = 3x^2$.

(15 bodova)

B

MATEMATIKA 1

(2. kolokvij, 17.12.2004.)

1. Nađite derivacije sljedećih funkcija:

a) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 1} \cdot \ln(2x - 1)$

b) $g(x) = \dfrac{(\sin x)^2}{\cos(2x)}$

(dobivene derivacije ne treba sređivati)

(15 bodova)

2. Nađite jednadžbu tangente krivulje

$$x = \frac{4}{t}, \qquad y = 4\sqrt{t} + 3t,$$

u točki s parametrom $t = 4$.

(10 bodova)

3. Čestica se giba po krivulji $x = y^2 - y - 2$. Kad se nalazi u točki $T(-2, 1)$ brzina promjene x-koordinate iznosi 2. Kolika je tada brzina promjene y-koordinate?

(10 bodova)

4. Nađite linearnu aproksimaciju funkcije $f(x) = \sqrt[3]{x}$ u okolini točke $x_0 = 27$ i pomoću nje približno izračunajte $\sqrt[3]{26.9}$.

(15 bodova)

5. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije

$$f(x) = \frac{1}{3}x^4 - 2x^2.$$

(20 bodova)

6. Kako rastaviti broj 250 na umnožak dva pozitivna broja a, b ($ab = 250$) tako da zbroj prvog broja i kvadrata drugog ($a + b^2$) bude minimalan?

(15 bodova)

7. Definirajte pojam derivacije funkcije f u točki x. Na osnovu definicije izračunajte $f'(3)$ za $f(x) = 2x^2$.

(15 bodova)

A

MATEMATIKA 1

(2. kolokvij, 16.12.2005.)

1. Nađite derivacije sljedećih funkcija:

a) $y = x^2 \sin x + \dfrac{x}{1+x}$

b) $y = \left[\ln(x^2+1)\right]^2$

(dobivene derivacije ne treba sređivati)

(15 bodova)

2. Nađite derivaciju funkcije implicitno zadane jednadžbom

$$yx^2 = (x-y)^2 + x$$

u točki $x = 1$, $y = 2$.

(15 bodova)

3. Nađite tangentu na krivulju parameterski zadanu jednadžbama

$$x = t^3 + 1$$
$$y = (t-1)^2$$

u točki određenoj s parametrom $t = 2$.

(15 bodova)

4. Nađite linearnu aproksimaciju funkcije $f(x) = \sqrt[3]{x}$ u oko točke $x_0 = 27$ i pomoću nje približno izračunajte $\sqrt[3]{26}$.

(10 bodova)

5. Čestica se giba po krivulji $y^3 = x^2$. U trenutku kad se nalazi na mjestu $x = -1$ brzina promjene x-koordinate je $\frac{dx}{dt} = 2$. Kolika je tada brzina promjene y-koordinate?

(15 bodova)

6. Ispitajte tok i skicirajte kvalitativan graf funkcije

$$f(x) = \frac{4(3-x)}{(x-2)^2}.$$

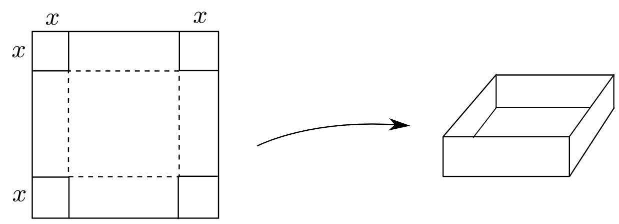
Koristite da je

$$f'(x) = \frac{4(x-4)}{(x-2)^3}, \quad \text{i } f''(x) = \frac{8(5-x)}{(x-2)^4}.$$

(20 bodova)

(okreni list)

7. Od kvadratnog lima stranice 6dm pravi se kutija bez poklopca tako da se na svakom vrhu isiječe kvadrat stranice x te se lim savije kako je pokazano na slici.



Kako odabrati x da dobivena kutija bude maksimalnog volumena?

(10 bodova)

B

MATEMATIKA 1

(2. kolokvij, 16.12.2005.)

1. Nađite derivacije sljedećih funkcija:

a) $y = x^3 \cos x + \dfrac{x+1}{x}$

b) $y = \sqrt{\sin 2x}$

(dobivene derivacije ne treba sređivati)

(15 bodova)

2. Nađite derivaciju funkcije implicitno zadane jednadžbom

$$xy^2 = (x+y)^2 - 5x$$

u točki $x = 1$, $y = 2$.

(15 bodova)

3. Nađite tangentu na krivulju parameterski zadanu jednadžbama

$$x = (t-1)^3$$
$$y = t^2 + 1$$

u točki određenoj s parametrom $t = 2$.

(15 bodova)

4. Nađite linearnu aproksimaciju funkcije $f(x) = \sqrt[3]{x}$ u oko točke $x_0 = 27$ i pomoću nje približno izračunajte $\sqrt[3]{28}$.

(10 bodova)

5. Čestica se giba po krivulji $y^2 = x^3$. U trenutku kad se nalazi na mjestu $y = -1$ brzina promjene y-koordinate je $\frac{dy}{dt} = 2$. Kolika je tada brzina promjene x-koordinate?

(15 bodova)

6. Ispitajte tok i skicirajte kvalitativan graf funkcije

$$f(x) = \frac{4(x-2)}{(x-1)^2}.$$

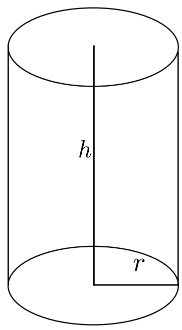
Koristite da je

$$f'(x) = \frac{4(3-x)}{(x-1)^3}, \quad \text{i } f''(x) = \frac{8(x-4)}{(x-1)^4}.$$

(20 bodova)

(okreni list)

7. Limenka u obliku valjka treba imati volumen od $V = 1000\text{cm}^3$. Kako odabrati dimenzije valjka r i h da utrošeni materijal (oplošje P) bude minimalan?



(10 bodova)

MATEMATIKA 1

(ponovljeni 2. kolokvij, 04.02.2005.)

1. Nađite derivacije sljedećih funkcija:

a) $f(x) = \sin 4x \cdot \ln(2x+1)$

b) $g(x) = \dfrac{3 + \cos 2x}{x}$

(dobivene derivacije ne treba sređivati)

(15 bodova)

2. Nađite jednadžbu tangente krivulje

$$x = 4\sqrt{t}, \qquad y = \frac{4}{t},$$

u točki s parametrom $t = 1$.

(10 bodova)

3. Nađite derivaciju funkcije implicitno zadane jednadžbom

$$y \ln y + x^2 = 1.$$

(15 bodova)

4. Nađite linearnu aproksimaciju funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ u okolini točke $x_0 = 16$ i pomoću nje približno izračunajte $\sqrt{16.1}$.

(15 bodova)

5. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije

$$f(x) = x^3 - x^2.$$

(20 bodova)

6. Nađite najveću i najmanju vrijednost funkcije $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x - 1$ na intervalu $[-1, 5]$.

(15 bodova)

7. Izračunajte

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \sin x}{x - \sin 2x}.$$

(10 bodova)

A # MATEMATIKA 1

(3. kolokvij, 31.01.2005.)

1. Izračunajte:

a) $\int (x-1)(x^2+x)dx$

b) $\frac{d}{dx}\left[\sqrt{\arcsin x} + \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}\right]$

(15 bodova)

2. Izračunajte površinu omeđenu krivuljama $y = x^2$, i $y = 2 - x$.

(15 bodova)

3. Izračunajte neprave integrale

a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

b) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(15 bodova)

4. Akceleracija tijela u trenutku t iznosi $a(t) = t + \sin t$. Ako je u trenutku $t = 0$ tijelo imalo brzinu $v(0) = -1$ i položaj $x(0) = 0$ odredite položaj $x(t)$ tijela u trenutku t.

(15 bodova)

5. Ispitajte tok i skicirajte kvalitativan graf funkcije

$$y = (x+1)e^{-x}.$$

(20 bodova)

6. Ako se u 100 godina raspadne 10% radioaktivne tvari, nađite njeno vrijeme poluraspada.

(15 bodova)

7. Nađite $\frac{d}{dx}[x\ln x - x]$. Na osnovu toga izračunajte $\int_1^e \ln x dx$.

(10 bodova)

B

MATEMATIKA 1

(3. kolokvij, 31.01.2005.)

1. Izračunajte:

a) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x}dx$

b) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left[\arcsin(x^2) + (\operatorname{arc\,tg} x)^2\right]$

(15 bodova)

2. Izračunajte površinu omeđenu krivuljama $y = -x^2$, i $y = x - 2$.

(15 bodova)

3. Izračunajte neprave integrale

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx$

b) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(15 bodova)

4. Akceleracija tijela u trenutku t iznosi $a(t) = 1 - \cos t$. Ako je u trenutku $t = 0$ tijelo imalo brzinu $v(0) = 0$ i položaj $x(0) = 1$ odredite položaj $x(t)$ tijela u trenutku t.

(15 bodova)

5. Ispitajte tok i skicirajte kvalitativan graf funkcije

$$y = xe^{-x+1}.$$

(20 bodova)

6. Vrijeme poluraspada radioaktivne tvari je 1000 godina. Ako je na početku bilo 1000 grama tvari koliko će se grama raspasti nakon 100 godina?

(15 bodova)

7. Nađite $\displaystyle\frac{d}{dx}\left[x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]$. Na osnovu toga izračunajte $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{arc\,tg} x dx$.

(10 bodova)

A

MATEMATIKA 1

(3. kolokvij, 27.01.2006.)

1. Izračunajte:

a) $\int (3\sin x + \frac{2}{1+x^2})dx$

b) $\frac{d}{dx}\left[e^{\arcsin x} + \operatorname{arc\,tg}(e^x)\right]$

c) $\frac{d}{dx}(1+x)^{1-x}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}$

(40 bodova)

2. Izračunajte površinu omeđenu krivuljama $y = x^2$, i $y = 1$.

(15 bodova)

3. Izračunajte nepravi integral

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx\,.$$

(15 bodova)

4. Brzina čestice u trenutku t iznosi $v(t) = 1 - t^2$. Ako je u trenutku $t = 0$ položaj čestice $x(0) = 1$ odredite položaj $x(t)$ čestice u trenutku $t = 2$.

(20 bodova)

5. Napišite opće rješenje $y = f(t)$ diferencijalne jednadžbe harmoničkog oscilatora

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0.$$

(10 bodova)

***Rezultati ispita**: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

B # MATEMATIKA 1

(3. kolokvij, 27.01.2006.)

1. Izračunajte:

a) $\int \left(2\cos x - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx$

b) $\frac{d}{dx}\left[\ln(\arcsin x) + \operatorname{arc\,tg}(\ln x)\right]$

c) $\frac{d}{dx}(1+x^2)^x$

d) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2}$

(40 bodova)

2. Izračunajte površinu omeđenu krivuljama $y = x^2$, $x = 1$ i $y = 0$.

(15 bodova)

3. Izračunajte nepravi integral

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx\,.$$

(15 bodova)

4. Brzina čestice u trenutku t iznosi $v(t) = t^2 - 1$. Ako je u trenutku $t = 0$ položaj čestice $x(0) = 1$ odredite položaj $x(t)$ čestice u trenutku $t = 2$.

(20 bodova)

5. Napišite opće rješenje $y = f(t)$ diferencijalne jednadžbe

$$\frac{dy}{dt} = ky.$$

(10 bodova)

***Rezultati ispita**: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

MATEMATIKA 1

(ponovljeni 3. kolokvij, 04.02.2005.)

1. Izračunajte:

a) $\int \frac{x^2+x}{x}dx$

b) $\frac{d}{dx}\left[\sqrt{\arcsin(x)} + (\operatorname{arc\,tg} x)^2\right]$

(15 bodova)

2. Izračunajte površinu omeđenu krivuljama $y = 1 - x^2$, i $y = -3$.

(15 bodova)

3. Izračunajte neprave integrale

a) $\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$

b) $\int_0^2 \frac{1}{x}dx$

(15 bodova)

4. Tijelo se giba po osi x. Brzina tijela u trenutku t iznosi $v(t) = 2t + \sin t$. Ako je u trenutku $t = 0$ tijelo imalo položaj $x(0) = 2$, odredite položaj tijela u trenutku t.

(10 bodova)

5. Odredite najveću i najmanju vrijednost funkcije $f(x) = \sin x + \cos x$ na intervalu $[0, \pi]$.

(10 bodova)

6. Ispitajte tok i skicirajte kvalitativan graf funkcije

$$y = (1-x)e^x.$$

(20 bodova)

7. Vrijeme poluraspada radioaktivne tvari je 500 dana. Ako je na početku bilo 1000 grama tvari koliko će se grama raspasti nakon 300 dana?

(15 bodova)

A

MATEMATIKA 1

(1. kolokvij, 11.11.2005.)

1. Vrhovi trokuta su točke $A(2,3,1)$, $B(1,1,1)$ i $C(1,2,3)$. Nađite kosinus kuta kod vrha B.

(15 bodova)

2. Za vektore $\vec{a} = (1,3,-2)$ i $\vec{b} = (-2,1,3)$ izračunajte $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$.

(10 bodova)

3. Napišite jednadžbu pravca koji prolazi točkom $A(2,-1,1)$ i okomit je na pravce

$$\begin{aligned} p_1 :&\quad \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2} \\ p_2 :&\quad x = 2+t \\ &\quad y = 3-t \\ &\quad z = 1-2t \end{aligned}$$

(20 bodova)

4. Riješite sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & = & -5 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 5 \end{array}$$

(15 bodova)

5. Odredite svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene vektore matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

(15 bodova)

6. Zadane su matrice A, B i C. Izračunajte produkt $A \cdot B$ i inverznu matricu C^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(15 bodova)

7. Ispitajte jesu li vektori

$$\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

linearno nezavisni ili linearno zavisni.

(10 bodova)

B

MATEMATIKA 1

(1. kolokvij, 11.11.2005.)

1. Vrhovi trokuta su točke $A(2,3,1)$, $B(1,1,1)$ i $C(1,2,3)$. Nađite kosinus kuta kod vrha C.

(15 bodova)

2. Za vektore $\vec{a} = (1,3,-2)$ i $\vec{b} = (-2,1,3)$ izračunajte $|3\vec{a} - 2\vec{b}|$.

(10 bodova)

3. Nađite jednadžbu ravnine koja sadrži točku $A(2,-1,1)$ i paralelna je s pravcima

$$p_1 : \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{-2}$$

$$p_2 : \quad \begin{aligned} x &= 1 + 3t \\ y &= 2 - t \\ z &= 3 + 2t \end{aligned}$$

(20 bodova)

4. Riješite sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & -5 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & -10 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 5 \end{array}$$

(15 bodova)

5. Odredite svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene vektore matrice

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(15 bodova)

6. Zadane su matrice A, B i C. Izračunajte produkt $A \cdot B$ i inverznu matricu C^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(15 bodova)

7. Ispitajte jesu li vektori

$$\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linearno nezavisni ili linearno zavisni.

(10 bodova)

PISMENI ISPITI IZ MATEMATIKE 1

B

MATEMATIKA 1

(16. Rujan, 2003.)

1. Deriviraj:

$$y = \sqrt{\operatorname{tg} 2x}.$$

2. Izračunaj y':

$$\ln(x - y) = x.$$

3. Nađi intervale rasta i pada funkcije:

$$y = \frac{x^2}{2^x}.$$

4. Izračunaj:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos 3x dx \ .$$

5. Izračunaj volumen tijela koje nastaje rotacijom dijela površine omeđene sa $x = y^2 - y$ i $x = 0$ oko y-osi.

6. Odredi prva tri člana Taylorova razvoja oko $x = 0$ za $y = x \ln(x + 1)$.

***Rezultati ispita**: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

B

MATEMATIKA 1

(01. Listopad, 2003.)

1. Deriviraj:

$$y = \cos x \sqrt{\sin 2x}.$$

2. Izračunaj y':

$$e^{x-y} = x + e^{-x}.$$

3. Nađi intervale rasta i pada funkcije:

$$y = -e^{-x} - \frac{1}{1+e^x}.$$

4. Izračunaj:

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 2x\cos(x^2)dx\ .$$

5. Krivulja $y = x^3$, $0 \leq x \leq 1$ rotira oko osi x. Nađite volumen dobivenog tijela.

6. Odredi prva tri člana Taylorova razvoja oko $x = 0$ za

$$y = \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

MATEMATIKA 1

(10. Veljače 2004.)

Napomena

Studenti koji su kolegij matematika 1 slušali ove godine (2003/2004) rješavaju zadatke 1–6. Ostali rješavaju zadatke 3–8.

1. Odredite parametarsku jednadžbu pravca koji je presjek ravnina

$$\begin{aligned} \Pi_1 \ldots \qquad & x + y + z - 1 = 0 \\ \Pi_2 \ldots \qquad & 2x - y + z + 4 = 0\ . \end{aligned}$$

2. Riješite sustav:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 6 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6\ . \end{aligned}$$

3. Izračunajte $\frac{dy}{dx}$:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \qquad y = \frac{\ln x}{x^2 + 1} + \sin x^2 \\ &\text{b)} \qquad y(t) = 3t^2 + 2\sqrt{t}, \quad x(t) = \frac{e^t}{2t + 1}\ . \end{aligned}$$

4. Odredite jednadžbu normale na krivulju $3y^2x + yx^2 = 9x + 1$ u točki $(1, -2)$.

5. Nacrtajte graf funkcije

$$y = \frac{x + 1}{x^2 - 4}\ .$$

6. Nađite površinu omeđenu krivuljama $y = -x^2 + x$ i $y = -x$.

7. Izračunajte

$$\int x^2 \ln x \, dx.$$

8. Razvijte u Taylorov red oko točke $x_0 = 0$ funkciju

$$y = (x + 1) \sin x.$$

MATEMATIKA 1

(19. Studeni, 2004.)

1. Izračunajte kut pod kojim se sijeku pravci

$$p_1 \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{-1} \qquad \text{i} \qquad p_2 \equiv \begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$$

2. Riješite sustav $A\vec{x} = \vec{b}$ ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

3. Derivirajte $y = x^2\sqrt{1 + \cos 2x}$.

4. Napišite jednadžbu tangente na krivulju

$$x = te^{t-1},\ y = (t^2+1)e^{t-1}$$

u točki $t_0 = 1$.

5. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = 3x^2 - x^3$.

6. Izračunajte površinu dijela ravnine omeđenog sa $y = -x$, $y = x^2 - 4x$.

MATEMATIKA 1

(15. Veljače 2005.)

1. Zadani su vrhovi trokuta $A(-1,2,0)$, $B(0,-2,-1)$, $C(1,0,1)$.
Izračunajte kut pri vrhu A trokuta.

2. Nađite svojstvene vrijednosti i odredite svojstvene vektore matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Derivirajte

$$y = (x+1)\,\mathrm{arc\,tg}(\sqrt{x}).$$

4. Napišite jednadžbu tangente na krivulju

$$x^2y + x + y^2 = 1$$

u točki $(1,0)$.

5. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije

$$y = \frac{x^2}{2(x-1)}.$$

6. Izračunajte površinu dijela ravnine omeđenog krivuljama $y = \sin x$ i $y = \pi x - x^2$.

***Rezultati ispita**: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

MATEMATIKA 1

(23. Lipanj, 2005.)

1. Napišite jednadžbu ravnine koja je određena točkama $A(3, -2, 0)$, $B(2, -1, 1)$, $C(-3, -1, 3)$.

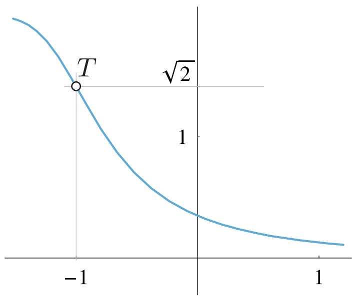
(20 bodova)

2. Nađite svojstvene vrijednosti i odredite svojstvene vektore matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(20 bodova)

3. Napišite jednadžbu tangente na krivulju $(1 + (2 + x)^5) \cdot y^2 = 4$ u točki $T(-1, \sqrt{2})$.



(20 bodova)

4. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = x^3 - 3x^2$.

(20 bodova)

5. Izračunajte površinu omeđenu s parabolom $y = 4 - x^2$ i pravcem $y = -12$.

(20 bodova)

***Rezultati ispita**: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

MATEMATIKA 1

(07. srpnja, 2005.)

1. Napišite jednadžbu pravca koji je okomit na ravninu u kojoj leže točke $A(3, -2, 0)$, $B(2, -1, 1)$, $C(-3, -1, 3)$ i koji prolazi kroz točku A.

(20 bodova)

2. Nađite inverznu matricu matrice

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(20 bodova)

3. Skicirajte graf funkcije

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2-1}.$$

(Potrebno je odrediti horizontalne i vertikalne asimptote. Nije potrebno proučavati tok funkcije pomoću derivacija.)

(20 bodova)

4. Izračunajte površinu omeđenu krivuljama $y = x^2 - 1$ i $y = 3$.

(20 bodova)

5. Nađite $\frac{d}{dx}[x \ln x - x]$. Iskoristite taj rezultat da biste izračunali $\int_1^e (x + \ln x)\, dx$.

(20 bodova)

***Rezultati ispita**: sljedeći radni dan u 13:00 sati*

MATEMATIKA 1

(25. studeni, 2005.)

1. Nađite jedinični vektor koji je okomit na vektore $\vec{a}$, $\vec{b}$:

$$\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}, \qquad \vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\,.$$

2. Nađite inverznu matricu (ako postoji) matrice

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Nađite derivaciju y' funkcije

$$x^3 - 2xy^2 + y^3 = 27$$

u točki $T(0, 3)$.

4. Izračunajte linearnu aproksimaciju funkcije $f(x) = \ln x$. Koristeći se tom aproksimacijom približno izračunajte $\ln 1.02$.

5. Izračunajte površinu lika koji je omeđen s:

$$y = -x^2 + 9, \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1\,.$$

Rezultati ispita: *sljedeći radni dan u 13:00 sati*

MATEMATIKA 1

(06.07.2006.)

1. Napišite jednadžbu ravnine koja prolazi točkama $A(0, 1, 3)$, $B(1, 0, 0)$ i $C(1, 1, 2)$. (15)

2. Matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

nađite inverznu. (20)

3. Derivirajte $y = x \cdot \sqrt{1 - \ln(x^2 + 3)}$. (15)

4. Napišite jednadžbu tengente na krivulju

$$x^2y^2 + xy + 2(y + 1) = 0$$

u točki $T(1, -1)$. (15)

5. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije

$$y = x \cdot e^{-x}.$$

(20)

6. Izračunajte

$$\int_0^1 (e^x - 1 + \sqrt{x})dx.$$

(15)

***Rezultati ispita**: sljedeći radni dan u 13:00 sati*