

# MATEMATIKA 1

(prva zadaća)

## Vektori i primjene

- U trokutu  $\triangle ABC$  točke  $M$  i  $N$  dijele stranicu  $\overline{AB}$  na tri jednaka dijela. Označite  $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$  i izrazite vektore  $\overrightarrow{CM}$  i  $\overrightarrow{CN}$  pomoću vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ .
- Zadani su vrhovi trokuta  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(3, 2, 1)$  i  $C(1, 4, 1)$ . Pokažite da je trokut  $ABC$  jednakostraničan.
- Zadani su radij-vektori vrhova trokuta:  $r_A = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ,  $r_B = \vec{i} + \vec{k}$  i  $r_C = \vec{j} + \vec{k}$ . Odredite radij-vektor težišta trokuta.
- Za vektor  $\vec{d} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ ,  $A(0, 0, 1)$ ,  $B(3, 2, 1)$ ,  $C(4, 6, 5)$  i  $D(1, 6, 3)$  odredite duljinu i napišite vektor  $\vec{a}_0$  (jedinični vektor vektora  $\vec{d}$ ).
- Odredite jednadžbu pravca koji prolazi točkom  $A(1, 2, 1)$  i
  - točkom  $B(2, -1, -3)$
  - ima vektor smjera  $\vec{s} = (3, 3, 4)$
  - paralelan je s pravcem određenim s  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+7}{0} = \frac{z+1}{3}$
  - okomit je na ravninu  $5x - 11y + z = 2$ .
- Odredite jednadžbu ravnine koja prolazi točkom  $A(1, 2, 3)$  i paralelna je vektorima  $\vec{p} = (-1, 0, 2)$  i  $\vec{q} = (2, 1, 3)$ .
- Izračunajte  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  i odredite kut koji zatvaraju vektori  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  ako je
  - $\vec{a} = (1, 2, 3)$ ,  $\vec{b} = (-2, 2, 1)$
  - $\vec{a} = (2, -1, 3)$ ,  $\vec{b} = (-2, 1, 1)$
  - $\vec{a} = (1, -2, -1)$ ,  $\vec{b} = (1, 0, 1)$ .
- Odredite kuteve trokuta  $\triangle ABC$  određenog vrhovima  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$ ,  $C(2, 1, 2)$ .
- Zadani su vektori  $\vec{a} = (0, 2, -2)$  i  $\vec{b} = (2, -2, 1)$ . Izračunajte skalarnu projekciju  $a_b$  vektora  $\vec{a}$  na vektor  $\vec{b}$ , te kut  $\angle(a, b)$  vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ .
- Odredite projekcije vektora  $\vec{d}$  na koordinatne osi, ako je  $\vec{d} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$ ,  $A(1, 0, 1)$ ,  $B(0, 1, -1)$ ,  $C(-2, 0, 1)$  i  $D(3, -2, 1)$ .
- Odredite  $m$  tako da vektori  $\vec{a} = (m, 4, -3)$  i  $\vec{b} = (1, -2, \frac{3}{2})$  budu
  - okomiti;
  - kolinearni.
- Izračunajte
  - $(5\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b})$ , ako je  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 3$  i  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .
  - $|2\vec{a} - 5\vec{b}|$ , ako je  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = 2$  i  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$ .
- Izračunajte vektorski produkt  $\vec{a} \times \vec{b}$  za

- a)  $\vec{d} = (2, 3, 5)$  i  $\vec{b} = (1, 2, 1)$ .
- b)  $\vec{d} = (1, 3, 7)$  i  $\vec{b} = (-2, -6, -14)$ .
14. Odredite jedinični vektor koji je okomit na vektore  $\vec{d}$  i  $\vec{b}$ , ako je
- a)  $\vec{d} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ .
- b)  $\vec{d} = \vec{AB}$ ,  $A(1, 0, 1)$ ,  $B(2, 1, 3)$ , a  $\vec{b}$  zatvara s osi  $y$  kut  $\frac{\pi}{3}$ , s osi  $z$  kut  $\frac{\pi}{4}$  i  $|\vec{b}| = 1$ , te sa osi  $x$  zatvara oštar kut.
15. Neka je  $\vec{d} = (1, 2, -1)$ . Odredite dva vektora  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$  tako da su vektori  $\vec{d}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  međusobno okomiti.
16. Za trokut  $\triangle ABC$  zadan s  $A(1, 1, 1)$ ,  $B(2, 3, 4)$ ,  $C(4, 3, 2)$  odredite
- a) površinu;      b) visinu na stranicu  $\overline{AB}$ .
17. Napišite jednadžbu ravnine koja sadrži točku  $A(0, 1, 2)$  i
- a) okomita je na pravac  $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z+2}{4}$ .
- b) sadrži pravac iz zadatka a).
18. Napišite jednadžbu ravnine koja sadrži točke  $A(0, 2, 0)$ ,  $B(1, 1, \frac{1}{3})$ ,  $C(-1, 1, 1)$ .
19. Odredite  $m$  i  $n$  tako da ravnina  $x - 2y + 7z = 4$  i pravac  $\frac{x-n}{m} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{n}$  budu okomiti.
20. Odredite  $m$  tako da ravnine  $x - 4y + z = 0$ ,  $mx + y - 11z = 1$  budu međusobno okomite.
21. Nadite probodište pravca  $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$  s ravninom  $x + 2y + z = 3$ .
22. Izračunajte  $\vec{d} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$  ako je
- a)  $\vec{d} = (2, -1, -1)$ ,  $\vec{b} = (1, 3, -1)$ ,  $\vec{c} = (1, 1, 4)$ .
- b)  $\vec{d} = (2, 0, 1)$ ,  $\vec{b} = (3, -1, 0)$ ,  $\vec{c} = (4, 2, 3)$ .
23. Ispitajte jesu li vektori  $\vec{d} = (2, 5, 7)$ ,  $\vec{b} = (1, 1, -1)$  i  $\vec{c} = (1, 2, 2)$  komplanarni. Ako jesu, izrazite vektor  $\vec{c}$  pomoću vektora  $\vec{d}$  i  $\vec{b}$ .
24. Ispitajte leže li točke  $A(5, 7, -2)$ ,  $B(3, 1, -1)$ ,  $C(9, 4, -4)$  i  $D(1, 5, 0)$  u istoj ravnini.
25. Vrhovi trostrane piramide su:  $A(2, 2, 2)$ ,  $B(4, 3, 3)$ ,  $C(4, 5, 4)$  i  $D(5, 5, 6)$ . Izračunajte
- a) volumen
- b) površinu baze  $\triangle ABC$
- c) visinu piramide spuštene na bazu  $\triangle ABC$ .

.....

# MATEMATIKA 1

(druga zadaća)

## Matrice, vektori

1. Ako je  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$  naći:

a)  $2A - 3B$ ,      b)  $(2A - 3B)^T$ ,      c)  $2A^T - 3B^T$ .

2. Za matrice iz prethodnog zadatka izračunajte  $AB^T$  i  $B^T A$ .

3. Za matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

naći  $AB$  i  $BA$ .

4. Za matrice  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$  naći  $AB$  i  $BA$ .

5. Izračunajte      a)  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$       b)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

## Rješavanje sustava linearnih jednadžbi

6. Riješite sustav:

$$2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6$$

$$3x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 4$$

$$9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2.$$

7. Odrediti  $a$  tako da sustav

$$x - y + az = 1$$

$$2x + 4y - 2z = 2$$

$$3x + 5z = 5$$

nema rješenja.

8. Riješi sustave:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

9. Dvije ravnine koje sadrže ishodište zadane su sa vektorima normala  $\vec{n}_1 = (1, 2, 3)$  i  $\vec{n}_2 = (0, 4, 5)$ . Presjek ovih ravnina je pravac. Odredite parametarsku jednadžbu toga pravca rješavanjem sustava jednadžbi dobivenog iz jednadžbi ovih ravnina.

10. Odredite  $\lambda \in \mathbb{R}$  tako da sustav

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_3 &= -3 \\ 2x_1 + \lambda x_2 + x_3 &= -2 \\ x_1 + 2x_2 - \lambda x_3 &= 1 \end{aligned}$$

- a) ima jedinstveno rješenje,  
b) nema rješenja,  
c) ima beskonačno rješenja.

### Inverzne matrice

11. Odredite inverzne matrice za:

a)  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$     b)  $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$     c)  $\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$     d)  $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$     e)  $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

12. Odredi  $A^{-1}$  za

a)  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$     b)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \frac{\pi}{6} & \sin \frac{\pi}{6} \\ 0 & -\sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{bmatrix}$     c)  $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

13. Odredi  $A_1^{-1}$  i  $A_2^{-1}$ , za  $A_1 = B^{-1}C^2$ ,  $A_2 = B + C^{-1}$ . Matrice  $B$  i  $C$  su zadane sa

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

### Svojstveni vektori i svojstvene vrijednosti

14. Odredite svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene vektore matrica:

a)  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$     b)  $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$     c)  $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$     d)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$     e)  $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

# MATEMATIKA 1

(treća zadaća)

## Derivacija funkcije. Tangenta na krivulju

1. Nađite derivacije sljedećih funkcija tj. nađite  $\frac{dy}{dx}$ :

a)  $y = x^6 - 3x^2 + 2x - 5$

b)  $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - \frac{x^4}{2}$

c)  $y = \frac{-5x^3}{a}$

d)  $y = \frac{\pi}{x} + \ln 2$

e)  $y = x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}$

f)  $y = 3x^{\frac{2}{3}} - x^{-3}$

g)  $y = \operatorname{tg} x - x \cos x$

h)  $y = \frac{2x + 3}{x^2 - 2x + 7}$

i)  $y = x \cdot 3^x$

j)  $y = e^x \cos x$

k)  $y = (x^2 + 3x - 1) \ln x$

l)  $y = 2x \sin x - (x^2 - 2) \cos x$

m)  $y = \frac{x^2}{\ln x}$

n)  $y = \frac{1}{x} + 2 \log_{10} x - \frac{\ln x}{x}$

2. Nađite jednadžbu tangente na krivulju

a)  $y = x^2 - 3x + 1$

b)  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

c)  $y = 2^x$

d)  $y = \sin \frac{\pi}{2} x$

u točki  $x = 3$ . Skicirajte krivulju i tangentu.

3. Nađite jednadžbu tangente na krivulju  $y = x^2 - 4$  koja je okomita na pravac  $y = -x + 1$ .

## Linearna aproksimacija i totalni diferencijal

4. Nađite linearnu aproksimaciju funkcije  $y = \sqrt[3]{x}$  za  $x = 1$ . Koristeći se tom aproksimacijom približno izračunajte  $\sqrt[3]{1.02}$ .

5. Nađite linearnu aproksimaciju funkcije  $y = e^x$  za  $x = 0$ . Koristeći se tom aproksimacijom približno izračunajte  $e^{-0.02}$ .

6. Za funkciju  $y = \cos x$  i za  $x = \frac{\pi}{6}$  i  $\Delta x = \frac{\pi}{36}$  nađite diferencijal (linearnu aproksimaciju prirasta).

7. Za funkciju  $y = \ln x$  i za  $x = 1$  i  $\Delta x = -0.5$  nađite diferencijal (linearnu aproksimaciju prirasta).

8. Položaj točke koja se giba po pravcu zadan je funkcijom  $x(t) = 3t - t^3$  ( $t$  u sekundama,  $x$  u centimetrima). Nađite brzinu i ubrzanje te točke u trenutku  $t = 2$ .

9. Položaj točke koja se giba po pravcu zadan je funkcijom  $x(t) = 2t - \frac{1}{2}t^4$  ( $t$  u sekundama,  $x$  u centimetrima). Nađite brzinu i ubrzanje te točke u trenutku  $t = 4$ .

## Lančano deriviranje

10. Nađite derivacije sljedećih funkcija:

a)  $y = \left(\frac{ax+1}{3}\right)^4$

b)  $y = (3+2x)^{10}$

c)  $y = \cos^3 x + \cos 3x$

d)  $y = \sin 3x + \sin^3 x$

e)  $y = \ln^2(2x^2+1)$

f)  $y = \sqrt{\ln(3x^2+4)}$

11. Nađite

a)  $y'(0)$  za  $y = 5e^{-x^2} + 2e^{2x+1}$

b)  $y'(0)$  za  $y = 4e^{x^2-2x} + \frac{1}{2}e^{x-1}$

c)  $y'(0)$  za  $y = \frac{1 - \sin 2x}{1 + \sin 2x}$

d)  $y'(\frac{\pi}{2})$  za  $y = \frac{1 - \cos 3x}{1 + \cos 3x}$

12. Jedna stranica pravokutnika ima konstantnu veličinu  $a = 2\text{cm}$ , a druga stranica  $b$  raste konstantnom brzinom  $4\text{cm/s}$ . Kojom brzinom rastu dijagonala i površina tog pravokutnika kada je  $b = 30\text{cm}$ ?

13. Polumjer kugle povećava se jednoliko brzinom od  $5\text{cm/s}$ . Kojom se brzinom povećava površina kugline plohe i volumen kugle u trenutku kada polumjer postane jednak  $50\text{cm}$ ?

14. Nađite derivaciju  $y'$  funkcije zadane s

a)  $\ln y + \frac{x}{y} = e$ ,

b)  $y^3 = \frac{x-y}{x+y}$ .

15. Izračunajte vrijednost  $y'$  funkcije  $(x+y)^3 = 2(x-y)$  za  $x = 3$  i  $y = -1$ . Napišite jednadžbu tangente na krivulju u točki  $T(3, -1)$ .

16. Izračunajte vrijednost  $y'$  funkcije  $y^2 = x + \ln \frac{y}{x}$  za  $x = 1$ ,  $y = 1$ . Napišite jednadžbu tangente na krivulju u točki  $T(1, 1)$ .

17. Nađite derivaciju  $y' = \frac{dy}{dx}$  funkcije zadane parametarski:

a)  $x = \frac{1}{1+t}$ ,  $y = \left(\frac{t}{1+t}\right)^2$

b)  $x = \frac{2at}{1+t^2}$ ,  $y = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2}$

18. Izračunajte  $y' = \frac{dy}{dx}$  za zadanu vrijednost parametra  $t$ , ako je

a)  $x = \frac{1}{1+t}$ ,  $y = \left(\frac{t}{1+t}\right)^2$ ,  $t = \frac{\pi}{2}$ ,

b)  $x = t \ln t$ ,  $y = \frac{\ln t}{t}$ ,  $t = 1$ .

19. Koristeći L'Hospitalovo pravilo izračunajte

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$ ,

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin 3x}$ ,

c)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}$ ,

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^3}$ .

# MATEMATIKA 1

(četvrta zadaća)

## Tok funkcije

1. Odredite intervale rasta i pada, te lokalne ekstreme sljedećih funkcija

a)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$

b)  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$

c)  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

d)  $f(x) = \frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$

e)  $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$

f)  $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2}$

g)  $f(x) = x \ln x$

h)  $f(x) = xe^x$

2. Odredite intervale zakretanja, te točke pregiba sljedećih funkcija

a)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$

b)  $f(x) = \frac{1}{x+3}$

c)  $f(x) = (1+x^2)e^x$

d)  $f(x) = x^2 \ln x$

3. Izračunajte sljedeće limese:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+3)(x-2)}{1-4x^2}$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x^4 + 1}}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x + 10}{x^2 - 25}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

f)  $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$

g)  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$

h)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{x-4}$

i)  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$

j)  $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x \cdot \ln(x-1)$

4. Ispitajte granično ponašanje sljedećih funkcija u okolini točaka prekida i “u beskonačnosti”.

a)  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$

b)  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4x + 3}$

c)  $f(x) = \frac{x^2 - x}{x + 1}$

d)  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$

e)  $f(x) = \frac{1}{1 - e^x}$

f)  $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

5. Ispitajte tok i skicirajte graf sljedećih funkcija

a)  $f(x) = x^3 - 3x^2$

b)  $f(x) = \frac{6x^2 - x^4}{9}$

c)  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

d)  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$

e)  $f(x) = x \sqrt{x+3}$

f)  $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x}$

g)  $f(x) = xe^{-x}$

h)  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

6. Odredite najveću i najmanju vrijednost funkcije na zadanom intervalu

a)  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$  za  $x \in [-1, 5]$

b)  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$  za  $x \in [-10, 12]$

c)  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$  za  $x \in [-5, 2)$

d)  $f(x) = \sqrt{x(10-x)}$  za  $x \in [1, 6)$

7. Odredite stranice pravokutnika čija je površina  $9\text{cm}^2$  tako da mu opseg bude minimalan.
8. Odredite stranice  $a, b$  pravokutnika čija je površina  $16\text{cm}^2$  tako da zbroj  $a + b$  bude minimalan.
9. Zadanoj kugli radijusa  $R$  treba upisati valjak najvećeg volumena. Koje su dimenzije tog valjka?
10. Zadanoj kugli radijusa  $R$  treba upisati stožac najvećeg volumena. Koje su dimenzije tog stošca?

# MATEMATIKA 1

(peta zadaća)

1. Izračunajte neodređene integrale:

a)  $\int 2(3x - 1)^2 dx$

b)  $\int (1 + x)(2 - x + x^2) dx$

c)  $\int \frac{x^4 + 2x^3 + 7}{\sqrt[3]{x}} dx$

d)  $\int \left( \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 2x^4 + \frac{x}{\sqrt[5]{x^2}} \right) dx$

e)  $\int \frac{5}{\cos^2 x} dx$

f)  $\int (\sin x + 5 \cos x) dx$

g)  $\int (5^x + 5x) dx$

h)  $\int (e^x + x^2) dx$

2. Nadite funkciju čija je derivacija  $y' = 7x + 4$  ako je za  $x = 2$  vrijednost funkcije 16.

3. Nadite funkciju čija je derivacija  $y' = 3x^2 + 5$  ako je za  $x = 1$  vrijednost funkcije 9.

4. Brzina čestice koja se giba duž osi  $x$  u trenutku  $t$  iznosi  $v(t) = 3t^2 + 4$ . Odredite položaj čestice u proizvoljnom trenutku  $t$  ako je u trenutku  $t = 2$  čestica u točki  $x = 20$ .

5. Brzina čestice koja se giba duž osi  $x$  u trenutku  $t$  iznosi  $v(t) = t^2 - 8t + 2$ . Odredite položaj čestice u proizvoljnom trenutku  $t$  ako je u trenutku  $t = 4$  čestica u točki  $x = 24$ .

6. Ubrzanje čestice koja se giba po osi  $x$  iznosi  $a(t) = 12t^2 + 6t$ . Odredite položaj i brzinu čestice u proizvoljnom trenutku ako je u trenutku  $t = 1$  brzina  $v = 8$  i položaj  $x = 8$ .

7. Ubrzanje čestice koja se giba po osi  $x$  iznosi  $a(t) = -6t + 18$ . Odredite položaj i brzinu čestice u proizvoljnom trenutku ako je u trenutku  $t = 0$  brzina  $v = 24$  i položaj  $x = 15$ .

8. Izračunajte određene integrale:

a)  $\int_{-1}^2 (x^2 + 2x + 1) dx$

b)  $\int_{-1}^0 (x^3 + 2x) dx$

c)  $\int_1^4 \left( \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$

d)  $\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx$

e)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx$

f)  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x} dx$

9. Izračunajte površine likova koji su omeđeni s

a)  $x + 2y - 4 = 0, y = 0, x = -3, x = 2$

b)  $x - 2y + 4 = 0, x + y - 5 = 0, y = 0$

c)  $y = x^2, y = 0, x = 2, x = 3$

d)  $y = -x^2 + 4, y = 0$

e)  $y = x^2, y = 2x$

f)  $7x^2 - 9y + 9 = 0, 5x^2 - 9y + 27 = 0$

g)  $y = \sin x, y = x^2 - \pi x$

h)  $y = \sin x, y = \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

10. Izračunajte nepravne integrale:

a)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

b)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2 x}$

c)  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3}$

d)  $\int_{-1}^1 \frac{2}{x} dx$

e)  $\int_1^{\infty} \frac{3}{x} dx$

f)  $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2}$

g)  $\int_{-\infty}^1 3^x dx$

h)  $\int_0^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^x dx$

# MATEMATIKA 1

(šesta zadaća)

1. Poznavajući graf funkcije  $y = \sin x$  skicirajte grafove funkcija:

a)  $y = 3 \sin \frac{x}{2}$ ;

b)  $y = \frac{3}{2} \sin 2x$ ;

c)  $y = \frac{1}{2} \sin(3x + \pi)$ ;

d)  $y = 2 \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ .

2. Nađite najveću i najmanju vrijednost funkcija na zadanim intervalima:

a)  $f(x) = x - \sin x$ ,  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ;

b)  $f(x) = \sin x - \cos x$ ,  $x \in [0, \pi]$ .

3. Odredite pomoću trigonometrijske kružnice:

a)  $\arccos(\cos(-\frac{\pi}{4}))$ ;

b)  $\arcsin(\sin \frac{3\pi}{4})$ .

4. Nađite derivacije funkcija:

a)  $f(x) = \sqrt{\arcsin x} - (\arctg x)^2$ ;

b)  $f(x) = \sqrt{\arctg x} + \frac{1}{\arcsin x}$ .

5. Pod kojim kutem grafovi funkcija: a)  $y = \sqrt{3} \cdot \sin \frac{x}{3}$ ; b)  $y = 3 \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}}$  sijeku  $x$ -os u ishodištu?

6. Izračunajte integrale

a)  $\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ ,

b)  $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ .

7. Izračunajte nepravne integrale

a)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ ,

b)  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ .

8. Poznavajući grafove funkcija  $y = e^x$  i  $y = \ln x$  skicirajte grafove funkcija

a)  $y = \ln(-x)$

b)  $y = -e^x$

c)  $y = e^x - 1$

d)  $y = \ln(x+1)$

9. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcija:

a)  $y = x^2 \ln x$ ,

b)  $y = x^2 e^{-x}$ .

10. Primjenom prethodnog logaritmiranja derivirajte funkcije:

a)  $y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2} \sqrt{(x+3)^3}}$ ;

b)  $y = \frac{(x-2)^9}{\sqrt{(x^2+1)^5} \cdot (x-3)^3}$ ;

c)  $y = x^{\sin x}$ ;

d)  $y = (\cos x)^x$ .

11. Vrijeme poluraspada radija je  $T = 1690$  godina. Koliko će ostati od 1 grama radija nakon 10000 godina?

12. 20% radioaktivnog elementa raspadne se u godinu dana. Koliko je vrijeme poluraspada tog elementa?

# MATEMATIKA 1

(dodatni zadaci sa sustavima)

Riješite sustave Gaussovom metodom:

1.\*

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

2.

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

FiXm  
ruka: s  
dva