

MATEMATIKA 2 – ZADAĆA

(Svibanj, 2004.)

Zadaća 3

1. Izračunajte $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ za sljedeće funkcije:

a) $z = 4x^2 - 2y + 7x^4y^5$,

b) $z = \frac{x+y}{x-y}$.

2. Izračunajte $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ i $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ za sljedeće funkcije:

a) $z = e^x \cos y$,

b) $z = 4x^2 - 8xy^4 + 7x^5 - 3$.

3. Nađite jednadžbu tangencijalne ravnine na zadanu plohu $z = z(x, y)$ u zadanoj točki $T(x, y)$

a) $z = 4x^3y^2 + 2y$ u $T(1, -2)$,

b) $z = xe^{-y}$ u $T(1, 0)$.

4. Izračunajte totalni diferencijal funkcije $z = z(x, y)$ u zadanoj točki $T(x, y)$ za zadani pomak Δx i Δy :

a) $z = x^2 + 2xy - 4x$ u $T(1, 2)$, $\Delta x = 0.01$, $\Delta y = 0.04$,

b) $z = \frac{x+y}{xy}$ u $T(-1, -2)$, $\Delta x = -0.02$, $\Delta y = -0.04$.

5. Nađite gradijent funkcije $z = z(x, y)$ u zadanoj točki $T(x, y)$

a) $z = (x^2 + xy)^2$ u $T(-1, -1)$,

b) $z = y \ln x + y$ u $T(-3, 4)$.

6. Izračunajte približno $\sqrt{(3,95)^2 + (3,01)^2}$, znajući da je $\Delta z \doteq dz$.

7. Nađite usmjerenu derivaciju funkcije $z = z(x, y)$ u zadanoj točki $T(x, y)$ i zadanom smjeru \vec{s} :

a) $z = 4x^3y^2$ u $T(2, 1)$, $\vec{s} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$,

b) $z = y^2 \ln x$ u $T(1, 4)$, $\vec{s} = -3\vec{i} + 3\vec{j}$.

8. Nađite lokalne ekstreme sljedećih funkcija:

a) $z = 3x^2 + 2xy + y^2$,

b) $z = x^3 - 3xy - y^3$.

9. Nađite globalne ekstreme sljedećih funkcija na navedenim područjima:

a) $z = xy - x - 3y$ na trokutu s vrhovima $A(0, 0)$, $B(0, 4)$, $C(5, 0)$,

b) $z = x^2 + 2y^2 - x$ na krugu $x^2 + y^2 \leq 4$.

10. Među svim paralelogramima kojima je opseg $s = 4$ odredite onaj koji ima maksimalnu površinu. Uputa: površina paralelograma sa stranicama a i b koje tvore kut α iznosi $P = ab \sin \alpha$.

11. Ispitivanjem globalnog ekstrema nađite udaljenost točke $T(-1, 3, 2)$ od ravnine $x - 2y + z = 4$.

12. Koristeći Lagrangeove multiplikatore nađite uvjetne globalne ekstreme:

a) $z = xy$ uz uvjet $4x^2 + 8y^2 = 16$,

b) $z = x^2 - y$ uz uvjet $x^2 + y^2 = 25$.

* * *

Zadaća 4

13. Izračunajte:

a) $\int_1^3 \left(\int_0^2 (2x - 4y) dy \right) dx$,

b) $\int_0^{\ln 3} \left(\int_0^{\ln 2} e^{x+y} dy \right) dx$,

c) $\int_{-1}^1 \left(\int_{-x^2}^{x^2} (x^2 - y) dy \right) dx$.

14. Zamijenite redosljed integriranja:

a) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy dx$,

b) $\int_0^2 \int_1^{e^y} f(x, y) dx dy$,

c) $\int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx dy$.

15. Izračunajte zadani integral po zadanom području P :

a) $\iint_P x \sqrt{1 - x^2} dx dy$, P kvadrat s vrhovima $(0, 2)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(0, 3)$,

b) $\iint_P \cos(x + y) dx dy$, za $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{3}$,

c) $\iint_P 6xy dx dy$, P omeđeno s $y = x$, $y = 0$, $x = \pi$,

d) $\iint_P (x - 1) dx dy$, P omeđeno s $y = x$, $y = x^3$,

e) $\iint_P xy dx dy$, P omeđeno s $y = \sqrt{2x}$, $y = 0$ i pravcem koji prolazi točkama $(0, 4)$ i $(4, 0)$.

16. Izračunajte:

a) volumen ispod ravnine $z = 2x + y$ nad područjem $3 \leq x \leq 5, 1 \leq y \leq 2$,

b) volumen ispod ravnine $z = 5 - 2x - y$ u 1. kvadrantu,

c) volumen omeđen s $x^2 + y^2 = 9, z = 0$ i $z = 3 - x$,

d) volumen omeđen s $z = x^2 + 3y^2, z = 0, y = x^2$ i $y = x$.

17. Izračunajte upotrebom dvostrukog integrala površinu omeđenu s:

a) $x + y = 5, x = 0, y = 0$,

b) $y = \sin x, y = \cos x$ za $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

18. Izračunajte:

a) $\int_{-1}^1 \int_0^2 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$,

b) $\int_0^2 \int_{-1}^{y^2} \int_1^z (yz) dx dz dy$,

c) $\int_1^3 \int_x^{x^2} \int_0^{\ln z} (xe^y) dy dz dx$.

19. Zamijenite redoslijed integriranja, tj. izrazite integral ekvivalentnim integralom u kojem je izvršena integracija najprije po z -u, pa po y -u i na kraju po x -u.:

a) $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-z^2}} \int_0^{\sqrt{9-y^2-z^2}} f(x, y, z) dx dy dz$,

b) $\int_0^4 \int_0^2 \int_0^{x/2} f(x, y, z) dy dz dx$.