

MATEMATIKA 3

(1. prosinca 2007.)

Sadržaj

Podloge za vježbe	1
Vjerojatnost i statistika	1
Vjerojatnost – 1	2
Slučajne varijable	5
Tablica normalne razdiobe Φ	8
Tablica normalne razdiobe Φ_0	9
Normalna razdioba	10
Normalna razdioba – dodatni zadaci	11
Statistika	12
Vektorska analiza	14
Vektorska analiza – 1	14
Vektorska analiza – 2	15
Rješenja zadataka	17

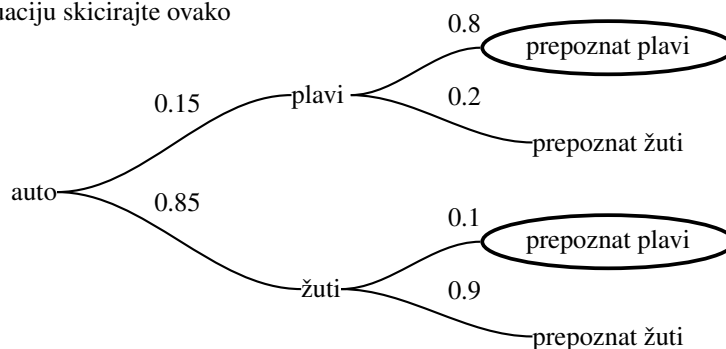
MATEMATIKA 3

(Vjerojatnost – 1)

Za svaki zadatak treba napisati elementarne ishode – popisati ih ili skicirati stablo.

- Bacamo jednu kocku. Kolika je vjerojatnost da se na kocki pojavi
 - broj veći od 5
 - paran broj
 - broj djeljiv s 3
 - broj 7
 - broj 2 ili broj 5
 - paran broj veći od 2
- U kutiji je 10 kuglica koji su označeni brojevima od 1 do 10. Izvlači se jedna kuglica. Kolika je vjerojatnost da je izvučena kuglica s brojem
 - manjim od 3
 - neparnim
 - 7
 - djeljivim s 3
 - kvadratom prirodnog broja
 - parnim i djeljivim s 3
- Bacaju se 2 kocke. Kolika je vjerojatnost da je razlika brojeva na 2 kocke (veći – manji)
 - veća od 3
 - jednaka 2
 - manja od 4
 - jednaka 0
- Baca se kocka i izvlači jedna kuglica iz kutije s 5 kuglica numeriranih s 1,2,3,4,5. Kolika je vjerojatnost da je razlika brojeva na kocki i kuglici (veći – manji)
 - veća od 3
 - jednaka 2
 - manja od 4
 - jednaka 0
- Jedan je taksi prouzročio prometnu nesreću i pobjegao s mjesta nesreće. U gradu postoje dvije taksi kompanije, Žuta i Plava. 85% su žuti, a 15% plavi taksiji. Svjedok kaže da je vidio plavi taksi. Sud je testirao pouzdanost svjedoka pod istim uvjetima koji su vladali u noći nesreće i utvrdio da je svjedok korektno identificirao žuti taksi u 90% slučajeva, a plavi u 80%. Kolika je vjerojatnost da je taksi koji je svjedokinja vidjela bio plave boje ako svjedok tvrdi da je vidio plavi taksi?

Uputa. Graf za ovu situaciju skicirajte ovako



6. Pacijentici je ustanovljena kvržica na dojci. Učestalost zloćudnih tvorevina među ženama njezine dobi uz iste simptome i istu obiteljsku situaciju je 1%. Liječnik traži mamografiju i dobiva izvještaj da je tvorevina zloćudna, tj. mamografski nalaz je pozitivan. Poznato je da je pouzdanost mamografa takva da je točan 80% kod zloćudnih tvorevina (dakle pozitivan je u 80% zloćudnih slučajeva) i 90% kod dobroćudnih (dakle negativan je u 90% dobroćudnih slučajeva). Kolika je vjerojatnost da pacijentica doista ima zloćudnu bolest (pod uvjetom da je njezin mamograf pozitivan)?
7. Pouzdanost testa na bolest B je 90% (test griješi u 10% slučajeva kod zdravih i u 10% slučajeva kod bolesnih osoba). Učestalost bolesti B u općoj populaciji je 1%.
- Kolika je vjerojatnost da zdrava osoba ima pozitivan test?
 - Kolika je vjerojatnost da slučajno odabrana osoba ima pozitivan test?
 - Koja je vjerojatnost da osoba koja je pozitivna na test boluje od bolesti B ?
 - Koliko je puta porasla vjerojatnost da osoba boluje od bolesti B nakon što je njen test pozitivan?
8. Baca se kocka. Ako padne broj 3 ili 4 izvlači se jedna kuglica iz prve kutije u kojoj se nalaze 3 bijele i 2 crne kuglice, a inače se kuglica izvlači iz druge kutije u kojoj su 1 bijela i 4 crne kuglice. Kolika je vjerojatnost
- da je izvučena bijela kuglica
 - ako je izvučena bijela kuglica da je izvučena iz prve kutije
9. Baca se kocka. Ako padne broj 1 ili 6 izvlači se jedna kuglica iz prve kutije u kojoj se nalaze 3 bijele i 2 crne kuglice, a inače se kuglica izvlači iz druge kutije u kojoj su 1 bijela i 4 crne kuglice. Kolika je vjerojatnost
- da je izvučena crna kuglica
 - ako je izvučena crna kuglica da je izvučena iz prve kutije
10. Bacamo novčić 2 puta. Ako je (u ta dva bacanja) pala jedna glava bacimo novčić još jednom. Ako nije pala nijedna glava bacimo još dva puta. Ako su pale dvije glave više ne bacamo novčić. Koja je vjerojatnost
- da smo točno tri puta bacali novčić;
 - da je u zadnjem bacanju pala glava
 - da je pala barem jedna glava
 - da je prvo pala glava ako znamo da je u zadnjem bacanju pala glava

- 11.* U sljedećoj tablici prikazana je podjela radnih mjesta po spolu i po odjelima u tvrtki ABC.

	Muškaraca	Žena
Uprava	7	3
Prodaja	10	11
Proizvodnja	25	40

Odredite vjerojatnost da je slučajno odabrana osoba

- član uprave;
 - član uprave ako znamo da je odabrana žena;
 - radnik u proizvodnji;
 - radnik u proizvodnji ako znamo da je odabrana žena;
 - radnik u proizvodnji ili žena;
 - žena ako znamo da je odabran član uprave.
- 12.* Košarkaši A, B, C i D gađaju slobodna bacanja s postotkom šuta redom 90%, 75%, 60% i 50%. Koja je vjerojatnost da
- slučajno odabrani igrač pogodi slobodno bacanje?
 - slučajno odabrani igrač promaši slobodno bacanje?
 - da je gađao igrač A ako znamo da je pogođeno slobodno bacanje?
 - da je gađao igrač D ako znamo da je slobodno bacanje promašeno?
- 13.* Strijelci A, B i C gađaju jabuku s vjerojatnostima pogotka redom 30%, 15% i 10%. Koja je vjerojatnost da

- a) slučajno odabrani strijelac pogodi jabuku?
- b) slučajno odabrani strijelac promaši jabuku?
- c) da je gađao strijelac A ako znamo da je jabuka pogođena?
- d) da je gađao strijelac C ako znam da jabuka nije pogođena?
- e) kolika je vjerojatnost iz c) ako strijelac A popravi svoje gađanje na 50%?

MATEMATIKA 3

(Slučajne varijable)

U zadacima za zadanu slučajnu varijablu nađite funkciju vjerojatnosti.

- Bacaju se dvije kocke. Odredite razdiobu za slučajnu varijablu Z koja računa zbroj na kockama. Kolika je vjerojatnost da se dobije suma brojeva veća od 10 ili djeljiva sa 6?
- Bacaju se dvije kocke. Odredite razdiobu za slučajnu varijablu R koja računa razliku na kockama (veći – manji). Izračunajte očekivanje ER i varijancu $\text{Var } R$.
- Bacamo dvije kocke. Slučajna varijabla X je veći od dva broja na kockicama. Naći $pr(X > 4)$, očekivanje i varijancu od X .
- Bacaju se dvije kocke. Slučajna varijabla X računa zbroj vrijednosti na kockama. Odredite razdiobu od X te izračunajte očekivanje EX i varijancu $\text{Var } X$.
- Novčić se baca 3 puta. Slučajna varijabla X je broj pojavljivanja glave. Koliko je očekivanje i varijanca?
- Izračunajte EX i $\text{Var } X$ za diskretnu varijablu X s razdiobom

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned} X &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \\ X - EX &\sim \begin{pmatrix} 1 - \frac{11}{6} & 2 - \frac{11}{6} & 3 - \frac{11}{6} & 5 - \frac{11}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{7}{6} & \frac{19}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \\ (X - EX)^2 &\sim \begin{pmatrix} \frac{25}{36} & \frac{1}{36} & \frac{49}{36} & \frac{361}{36} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow E(X - EX)^2 &= \frac{47}{6} \approx 1.3 \end{aligned}$$

□

- Strijelac pogađa metu s vjerojatnošću $p = 0.8$. Ima dva metka. Kada ih potroši dobije još onoliko metaka koliko je imao pogodaka u prvoj seriji i također ih ispaljuje u metu. Kolika je vjerojatnost da je cilj pogođen? Naći razdiobu broja pogodaka X , očekivanje i varijancu od X .
- Košarkaš pogađa slobodno bacanje s vjerojatnošću 0.75. Slučajna varijabla X je broj bacanja do prvog pogotka. Skicirajte razdiobu od X .
- Strijelac gađa metu (sve dok ne pogodi). Ima pravo na tri pokušaja. Vjerojatnost pogotka (u svakom pokušaju) je $p = 0.8$. Za pogodak u prvom pokušaju dobiva 100 bodova. Za pogodak u drugom pokušaju 50, a u trećem 25 bodova. Slučajna varijabla X je broj bodova koje je strijelac osvojio. Izračunajte:
 - očekivanje EX
 - varijancu $\text{Var } X$
- Slučajna varijabla ima gustoću razdiobe $f(x) = \frac{k}{1+x^2}$ na cijelom skupu \mathbb{R} . Odrediti k , naći očekivanje i varijancu.

11. Neka je $f(x)$ funkcija vjerojatnosti slučajne varijable X , zadana s $\sin x$ na intervalu $(0, \pi)$, a 0 inače. Odredite parametar a , izračunati μ , σ i $p(\frac{\pi}{4} \leq X \leq \frac{\pi}{2})$.
12. Kockica se baca 2 puta. Slučajna varijabla X je broj pojavljivanja 6-ice. Kolika je vjerojatnost da pojavi barem jedna 6-ica?
13. Iz kutije koja sadrži 7 bijelih i 3 crne kuglice vade se 4 kuglice. Slučajna varijabla X je broj bijelih kuglica. Kolika je vjerojatnost da su izvađene točno 2 bijele kuglice?
14. Bacamo dvije kocke. Slučajna varijabla X je apsolutna vrijednost razlike brojeva na kockama. Naći $pr(0 \leq X < 4)$, očekivanje i standardnu devijaciju.
- 15.* Na putu kretanja automobila nalaze se redom 3 semafora. Na svakom se semaforu s vjerojatnošću 0.3 pojavljuje crveno svjetlo i s 0.7 zeleno svjetlo. Slučajna varijabla X je broj semafora do prvog zaustavljanja. Kolika je vjerojatnost da se nije zaustavio? Naći očekivanje.
- 16.* Bacamo 2 kockice sve dok ne padnu 2 šestice. Slučajna varijabla X je broj bacanja kockica.
17. Iz kutije koja sadrži 7 bijelih i 3 crne kuglice vadimo kuglice s vraćanjem dok ne izvadimo prvu bijelu. Slučajna varijabla X je broj izvlačenja.
18. Funkcija vjerojatnosti diskretne slučajne varijable X je:

X	pr_X
-1	0.1
0	0.1
1	0.5
2	0.2
4	0.1

Izračunajte $pr(X \leq 1)$ i $pr(\frac{1}{2} < X \leq 2)$, te očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju.

19. U šeširu je 5 koverti. Dvije su prazne, a u tri se nalazi po 1000kn. Izvlačimo kovertu po kovertu, bez vraćanja, sve dok ne izvučemo praznu. Neka slučajna varijabla X predstavlja broj izvučenih koverti, a varijabla Y izvučenu sumu. Naći očekivani broj izvučenih koverti, odnosno očekivanu izvučenu sumu. Kolika je vjerojatnost da dobijemo 3000kn?
20. Pretpostavimo da izlazite na ispit dok ga ne položite, svaki put s vjerojatnošću uspjeha 0.6. Neka slučajna varijabla X predstavlja broj izlazaka na ispit (maksimalno 3). Izračunati očekivanje i varijancu od X .
21. Strijelac gađa metu 3 puta, svaki put pogađa s vjerojatnošću $\frac{2}{3}$. Neka slučajna varijabla X predstavlja broj pogodaka. Naći očekivanje i varijancu/standardnu disperziju za tu varijablu. Koja je vjerojatnost da je:
- pogodio cilj točno 2 puta;
 - pogodio cilj manje od 2 puta;
 - pogodio cilj.
22. Gustoća vjerojatnosti razdiobe slučajne varijable X je

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-x} & x \in (-1, 1) \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Naći k , skicirati njen graf funkcije gustoće i izračunati $pr(X > 1/2)$ i $pr(-1/2 < X < 1/2)$

23. Slučajna varijabla X ima uniformnu razdiobu na intervalu $(-1, 3)$. Naći gustoću razdiobe, skicirati njen graf i izračunati $pr(X > 1/2)$ i $pr(0 < X < 1)$, te očekivanje i standardnu devijaciju za tu varijablu.

24. Neka je X duljina života elektronske cijevi (u satima). Gustoća razdiobe slučajne varijable X je

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x^3} & 1500 < x \leq 2500 \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Odrediti a . Kolika je vjerojatnost da cijev živi dulje od 2000 sati? Kolika je očekivana vrijednost za X ?

25. Elektronski uređaj ima duljinu života X u 1000 sati čija je gustoća razdiobe

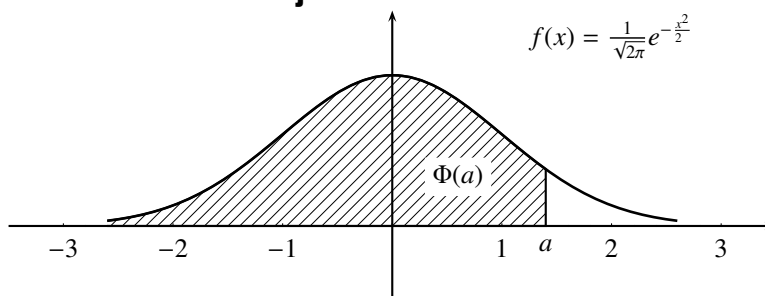
$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Trošak proizvodnje 1 uređaja je 20Kn. Proizvođač prodaje uređaje po 50Kn i garantira povrat novca za $X \leq 1$. Naći očekivanu zaradu.

MATEMATIKA 3

(Tablica normalne razdiobe Φ)

Površine ispod normalne krivulje

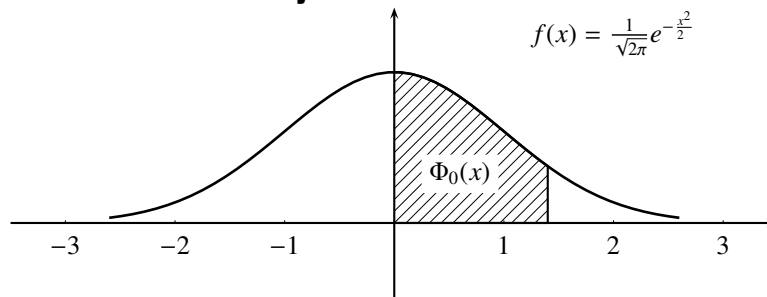


x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
-3.0	0.001	-1.5	0.067	0.0	0.5	1.5	0.933
-2.9	0.002	-1.4	0.081	0.1	0.54	1.6	0.945
-2.8	0.003	-1.3	0.097	0.2	0.579	1.7	0.955
-2.7	0.003	-1.2	0.115	0.3	0.618	1.8	0.964
-2.6	0.005	-1.1	0.136	0.4	0.655	1.9	0.971
-2.5	0.006	-1.0	0.159	0.5	0.691	2.0	0.977
-2.4	0.008	-0.9	0.184	0.6	0.726	2.1	0.982
-2.3	0.011	-0.8	0.212	0.7	0.758	2.2	0.986
-2.2	0.014	-0.7	0.242	0.8	0.788	2.3	0.989
-2.1	0.018	-0.6	0.274	0.9	0.816	2.4	0.992
-2.0	0.023	-0.5	0.309	1.0	0.841	2.5	0.994
-1.9	0.029	-0.4	0.345	1.1	0.864	2.6	0.995
-1.8	0.036	-0.3	0.382	1.2	0.885	2.7	0.997
-1.7	0.045	-0.2	0.421	1.3	0.903	2.8	0.997
-1.6	0.055	-0.1	0.46	1.4	0.919	2.9	0.998

MATEMATIKA 3

(Tablica normalne razdiobe Φ_0)

Površine ispod normalne krivulje



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0.1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0.2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0.3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0.4	15542	15909	16275	16640	17003	17364	17724	18082	18438	18793
0.5	19146	19497	19846	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0.6	22574	22906	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25174	25490
0.7	25803	26114	26423	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28523
0.8	28814	29103	29389	29673	29954	30233	30510	30785	31057	31326
0.9	31594	31858	32121	32381	32639	32894	33147	33397	33645	33891
1.	34134	34375	34613	34849	35083	35314	35542	35769	35992	36214
1.1	36433	36650	36864	37076	37285	37492	37697	37900	38100	38297
1.2	38493	38686	38876	39065	39251	39435	39616	39795	39972	40147
1.3	40320	40490	40658	40824	40987	41149	41308	41465	41620	41773
1.4	41924	42073	42219	42364	42506	42647	42785	42921	43056	43188
1.5	43319	43447	43574	43699	43822	43942	44062	44179	44294	44408
1.6	44520	44630	44738	44844	44949	45052	45154	45254	45352	45448
1.7	45543	45636	45728	45818	45907	45994	46079	46163	46246	46327
1.8	46407	46485	46562	46637	46711	46784	46855	46925	46994	47062
1.9	47128	47193	47257	47319	47381	47441	47500	47558	47614	47670
2.	47725	47778	47830	47882	47932	47981	48030	48077	48123	48169
2.1	48213	48257	48299	48341	48382	48422	48461	48499	48537	48573
2.2	48609	48644	48679	48712	48745	48777	48808	48839	48869	48898
2.3	48927	48955	48983	49009	49035	49061	49086	49110	49134	49157
2.4	49180	49202	49224	49245	49265	49285	49305	49324	49343	49361
2.5	49379	49396	49413	49429	49445	49461	49476	49491	49506	49520
2.6	49533	49547	49560	49573	49585	49597	49609	49620	49631	49642
2.7	49653	49663	49673	49683	49692	49702	49711	49719	49728	49736
2.8	49744	49752	49759	49767	49774	49781	49788	49794	49801	49807
2.9	49813	49819	49825	49830	49835	49841	49846	49851	49855	49860
3.	49865	49869	49873	49877	49881	49885	49889	49893	49896	49899
3.1	49903	49906	49909	49912	49915	49918	49921	49923	49926	49928
3.2	49931	49933	49935	49938	49940	49942	49944	49946	49948	49949
3.3	49951	49953	49955	49956	49958	49959	49961	49962	49963	49965
3.4	49966	49967	49968	49969	49970	49972	49973	49974	49974	49975
3.5	49976	49977	49978	49979	49980	49980	49981	49982	49982	49983
4.	49996	49997	49997	49997	49997	49997	49997	49997	49997	49997
4.5	49999	49999	49999	49999	49999	49999	49999	49999	49999	49999

Vrijednostima u tablici prethodi decimalni zarez, pa je tako npr. $\Phi_0(1.71) = 0.45543$.

MATEMATIKA 3

(Normalna razdioba)

Binomna razdioba

1. Ivica gađa metu 5 puta, svaki puta pogađa s vjerojatnošću 0.6. Slučajna varijabla X je broj promašaja. Kolika je vjerojatnost da je pogodio metu barem jedanput? Koliko je očekivanje?
2. Strijelac gađa metu 3 puta, svaki put pogađa s vjerojatnošću $\frac{2}{3}$. Neka slučajna varijabla X predstavlja broj pogodaka. Naći očekivanje i varijancu za tu varijablu. Koja je vjerojatnost da je:
 - a) pogodio cilj točno 2 puta;
 - b) pogodio cilj manje od 2 puta;
 - c) pogodio cilj.
3. Da li je u igri podjednakih protivnika vjerojatnije dobiti:
 - a) 3 od 4 ili 6 od 8 partija?
 - b) bar 3 od 4 ili bar 6 od 8 partija?

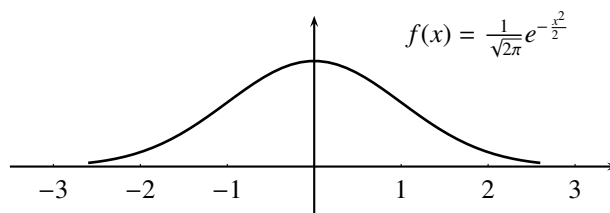
Normalna razdioba

4. Izračunati iz tablice za standardiziranu normalnu varijablu, $Z = \mathcal{N}(\mu = 0, \sigma = 1)$,
 - a) $pr(0 < Z < \frac{1}{2})$;
 - b) $pr(1 < Z < 2.45)$;
 - c) $pr(-0.2 < Z < 1.25)$;
 - d) $pr(-2 < Z < -1.1)$;
 - e) $pr(-3 < Z < 2.09)$;
 - f) $pr(Z < 0.8)$;
 - g) $pr(Z < -3)$;
 - h) $pr(Z > 2.13)$.Skicirati gustoću razdiobe od Z .
5. Za slučajnu varijablu $X = \mathcal{N}(\mu = 3, \sigma = 2)$ izračunati
 - a) $pr(4 < X < 7)$;
 - b) $pr(2 < X < 5)$;
 - c) $pr(2.5 < X < 3.5)$.Skicirati gustoću razdiobe od X i od Z .
6. Za slučajnu varijablu $X = \mathcal{N}(\mu = 3, \sigma = 2)$ izračunati c takav da je
 - a) $pr(X < c) = 0.59$;
 - b) $pr(X > c) = 0.11$;
 - c) $pr(-c < X < c) = 0.88$.
7. Slučajna varijabla X ima normalnu razdiobu $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Izračunati vjerojatnost da će vrijednost slučajne varijable X upasti u interval:
 - a) $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$;
 - b) $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$;
 - c) $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$.
8. Visina odraslog muškarca u dovoljno velikoj populaciji ima približno normalna razdiobu. Ako je sredina 180cm, standardna devijacija 6cm, izračunajeti vjerojatnost da je
 - a) visina nasumce odabrana muškarca između 178 i 182cm;
 - b) visina barem jednog od 4 nasumce odabrana muškarca između 178 i 182cm.

MATEMATIKA 3

(Normalna razdioba – dodatni zadaci)

Normalna razdioba



1. Pomoću tablica za Φ izračunajte:

- | | |
|--------------------|--------------------|
| a) $\Phi(1)$; | b) $\Phi(0.5)$; |
| c) $\Phi(0.25)$; | d) $\Phi(-0.1)$; |
| e) $\Phi(-0.25)$; | f) $\Phi(-0.75)$. |

2. X_1 i X_2 su slučajne varijable s normalnim razdiobama sa sredinom $\mu = 10$ i pripadnim standardnim devijacijama $\sigma_1 = 2$ i $\sigma_2 = 3$. Skicirajte grafove njihovih funkcija vjerojatnosti i izračunajte $p(X_1 \leq 9)$ i $p(9 \leq X_2 \leq 11)$. Skicirajte površine koje odgovaraju ovim vjerojatnostima.

3. Stroj proizvodi matice čija je idealna širina 2cm. Tolerira se odstupanje od ± 2 mm. Pretpostavljamo da slučajna varijabla X koja mjeri širinu matice ima normalnu razdiobu. Kolika treba biti standardna devijacija σ tako da stroj proizvodi ispravne matice s vjerojatnošću od barem 96% (uz pretpostavku $\mu = 2$ cm)?

4. Slučajna varijabla X ima normalnu razdiobu sa parametrima $\mu = 15$, i standardnom devijacijom $\sigma = 5$. Nađi interval $\mu \pm c$ takav da je

$$p(\mu - c \leq X \leq \mu + c) \approx 50\%.$$

5. Slučajna varijabla X sa normalnom razdiobom ima sredinu $\mu = 0$ i nepoznatu standardnu devijaciju σ . Kolika je standardna devijacija σ ako znamo da je vjerojatnost da X budu u intervalu $[-10, 10]$

$$p(-10 \leq X \leq 10) = 0.91 ?$$

6. Trudnoća kod ljudi traje u prosjeku 266 dana sa standardnom devijacijom od 14 dana. Trajanje trudnoće može se dobro aproksimirati normalnim modelom.

- Odredite koliki postotak trudnoća traje između 270 i 280 dana.
- Odredite minimalno trajanje 25% najduljih trudnoća.

MATEMATIKA 3

(Statistika)

- Težine 4 studenta su sljedeće: 73, 74, 87, 95 kg. Naći
 - sredinu te populacije;
 - varijancu, odnosno standardnu devijaciju.
 - Radimo sve moguće uzorke od po 2 studenta. Naći očekivanje za varijablu \bar{Y} koja predstavlja sredinu uzorka;
 - naći devijaciju za tu varijablu, $\sigma_{\bar{Y}}$.
- Za uzorak populacije studenata sa težinama 72, 77, 81, 83 kg izračunajte sredinu \bar{X} , varijancu V i standardnu devijaciju S .
- Proučavanjem visina muške populacije pomoću uzoraka od po 1000 muškaraca došlo se do sljedećih podataka: standardna devijacija uzoraka $\sigma_{\bar{X}}$ je 0.3cm, prosječna visina uzoraka je $\mu_{\bar{X}} = 178$ cm. Procijenite koliki dio populacije je niži od 170cm i koliki je dio populacije viši od 2m, uz pretpostavku da visina muške populacije ima normalnu razdiobu.
- Slučajna varijabla X ima parametre $\mu = 100$, $\sigma = 3$. Koja je vjerojatnost da je sredina slučajnog uzorka veličine $n = 36$ u granicama $[99.25, 100.2]$?
- Koja je vjerojatnost da pri 100 bacanja (pravednog) novčića dobijemo više od 60 glava?
- Kolika je vjerojatnost da u 50 bacanja novčića padne između 20 i 30 glava (uključivo)?
- Parametri populacije su $\mu = 1500$, $\sigma = 20$. Koja je vjerojatnost da je sredina \bar{X} slučajnog uzorka te populacije veličine $n = 30$ u intervalu $\mu \pm 3$?
- Na raspolaganju nam je 6 danskih doga, od toga 4 imaju kupirane uši, a 2 nemaju. Napravite sve moguće uzorke od po tri psa (bez vraćanja!), i izračunajte očekivanje i disperziju za proporciju uzorka P (vjerojatnost kupiranog psa u uzorku). Usporedite te podatke sa sredinom i disperzijom za broj pasa s kupiranim ušima na nivou uzorka.
- Lhasa apso ima njušku duljine $\mu = 4$ cm, a očekivano je odstupanje $\sigma = 0.5$ cm. Promatramo uzgajivačnice sa po 30 jedinki. S kojom će vjerojatnošću srednja vrijednost duljine njuške takvog uzorka biti između 3.7cm i 4.3cm, što su za tu vrstu dozvoljene veličine na natjecanjima?
- Pretpostavimo da prosječan 70-godišnjak neke populacije ima $\mu = 25$ vlastitih zubiju, i neka je varijanca $\sigma = 1.39$. Iz populacije od 1500 70-godišnjaka radimo uzorke od po 100, bez vraćanja. Koliko je vjerojatnost da će sredina broja zubiju u slučajnom uzorku biti veća ili jednaka 25.2? U kolikom broju uzoraka pretpostavljamo da će se to dogoditi?
- Predsjednički kandidat George pobijedio je na izborima sa 60% glasova. Kolika je vjerojatnost da u slučajnom uzorku od 200 glasača kandidat George dobije manje od 50% glasova?
- Azori su jedino mjesto u Europi gdje raste ananas. Od ananasa plasiranog na tržište 95% je prvoklasno. Rade se pošiljke od po 3000 ananasa. U kojim će se granicama nalaziti proporcija prvoklasnog ananasa u pošiljci s koeficijentom pouzdanosti $z_c = 2.40$?
- Mjerenje dijametara slučajnog uzorka od 200 kugličnih ležajeva dalo je sredinu od 2.09cm i standardnu grešku od 0.11cm. Naći očekivani dijametar ležajeva s pouzdanošću: a) 95%; b) 99.73%
- U 40 bacanja novčića dobivene su 24 glave. Naći interval u kojem se nalazi proporcija broja glavi dobivena za beskonačni broj bacanja novčića s pouzdanošću:
 - 95%
 - 99.7%
- Veliki uzorak muške studentske populacije ima prosječnu visinu 180cm. Standardna devijacija ovog uzorka je 5cm. Procijenite srednju visinu muške studentske populacije uz pouzdanost 90%. Možete li uz ovu procjenu odrediti vjerojatnost da sljedeći slučajni uzorak od 50 studenata ima prosječnu visinu manju od 179cm?

Rješenja zadataka

MAT3 – vjerojatnost – I str. 2

1. a) $1/3$, b) $1/2$, c) $1/3$, d) 0 , e) $1/3$, f) $1/3$
2. a) $2/10$, b) $1/2$, c) $1/10$, d) $3/10$, e) $3/10$, f) $1/10$,
3. a) $6/36$, b) $8/36$, c) $30/36$, d) $6/36$.
4. a) $4/30$, b) $7/30$, c) $26/30$, d) $5/30$.
5. $24/41 \approx 58.5\%$
6. $8/107 \approx 7.4\%$
7. a) 10% , b) 10.8% , c) 8.33% , d) s 1% na 8.33% znači 8.33 puta
8. a) $1/3$, b) $3/5$
9. a) $2/3$, b) $1/5$
10. a) $1/2$, b) $5/8$, c) $15/16$, d) $2/5$
11. a) $10/96$, b) $3/54$, c) $65/96$, d) $40/54$, e) $79/96$, f) $3/10$.
12. a) 68.75% , b) $1 - 68.75\% = 31.25\%$, c) 32.72% , d) 40%
13. a) 18.33% , b) $1 - 18.33\% = 81.67\%$, c) 54.64% , d) 36.7%

MAT3 – slučajne varijable str. 5

- 9.
10. $k = \frac{1}{\pi}$
22. $k = \frac{e}{e^2 - 1}$

MAT3 – razdiobe str. 10

1. b) $EX = 2$

Normalna razdioba – dodatni zadaci str. 11

1. a) 0.84 , b) 0.691 , f) zaokruženo prema većem
 $\approx \Phi(-0.7) = 0.242$

MAT3 – statistika str. 12

1. a) $\mu = 82.25$, b) $\sigma = 9.202$; c) $\mu_{\bar{Y}} = 82.25$; d) 6.51
2. $\bar{X} = 78.25$, $V = 17.688$, $S = 4.21$
5. $pr(\bar{p} > 60/100) = ?$

Slučajna varijabla \bar{p} koja računa proporciju glava u uzorcima od po 100 bacanja novčića ima normalnu razdiobu s parametrima

$$\bar{p} \sim N\left(\mu = 60/100, \sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0.049\right)$$

$$pr(\bar{p} > 60/100) = 1 - pr(\bar{p} < 0.6) = 1 - \Phi\left(\frac{0.6-0.5}{0.049}\right) = 1 - \Phi(2.04) \approx 1 - \Phi(2.0) = 1 - 0.977 = 2.3\%$$

6. $pr(19.5/50 < \bar{p} < 30.5/50) = ?$

$$\bar{p} \sim N\left(\mu = 0.5, \sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0.071\right)$$

$$pr(19.5/50 < \bar{p} < 30.5/50) = \Phi\left(\frac{0.61-0.5}{0.071}\right) - \Phi\left(\frac{0.39-0.5}{0.071}\right) \approx \Phi(1.5) - \Phi(-1.5) = 0.933 - 0.067 = 86.6\%$$

7. $\bar{X} \sim N(\mu = 1500, \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 3.65$

$$pr(1497 < \bar{X} < 1503) = \Phi(3/3.65) - \Phi(-3/3.65) \approx \Phi(0.82) - \Phi(-0.82) \dots$$

13. a) $c = 95\% \Rightarrow z_c = 2$, pa slijedi da je

$$\mu = 2.09 \pm 2 \cdot SG = 2.09 \pm 0.22,$$

- b) $c = 99.7\% \Rightarrow z_c = 3$. Slijedi da je $\mu = 2.09 \pm 3 \cdot 0.11$.