

# MATEMATIKA 3

(zadaci sa kompleksnim potencijalima, 01.02.2004.)

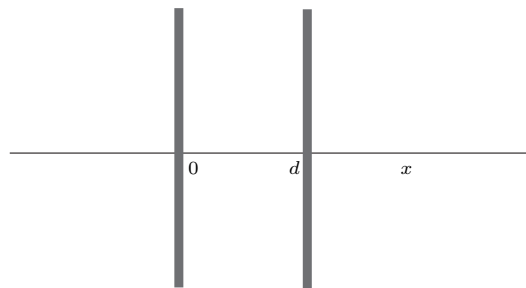
## Uvod

... za teoriju pogledajte predavanja ...

## Primjeri

1. Odredi potencijal između dvije paralelne nabijene ploče beskonačne površine sa potencijalima  $\Phi_1$  i  $\Phi_2$ . Udaljenost ploča je  $d$ .

*Rješenje.* Skicirajmo dvije paralelne ploče u koordinatnom sustavu (skica presjeka). Neka su okomite na os  $x$ .



Potencijal točke ovisi samo njoj udaljenost od nabijenih ploča. Dakle  $\Phi(x, y)$  ovisi samo o  $x$  pa možemo pisati  $\Phi(x)$ . Za potencijal vrijedi

$$\nabla\Phi(x) = \Phi_{xx} + \underbrace{\Phi_{yy}}_{=0} = \Phi_{xx} = 0.$$

Integriranjem (dvaput za redom) iz zadnje jednakosti dobijemo

$$\Phi(x) = ax + b,$$

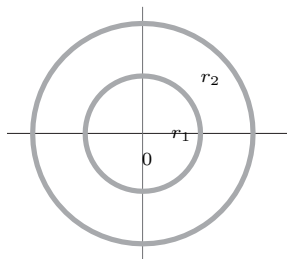
gdje su  $a, b$  konstante (koje tek treba odrediti).  $a, b$  moraju biti takvi *Phi* zadovoljava početne uvjete. Prva ploča je skicirana sa  $x = 0$ , druga sa  $x = d$ . Prema tome, početni uvjeti su  $\Phi(0) = \Phi_1$ ,  $\Phi(d) = \Phi_2$ . Slijedi da je

$$b = \Phi_1, a = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{d}, \quad \text{te konačno} \quad \Phi(x) = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{d} \cdot x + \Phi_1.$$

□

2. Odredi potencijal između dva (beskonačna) koaksijana cilindra, nabijena na  $\Phi_1$  i  $\Phi_2$  redom, sa pripadnim radijusima  $r_1, r_2$ .

*Rješenje.* U ovom slučaju skicirat ćemo koristeći polarni koordinatni sustav. Neka su oba cilindra centrirana u ishodištu.



Ponovo potencijal ovisi samo o udaljenosti točke od ploča, što je u polarnom sustavu dato direktno preko  $r$ -koordinate, tj. potencijal točke ne ovisi o argumentu  $\theta$ .

Dakle,  $\Phi(r, \theta) = \Phi(r)$ . Raspišimo laplasijski  $\nabla\Phi$  u polarnim koordinatama:

$$\nabla\Phi(r, \phi) = r^2\Phi_{rr} + r\Phi_r + \underbrace{\Phi_{\theta\theta}}_{=0} = r^2\Phi_{rr} + r\Phi_r = 0.$$

Zadnju jednakost skratimo sa  $r$ , sredimo i dobijemo

$$\frac{\Phi''}{\Phi'} = -\frac{1}{r},$$

uz zapis  $\Phi' \equiv \Phi_r$ ,  $\Phi'' \equiv \Phi_{rr}$ . Dobili smo separiranu diferencijalnu jednačbu (sjeti se matematike 2). Integracijom slijedi:

$$\ln \Phi' = -\ln r + \ln a, \text{ pa je } \Phi' = \frac{a}{r}.$$

Još jednom integriramo i dobijemo

$$\Phi(r) = a \ln r + b.$$

Konstante  $a, b$  izračunamo iz početnih uvjeta  $\Phi(r_1) = \Phi_1$ ,  $\Phi(r_2) = \Phi_2$ .

□

### 3. Odredi potencijal između dvije ravne beskonačne ploče, namještene da stoje pod kutom $\alpha$ , te nabijene na potencijale $\Phi_1$ i $\Phi_2$ .

*Rješenje.* Skicirajmo ploče u polarnom koordinatnom sustavu:

Ekvipotencijale su zrake  $\theta = c$ . Potencijal točke  $T(r, \theta)$  prema tome ovisi samo o  $\theta = \text{Arg } z$ . Ponovo raspíšemo laplasijan i dobijemo

$$\Phi_{\theta\theta} = 0,$$

odakle slijedi da je  $\Phi$  oblika  $a\theta + b$ . Konstante  $a, b$  dobijemo iz početnih uvjeta  $\Phi(0) = \Phi_1$ ,  $\Phi(\alpha) = \Phi_2$ .

□

## Zadaci

### 4. Zadan je kompleksni potencijal $F(z) = z^3$ . Odrediti potencijal $\varphi$ , strujanje $\psi$ , brzinu $v(z)$ .

*Rješenje.* Raspíšimo  $F(z)$  tako da možemo očitati realni i imaginarni dio:

$$F(z) = (x + iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3),$$

dakle imamo :  $\varphi(x, y) = x^3 - 3xy^2$  i  $\psi(x, y) = 3x^2y - y^3$ . (To znači da su ekvipotencijalne krivulje:  $x^3 - 3xy^2 = c$ , a strujnice  $3x^2y - y^3 = c$ . Odavdje se ne vidi, ali radi se o strujanju oko kuta  $\theta = \frac{\pi}{3}$ )

Brzina je

$$v(z) = \text{grad } \varphi = (3x^2 - 3y^2, -6xy) = 3\bar{z}^2$$

□

### 5. Krak ploče koji leži na pozitivnom dijelu $x$ -osi grije se na $0^\circ\text{C}$ , a krak koji leži na negativnom dijelu $x$ -osi na $100^\circ\text{C}$ . Naći razdiobu temperature.

*Rješenje.* Izoterme su ovdje zrake koje izlaze iz ishodišta. To znači da  $T$  ovisi samo o kutu  $\theta$ , pa ćemo ga potražiti u obliku  $T(\theta) = A\theta + B$  (vidi zadatak 3.!), gdje su  $A$  i  $B$  konstante koje treba odrediti.

Uvrštavanjem uvjeta

$$T(0) = A \cdot 0 + B,$$

$$T(\pi) = A \cdot 100 + B,$$

dobijemo  $A = \frac{100}{\pi}$ , te  $B = 0$ . Tada zaključujemo da je  $T(\theta) = \frac{100}{\pi}\theta$ , te je

$$F(z) = -i \frac{100}{\pi} \ln z$$

(vidi još malo zadatak 3.!) □

### 6. Lijeva polovica cijevi radijusa 1 grije se na $100^\circ\text{C}$ , a desna na $0^\circ\text{C}$ . Naći razdiobu temperature.

*Rješenje.* Iskoristit ćemo rješenje prethodnog zadatka: presjek naše cijevi jedinična je kružnica, smjestimo je u koordinatni sustav – lijeva polukružnica grije se na  $100^\circ\text{C}$ , desna na  $0^\circ\text{C}$ . Jediničnu ćemo kružnicu komformno preslikati bilinearnim preslikavanjem

$$z = f(w) = \frac{aw + b}{cw + d},$$

i to na sljedeći način:

–  $i$  ćemo preslikati u  $0$ ,  $i$  u točku  $\infty$ , a  $1$  u  $1$  (skicirajte grafove: treba pokidati jediničnu kružnicu, smjestiti je na  $x$ -os 'kako spada').

Dobije se preslikavanje

$$z = f(w) = \frac{w + i}{iw + 1}.$$

Sada je razdioba temperature koju smo tražili, označimo je sa  $G(w)$ , jednaka  $G(w) = F(f(w))$ , gdje je  $F(z)$  razdioba temperature iz prethodnog zadatka. Tako dobijemo

$$G(w) = -i \frac{100}{\pi} \ln \frac{w + i}{iw + 1}.$$

□

... nastaviti će se ...