MATEMATIKA 3

(dodatni materijali za Laurentove redove, 17.12.2003.)

Zadaci

1. Razvij u Laurentov red funkciju $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$, oko točke $z_0 = 0$, na području $D = \{z : |z| < 1\}$.

Rješenje. f ima singularitete u $z = 1$ i $z = 2$. Prema tome, na području D funkcija nema singulariteta, pa je njen razvoj Taylorov (bez glavnog dijela).

Rastavimo li f metodom parcijalnih razlomaka, dobiti ćemo

$$f(z) = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{1-z}.$$

Svaki od sumanada može se jednostavno razviti u Taylorov red oko $z_0 = 0$:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots\ ,$$
$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \dots\right),$$

i time je zadatak riješen. □

2. Razvij u Laurentov red funkciju $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$, oko točke $z_0 = 0$, na području $D = \{z : 1 < |z| < 2\}$.

Rješenje. Funkcija f je ista kao i u prethodnom zadatku. Ovaj puta je razlika u području razvoja. Rastavimo f na isti način kao u prethodnom zadatku, i označimo $f_1(z) = \frac{1}{z-2}$, $f_2(z) = \frac{1}{1-z}$.

f_2 je regularna na području $|z| < 2$ i prema tome njezin je ravoj u red Taylorov (kao i u prethodnom zadatku).

f_1 ima singularitet u $z = 1$, i zato je rastav Taylorov samo za $|z| < 1$, što ovdje nije slučaj. No, ako je $1 < |z| < 2$, specijalno je $1 < |z|$, tj. $|\frac{1}{z}| < 1$. Laurentov razvoj dobit ćemo korištenjem Taylorovog razvoja po potencijama od $\frac{1}{z}$.

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{\frac{1}{z}-1} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots\right) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots$$

Zbrajanjem Laurentovih redova od f_1 i f_2 dobivamo Laurentov red od f. □

3. Razvij u Laurentov red funkciju $f(z) = \frac{z+i}{z}$, oko točke $z_0 = i$, a u području D koje sadrži točku $-i$.

Rješenje. Funkcija ima singularitet u $z = 0$. Prema tome razvoj u red razlikuje se na dva područja: $|z + i| < 1$ i $|z + i| > 1$. Točka $-i$ pripada području $|z + i| > 1$. Prema tome f razvijamo na području $D = \{z : 1 < |z - i| < \infty\}$.

Razvoj ide oko $-i$. Uvedimo supstituciju $u = z - (-i) = z + i$. Slijedi da je $z = u - i$. Vrijedi da je $|u| > 1$, tj. $|\frac{1}{u}| < 1$. Prema tome ciljamo na razvoj u geometrijski red po potencijama od $\frac{1}{u}$.

$$f(z) = \frac{u}{u-i} = \frac{u-i+i}{u-i} = 1 + \frac{i}{u-i} = 1 + \frac{1}{u}\frac{1}{1-\frac{i}{u}} = 1 + \frac{1}{u}\left(1 + \frac{i}{u} + \frac{i^2}{u^2} + \dots\right).$$

To je traženi razvoj funkcije f. □

4. Razvij u Laurentov red u okolini $z_0 = 0$ funkciju $f(z) = (z + 1)^2 e^{1/z}$.

Rješenje. Pogledajmo najprije Laurentov red funkcije $e^{1/z}$. Razvijmo ga kao Taylorov red po potencijama od $\frac{1}{z}$.

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n}.$$

Sad pogledajmo

$$(z^2 + 2z + 1)e^{1/z} = z^2 * e^{1/z} + 2z * e^{1/z} + e^{1/z}.$$

Za treći sumand razvoj imamo, lako dobijemo i prva dva. Ukupno je rješenje zbroj ova tri Laurentova reda. □

... nastavit će se ...