

# Matematika 3

---

## pismeni ispiti

### Sadržaj

01. Travanj, 2005. . . . .	2
06. Svibanj, 2005. . . . .	4
23. Lipanj, 2005. . . . .	5
07. srpnja, 2005. . . . .	7
07. srpnja, 2005. . . . .	8
27. rujan, 2005. . . . .	10
01. listopad, 2005. . . . .	12
01. listopad, 2005. . . . .	13
03. veljače, 2006. . . . .	15
17. veljače 2006. . . . .	16
07. travnja 2006. . . . .	17
12. svibnja 2006. . . . .	18
21. lipnja 2006. . . . .	19
06. srpnja 2006. . . . .	20
11. rujna 2006. . . . .	21
21. rujna 2006. . . . .	22
02. listopada 2006. . . . .	23
01. veljače 2007. . . . .	24
15. veljače 2007. . . . .	25
05. svibnja 2007. . . . .	26
11. rujna 2007. . . . .	27
04. rujna 2008. . . . .	28

# MATEMATIKA 3

(01. Travanj, 2005.)

**Napomena.** Matematika 3A rješava zadatke 1–6; Matematika 3 rješava 1,3, 4, 6, 7, 9; Matematika 3B rješava zadatke 4-9.

1. Broj  $e^{-10}$  računamo računalom u aritmetici pomičnog zareza na dva načina.

(1)  $e^{-x}$  izračunamo razvojem funkcije  $e^{-x}$  u Taylorov red oko 0.

(2) Znamo da je  $e^{-x} = 1/e^x$ . Vrijednost  $e^x$  računamo razvojem u Taylorov red oko 0, a zatim 1 podijelimo s dobivenom aproksimacijom za  $e^x$ .

Ima li razlike u točnosti dobivenih rezultata? Imaju li relativno veliku ili relativno malu grešku? Ako je jedan od načina bolji, koji je to i zašto.

(12 bodova)

2. Gausovim eliminacijama s parcijalnim pivotiranjem nađite rješenje linearnog sustava  $Ax = b$ , ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(12 bodova)

3. Zadana je diferencijalna jednačba drugog reda

$$y'' - 2y' + y = x$$

uz početne uvjete  $y(1) = 1$ ,  $y'(1) = 2$ . Diferencijalnu jednačbu napišite kao sustav diferencijalnih jednačbi prvog reda i nađite aproksimaciju njenog rješenja u  $x = 1.1$ , korištenjem RK-1 metode s korakom  $h = 0.1$ .

(12 bodova)

4. Iz špila od 32 karte izvlačimo 3. Kolika je vjerojatnost da a) izvučemo bar jednog pika; b) izvučemo karte različitih boja? Pritom u špilu imamo po 8 karata svake boje: pik, tref, herc, karo. Opisati prostor elementarnih događaja.

(12 bodova)

5. Pouzdanost testa na neku bolest je 95%. U populaciji je 1% oboljelih. Kolika je vjerojatnost da u uzorku od 200 ljudi bude više od 2% oboljelih? Kolikom ce broju od njih biti dijagnosticirana bolest?

(12 bodova)

6. Prosječna visina studenta u populaciji je 182cm, standardnu devijaciju 8cm. Naći interval oko te vrijednosti (182cm) u koji ce uz 95%-tnu pouzdanost spadati studenti iz uzorka veličine 200.

(12 bodova)

7. Ploha  $P$  parametrizirana je s

$$\vec{r}(u, v)(u, u - \cos v, uv^2).$$

Odredite jednačbu tangencijalne ravnine na plohu  $P$  koja prolazi točkom  $T(1, 2, \pi^2)$ .

(12 bodova)

8. Neka je  $U$  skalarno polje zadano s

$$U = xy + xz^2.$$

Izračunajte

$$\int_K U |d\vec{r}|$$

gdje je  $K$  dužina koja spaja točke  $A(-1, 0, 1)$  i  $B(0, 1, 1)$ .

(12 bodova)

9. Izračunajte volumen tijela parametriziranog s

$$\vec{r} = (2 + uw, v + e^w, uv)$$

gdje su  $u, v, w \in [0, 1]$ .

(12 bodova)

# MATEMATIKA 3

(06. Svibanj, 2005.)

**Napomena.** Matematika 3A rješava zadatke 1–6; Matematika 3 rješava 1,3, 4, 6, 7, 9; Matematika 3B rješava zadatke 4-9.

1. Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nađite pravac koji prolazi točkom  $(0, 1)$  i aproksimira sljedeći skup podataka  $(-1, 0.5), (0, 1.1), (1, 1.4), (2, 2.1)$ . (12 bodova)

2. Newtonovom metodom nađite nultočku funkcije

$$xe^x - 2 = 0$$

koja se nalazi u intervalu  $[0, 1]$ , tako da greška bude manja ili jednaka od  $10^{-4}$ .

(12 bodova)

3. Zadan je sustav diferencijalnih jednadžbi prvog reda

$$x + y' + xyt = 1$$

$$x' + yt = 1$$

uz početne uvjete  $x(1) = 2, y(1) = -1$ . Nađite aproksimaciju rješenja tog sustava u  $t = 1.1$  korištenjem RK-1 metode s korakom  $h = 0.1$ .

(12 bodova)

4. Iz kutije s 7 plavih, 2 zelene i 54 žute loptice izvlačimo 3 loptice. Kolika je vjerojatnost da smo izvukli dvije žute? Opišite prostor elementarnih događaja.

(12 bodova)

5. Neka je  $f(x) = \frac{c}{1+x^2}$  funkcija gustoće slučajne varijable  $X$  na intervalu  $(-1, 1)$ , drugdje je ona 0. Odrediti  $c$ , EX.

(12 bodova)

6. Prosječna širina struka studentica u populaciji je 65cm, standardnu devijaciju 10 cm. Naći interval oko te vrijednosti (65cm) u koji će uz 90%-tnu pouzdanost spadati studentice iz uzorka veličine 100.

(12 bodova)

7. Koordinatizirajte ravninu koja prolazi točkom  $T(3, 0, 2)$  i ima vektor normale  $\vec{n} = (-1, 1, 2)$ .

(12 bodova)

8. Odredite duljinu krivulje od točke  $A(1, 2, 3)$  do točke  $B(2, 4, 6)$  koordinatizirane s

$$\vec{r} = (\ln x, \ln(x^2), \ln(x^3)).$$

(12 bodova)

9. Odredite skalarno polje  $U$  tako da za vektorsko polje

$$\vec{F} = (y + z^2, x, 2xz + \frac{1}{2}z)$$

vrijedi

$$\nabla U = \vec{F}.$$

(12 bodova)

**Rezultati ispita:** sljedeći radni dan u 13:00 sati

# MATEMATIKA 3

(23. Lipanj, 2005.)

**Napomena.** Matematika 3A rješava zadatke 1–6; Matematika 3 rješava 1,3, 4, 6, 7, 9; Matematika 3B rješava zadatke 4–9.

1. Nađite interpolacijski polinom u Newtonovom obliku, koji interpolira funkciju

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

u točkama s  $x$ -koordinatama 1, 9, 27. Izračunajte vrijednost interpolacijskog polinoma u točki  $x = 6$  i nađite pripadnu pogrešku.

(16 bodova)

2. Nađite koliko je podintervala potrebno (po ocjeni greške) da bi se trapeznom metodom izračunala približna vrijednost integrala

$$\int_0^2 \left( \frac{x^5}{60} - \frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{6} + x^2 + x + 1 \right) dx$$

tako da greška bude manja od  $10^{-6}$ .

(16 bodova)

3. Zadan je sustav diferencijalnih jednažbi

$$\begin{aligned}x_1' &= 3x_1 - x_2 - t \\x_2' &= x_1 - tx_2\end{aligned}$$

uz početne uvjete  $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1$ . Runge–Kutta metodom 2. reda nađite približno rješenje ovog sustava za  $t = 0.2$  uz korak  $h = 0.2$ .

(16 bodova)

4. U kutiji se nalaze po 2 kuglice crvene, bijele i plave boje. Opišite prostor elementarnih događaja za

- izvlačenja dvije kuglice iz kutije bez vraćanja;
- izvlačenja dvije kuglice iz kutije s vraćanjem.

Sve su kuglice različite samo po boji. Kuglice se izvlače bez gledanja. Što je vjerojatnije - da se u eksperimentu iz a) izvuku dvije kuglice iste boje ili u b) dvije različite boje?

(16 bodova)

5. Strijelac pogađa cilj s vjerojatnošću 0.7. Naći funkciju vjerojatnosti za slučajnu varijablu  $X$  koja predstavlja broj pogodaka u 4 gađanja.

(16 bodova)

6. Prosječna visina učenika u populaciji je 160cm. Uz koliku standardnu devijaciju učenici visine 170cm, 155cm i 172cm pripadaju među središnjih 90% populacije?

(16 bodova)

7. Radij vektor točke koja se giba po krivulji dan je formulom

$$\vec{r}(t) = (t^2 e^t, t^2 + t + 1, et).$$

Odredite vektore brzine i akceleracije, te njihove apsolutne vrijednosti u točki  $T(0, 1, 0)$ .

(16 bodova)

8. Koordinatizirajte površinu beskonačnog cilindra paralelnog s  $x$ -osi koji prolazi kroz točke  $T_1(0, 2, 0)$ ,  $T_2(0, -2, 0)$  i  $T_3(0, 0, 2)$ .

(16 bodova)

9. Pronađite volumen tijela koordinatiziranog s

$$\vec{r} = (u, w \cos v, w \sin v),$$

gdje su  $u, v, w \in [0, 1]$ .

(16 bodova)

# MATEMATIKA 3

(07. srpnja, 2005.)

**Napomena.** Ovo je pismena zadaća za studente koji su slušali matematiku 3 (gradivo kompleksne analize) 2003/2004. ili ranijih godina.

1. Izračunati:

$$\left| \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right)^{81} + i^{11} \right|.$$

(20 bodova)

2. Izračunajte

$$\int_{\Gamma} (\operatorname{Im}(z^2 - i)) dz$$

gdje je  $\Gamma$  dužina od  $z_0 = 0$  do  $z_1 = i$ .

(20 bodova)

3. Pomoću funkcije

$$f(z) = z^2 + 1 + i$$

preslikajte kružnicu  $|z| = \sqrt{2}$ .

(20 bodova)

4. Pronađite sve singularitete funkcije

$$f(z) = \sin \frac{1}{z}$$

i odredite njihov tip.

(20 bodova)

5. Izračunajte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)^2(x^2 + 1)}$$

(20 bodova)

**Rezultati ispita:** sljedeći radni dan u 13:00 sati

# MATEMATIKA 3

(07. srpnja, 2005.)

**Napomena.** Matematika 3A rješava zadatke 1–6; Matematika 3 rješava 1,3, 4, 6, 7, 9; Matematika 3B rješava zadatke 4-9.

1. Metodom bisekcije nađite nultočku funkcije

$$f(x) = \ln(x + 5) + 2x + 9$$

koja se nalazi u intervalu  $[-4.5, -4]$ , tako da greška bude manja ili jednaka od  $10^{-3}$ .

(16 bodova)

2. Nađite interpolacijski polinom u Lagrangeovoj formi, koji interpolira funkciju

$$f(x) = 10^x$$

u točkama s  $x$ -koordinatama 1, 2 i 4. Nađite vrijednost tog polinoma u točki 3 i ocijenite grešku u toj točki (ne stvarnu grešku!).

(16 bodova)

3. Produljenom Simpsonovom metodom približno izračunajte integral

$$\int_4^5 \sqrt{x} \ln x \, dx$$

tako da greška bude manja ili jednaka  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

Uputa:  $f^{(4)}(x) = x^{-7/2} \left( 1 - \frac{15}{16} \ln x \right)$ .

(16 bodova)

4. Strijelac  $A$  pogađa metu s vjerojatnošću 0.6, a strijelac  $B$  s vjerojatnošću 0.5. Svaki od strijelaca gađa svoju metu 3 puta. Ako je meta pogođena 2 puta, kolika je vjerojatnost da je oba puta pogodio  $A$ ?

(16 bodova)

5. Prosječna visina učenika u populaciji je 160cm, uz standardnu devijaciju 6cm. Izračunajte koja je vjerojatnost da je srednja visina učenika u uzorku veličine 100 između 155 i 159cm. Koja je vjerojatnost da imamo više od 3 uzorka od 5 slučajno odabranih uzoraka veličine 100?

(16 bodova)

6. 3% pakiranog mlijeka koje stiže u trgovinu je pokvareno. Pošiljke su od po 100 komada. U kojim će se granicama kretati postotak pokvarenog mlijeka u pošiljci s pouzdanošću od 95%?

(16 bodova)

7. Položaj čestice u trenutku  $t$  koja se giba u prostoru dan je s

$$\vec{r}(t) = (2 \cos t^2, t \sin t^2, t).$$

Odredite vektore brzine i akceleracije. Kolika je udaljenost čestice u trenutku  $t = 1$  od točke u kojoj se nalazila u trenutku  $t = 0$ ?

(16 bodova)

8. Parametrizirajte plohu  $z = xy + \sin(x^2 + y^2)$  za  $x, y \in [0, 1]$ . Parametrizirajte koordinatne krivulje ove plohe koje prolaze kroz kroz točku  $(0, 0, 0)$ .

(16 bodova)

9. Izračunajte

$$\oint_K \vec{F} d\vec{r},$$

gdje je  $K$  jedinična kružnica u  $xy$  ravnini parametrizirana s  $\vec{r}(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$  ( $\varphi \in [0, 2\pi]$ ). Polje  $\vec{F}$  zadano je s  $\vec{F}(x, y, z) = (y - z, z - x, xyz)$ .

(16 bodova)

# MATEMATIKA 3

(27. rujan, 2005.)

**Napomena.** Matematika 3A rješava zadatke 1–6; Matematika 3 rješava 1,3, 4, 6, 7, 9; Matematika 3B rješava zadatke 4-9.

1. Poznata je LR faktorizacija (s parcijalnim pivotiranjem) matrice  $PA = LR$ , gdje su

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{3} & 1 & \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ & 2 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix}.$$

Korištenjem te faktorizacije nađite rješenje sustava  $Ax = b$ , ako je

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(12 bodova)

2. Metodom bisekcije nađite nultočku funkcije

$$f(x) = \operatorname{sh} x + x - 1$$

koja se nalazi na intervalu  $[0, 1]$ , tako da greška bude manja ili jednaka  $10^{-2}$ .

(12 bodova)

3. Nađite Newtonov interpolacijski polinom koji interpolira funkciju

$$f(x) = \sqrt[4]{x}$$

u točkama s  $x$ -koordinatama 1, 16, 81 i 256. Tim interpolacijskim polinomom nađite aproksimaciju za  $\sqrt[4]{100}$ , ocjenu greške i pravu grešku u toj točki.

(12 bodova)

4. Iz špila od 52 karte izvlačimo 3 karte. Kolika je vjerojatnost da a) izvučemo bar jednog pika; b) izvučemo karte različitih boja? Pritom u špilu imamo po 13 karata svake boje: pik, tref, herc, karo. Opišite prostor elementarnih događaja.

(12 bodova)

5. Pouzdanost testa na neku bolest je 95%. U populaciji je 1% oboljelih. Kolika je vjerojatnost da u uzorku od 300 ljudi bude više od 2% oboljelih? Kolikom će broju od njih biti dijagnosticirana bolest?

(12 bodova)

6. Prosječna visina studenta u populaciji je 180cm, standardnu devijaciju 8cm. Kolika je vjerojatnost da je za uzorak te populacije veličine  $N = 250$  prosjek visine

$$\bar{X} \geq 181 \text{ cm} ?$$

(12 bodova)

7. Ploha  $P$  parametrizirana je s

$$\vec{r}(u, v)(u, u + v, u - v^2).$$

Odredite jednađbu tangencijalne ravnine na plohu  $P$  koja prolazi točkom  $T(0, 1, -1)$ .

(12 bodova)

8. Neka je  $U$  skalarno polje zadano s

$$U = xy + yz + zx.$$

Izračunajte

$$\int_K U |d\vec{r}|$$

gdje je  $K$  dužina koja spaja točke  $A(0, 0, 1)$  i  $B(0, 1, 2)$ .

(12 bodova)

9. Izračunajte volumen tijela parametriziranog s

$$\vec{r} = (ue^w, v - e^w, v)$$

gdje su  $u, v, w \in [0, 1]$ .

(12 bodova)

# MATEMATIKA 3

(01. listopad, 2005.)

1. Riješi jednađbu:

$$z^3 + \frac{z}{2} = iz.$$

2. Provjerite je li funkcija  $f(z) = (\bar{z})^2 + 1$  analitička na cijeloj kompleksnoj ravnini.

3. Izračunaj:

$$\int_C i \cos iz \, dz,$$

gdje je  $C$  najkraća spojnica točaka  $0$  i  $2\pi i$ .

4. Razvij u Laurentov red oko  $z = 1$  funkciju

$$f = \frac{1}{(z-1)(z-7)},$$

na području u kojem se nalazi  $z = 0$ .

5. Odredi singularitete funkcije i njihov tip:

$$f(z) = \frac{1}{z} + e^{\frac{1}{z}}.$$

6. Izračunaj:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

**Rezultati ispita:** sljedeći radni dan u 13:00 sati

# MATEMATIKA 3

(01. listopada, 2005.)

**Napomena.** Matematika 3A rješava zadatke 1–6; Matematika 3 rješava 1,3, 4, 6, 7, 9; Matematika 3B rješava zadatke 4-9.

1. Nađite interpolacijski polinom u Lagrangeovom obliku koji interpolira funkciju

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

u točkama s  $x$ -koordinatama 1, 8, 27 i 64. Tim interpolacijskim polinomom nađite aproksimaciju za  $\sqrt[3]{50}$ , ocjenu greške i pravu grešku u toj točki.

(16 bodova)

2. Nađite koliko je podintervala potrebno (po ocjeni greške) da bi se Simpsonovom metodom izračunala približna vrijednost integrala

$$\int_0^4 \left( \frac{x^5}{10} - x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1 \right) dx$$

tako da greška bude manja od  $10^{-6}$ .

(16 bodova)

3. Zadan je sustav diferencijalnih jednažbi

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 - t \\ x_2' &= x_1 + tx_2 \end{aligned}$$

uz početne uvjete  $x_1(2) = 1$ ,  $x_2(2) = -1$ . Runge–Kutta metodom 2. reda nađite približno rješenje ovog sustava za  $t = 2.1$  uz korak  $h = 0.1$ .

(16 bodova)

4. Košarkaš Marko ima prosjek šuta s linije slobodnih bacanja 95%. Kolika je vjerojatnost da će od 4 slobodna bacanja pogoditi a) točno 2 puta; b) barem 2 puta?

(16 bodova)

5. Predsjednički kandidat George je pobijedio na izborima sa 51% glasova. Kolika je vjerojatnost da je u slučajnom uzorku od 300 glasača kandidat George dobio manje od 50% glasova?

(16 bodova)

6. Iz tvornice 5% proizvoda izađe neispravno. Pošiljke su od po 500 komada. U kojim će se granicama kretati postotak neispravnih proizvoda u pošiljci s pouzdanošću od 95%?

(16 bodova)

7. Položaj čestice koja se giba u prostoru u trenutku  $t$  dan je s

$$\vec{r}(t) = (e^{t+1}, t, t^2).$$

Odredite vektore brzine i akceleracije. Kolika je udaljenost čestice u trenutku  $t = 2$  od točke u kojoj se nalazila u trenutku  $t = 0$ ?

(16 bodova)

8. Parametrizirajte plohu  $z = x^2 + y^2$  za  $x, y \in [0, 1]$ . Odredite parametrizacije koordinatnih krivulja koje obrubljuju ovu plohu ( $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$ ).

(16 bodova)

9. Izračunajte

$$\oint_K \vec{F} d\vec{r},$$

gdje je  $K$  jedinična kružnica u  $xy$  ravnini parametrizirana s  $\vec{r}(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$  ( $\varphi \in [0, 2\pi]$ ). Polje  $\vec{F}$  zadano je s  $\vec{F}(x, y, z) = (y - z, z - x, xyz)$ .

(16 bodova)

# MATEMATIKA 3

(03. veljače, 2006.)

**Napomena.** Matematika 3A rješava zadatke 1–6; Matematika 3 rješava 1,3, 4, 6, 7, 9; Matematika 3B rješava zadatke 4–9.

1. Funkciju  $f(x) = xe^x - x - x^2$  aproksimiramo na računalu, tako da prvo izračunamo  $e^x$  korištenjem početnog komada Taylorovog reda za  $e^x$  oko 0, zatim red pomnožimo s  $x$  i oduzmemo što piše. Članove dobivenog reda zbrajamo sve dok prvi odbačeni član ne padne ispod zadane točnosti  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Hoće li za  $x = -10$  takva aproksimacija biti približno točna ili ne? Objasnite.

2. Zadana je LR faktorizacija matrice (s pivotiranjem),  $PA = LR$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ & 3 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Korištenjem zadane faktorizacije nađite rješenje sustava  $Ax = b$ .

3. U Newtonovom obliku nađite interpolacijski polinom koji interpolira funkciju

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

u točkama s  $x$ -koordinatama 0, 1 i 3. Ima li takav interpolacijski polinom smisla?

4. Neki tenisač prolazi prvo kolo s vjerojatnošću 0.6, drugo kolo s vjerojatnošću 0.45. Kolika je vjerojatnost da je stigao do trećeg kola? Ako nije došao do trećeg kola, kolika je vjerojatnost da je ispao odmah u prvom?

5. Janica skija na stazi s 50 vratiju. Na svakima je vjerojatnost da će ih promašiti 0.01. Kolika je vjerojatnost da će izletiti na trećim vratima? Opisati prostor događaja za tu utrku.

6. Pretpostavimo da je prolaznost na ponovljenom kolokviju  $p = 0.8$ . U kojim će se granicama oko te vrijednosti kretati  $P$  za proizvoljnu grupu od 36 studenata uz pouzdanost od 90%?

7. Parametrizirajte valjak radijusa 4 iz kojeg je izduben valjak radijusa 2. Os mu je na  $z$ -osi, a nalazi se iznad  $xy$ -ravnine.

8. Naći vektor normale paraboloida  $z = 3 - x^2 - y^2$  u točki  $T(1, 1, 1)$ .

9. Pokazati da je polje  $\vec{F} = (3x^2 + 3y, 3x + \frac{x}{y}, \ln y)$  konzervativno i izračunati rad (integral) tog polja od točke  $A(0, 0, 1)$  do točke  $B(1, 1, 1)$ .

**Rezultati ispita:** sljedeći radni dan u 13:00 sati

# MATEMATIKA 3

(17. veljače 2006.)

**Napomena.** Matematika 3A rješava zadatke 1–6; Matematika 3 rješava 1,3, 4, 6, 7, 9; Matematika 3B rješava zadatke 4–9.

1. Metodom bisekcije nađite nultočku funkcije

$$f(x) = \tanh x + x - 2$$

koja se nalazi na intervalu  $[1, 2]$ , tako da greška bude manja ili jednaka  $10^{-2}$ .

2. Nađite linearni sustav koji treba riješiti (ne morate ga riješiti) da biste linearnom metodom najmanjih kvadrata našli funkciju oblika

$$\varphi(x) = (ax^2 + bx + c)^3$$

koja aproksimira skup podataka  $(x_k, f_k)$ ,  $k = 0, \dots, n$ . Uputa: linearizirajte funkciju.

3. Poznato je opće rješenje neke diferencijalne jednadžbe koje glasi

$$y(x) = c_1 e^{-10x} + 1.$$

Zadan je početni uvjet  $y(0) = 1$ . Je li ta diferencijalna jednadžba kruta ako napredujemo po  $x$ ? Objasnite!

4. Strijelac  $A$  pogađa metu s vjerojatnošću 0.6, a strijelac  $B$  s vjerojatnošću 0.5. Svaki od strijelaca gađa svoju metu 3 puta. Ako je meta pogođena 2 puta, kolika je vjerojatnost da je oba puta pogodio  $A$ ?
5. Prosječna visina učenika u populaciji je 160cm. Pretpostavljama da visina učenika ima normalnu razdiobu. Kolika je standardna devijacija te razdiobe ako učenici visine 155cm i 165cm pripadaju u središnjih 90% populacije?
6. Iz tvornice 4% proizvoda izađe neispravno. Pošiljke su od po 400 komada. U kojim će se granicama kretati postotak neispravnih proizvoda u pošiljci s pouzdanošću od 95%?
7. Nađite vektorsku jednadžbu opisa jednolikog gibanja po kružnici  $y^2 + z^2 = 4$ ,  $x = 2$ . Odredite  $\vec{v}(t)$  i  $\vec{d}(t)$  za to gibanje. Da li su vektori  $\vec{v}(t)$  i  $\vec{d}(t)$  ortogonalni.
8. Nađite vektor normale na plohu  $z = 2x^2 - y + 3$  u točki  $T(1, 2, 3)$ .
9. Izračunajte tok polja  $\vec{F} = (x, y, xy)$  kroz oplošje kvadra omeđenog ravninama  $z = 0$ ,  $z = -2$ ,  $x = -1$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$  i  $y = 3$ .

**Rezultati ispita:** sljedeći radni dan u 13:00 sati

# MATEMATIKA 3

(07. travnja 2006.)

**Napomena.** Matematika 3A rješava zadatke 1–6; Matematika 3 rješava 1,3, 4, 6, 7, 9; Matematika 3B rješava zadatke 4–9.

1. Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = \frac{1}{ax + b}$$

koja prolazi točkom  $(0, 1)$  i aproksimira skup podataka  $(x_k, f_k)$ ,  $k = 0, \dots, n$ . Uputa: linearizirajte funkciju.

2. Zadan je sustav diferencijalnih jednažbi

$$\begin{aligned}x_1' &= x_1 - x_2 - t \\x_2' &= x_1 + x_2 + t\end{aligned}$$

uz početne uvjete  $x_1(3) = 1$ ,  $x_2(3) = -1$ . Runge–Kutta metodom 2. reda nađite približno rješenje ovog sustava za  $t = 3.1$  uz korak  $h = 0.1$ .

3. Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nađite LR faktorizaciju matrice  $A$  (bez pivotiranja), tj. nađite rastav  $A = LR$ .

4. Tri igrača igraju poker. Nakon djeljenja svaki ili ulaže 1000kn s vjerojatnošću 0.6, ili može odustati s vjerojatnošću 0.4.
- Sastavite tablicu /funkciju vjerojatnosti za varijablu  $X$ , ukupni uloženi novac. Izračunati očekivanu svotu uloženog novca  $EX$ .
  - Sastaviti funkciju vjerojatnosti za  $Y$ , dobit pojedinog igrača. Pobjeđuje onaj koji ima bolje među igračima koji su uložili. Pritom su im šanse podjednake.
5. Za slučajnu varijablu  $X$  koja prati normalnu razdiobu  $\mathcal{N}(\mu = 3, \sigma = 1)$  izračunati  $P(2.5 < X < 3.99)$
6. Vjerojatnost da će let na nekom aerodromu biti otkazan u aprilu je  $p = 0.05$ . U kojim će se granicama oko te vrijednosti kretati  $P$  za proizvoljnih 25 letova uz pouzdanost od 95%?
7. Tijelo se giba po kubnoj paraboli  $y = x^3$ ,  $x \geq 0$ . Napišite jednu moguću vektorsku jednažbu toga gibanja, odredite vektor brzine i akceleracije u proizvoljnom trenutku, te iznos brzine i akceleracije u trenutku  $t = 3$ .
8. Provjeriti da li je polje  $\vec{F} = (1, x, 0)$  konzervativno i izračunati rad (integral) tog polja po pravcu od točke  $A(0, 0, 0)$  do točke  $B(1, 0, 0)$
9. Izračunati rad polja  $\vec{F} = (x, xz, zy)$  po kružnici  $x^2 + y^2 = 2$ ,  $z = 4$ .

**Rezultati ispita:** sljedeći radni dan u 13:00 sati

# MATEMATIKA 3

(12. svibnja 2006.)

**Napomena.** Matematika 3A rješava zadatke 1–6; Matematika 3 rješava 1,3, 4, 6, 7, 9; Matematika 3B rješava zadatke 4–9.

1. Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = ax^2 + bx + c$$

koja prolazi točkama  $(0, 1)$ ,  $(1, 1)$  i aproksimira skup podataka  $(x_k, f_k)$ ,  $k = 0, \dots, n$ .

2. Nađite interpolacijski polinom u Lagrangeovom obliku koji interpolira funkciju

$$f(x) = \sqrt[4]{x}$$

u točkama s  $x$ -koordinatama  $0$ ,  $\frac{1}{16}$ ,  $1$  i  $16$ . Tim interpolacijskim polinomom nađite aproksimaciju za  $\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ , ocjenu greške i pravu grešku u toj točki.

3. Ako je zadana LR faktorizacija neke matrice  $A = LR$  i vektor  $b$ ,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ & 2 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

nađite korištenjem LR faktorizacije, rješenje sustava  $Ax = b$ .

4. Ivica skija na stazi s 50 vratiju. Na svakima je vjerojatnost da će ih promašiti 0.02. Kolika je vjerojatnost da će izletiti na trećim vratima? Kolika je vjerojatnost da neće promašiti nijedna vrata? Opišite prostor događaja za tu utrku.
5. Za slučajnu varijablu  $X$  koja ima normalnu razdiobu  $\mathcal{N}(\mu = 10, \sigma = 2)$  izračunajte

$$P(9 < X < 12).$$

6. Predsjednički kandidat A pobijedio je na izborima sa 60% glasova. Kolika je vjerojatnost da u slučajnom uzorku od 200 glasača kandidat George dobije manje od 50% glasova?
7. Položaj čestice koja se giba u prostoru u trenutku  $t$  dan je s

$$\vec{r}(t) = (e^{t+1}, t, t^2).$$

Odredite vektore brzine i akceleracije. Kolika je udaljenost čestice u trenutku  $t = 2$  od točke u kojoj se nalazila u trenutku  $t = 0$ ?

8. Neka je  $U$  skalarno polje zadano s

$$U = xy + yz + zx.$$

Izračunajte

$$\int_K U |d\vec{r}|$$

gdje je  $K$  dužina koja spaja točke  $A(0, 0, 1)$  i  $B(0, 1, 2)$ .

9. Izračunajte

$$\oint_K \vec{F} d\vec{r},$$

gdje je  $K$  jedinična kružnica u  $xy$  ravnini parametrizirana s  $\vec{r}(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$  ( $\varphi \in [0, 2\pi]$ ). Polje  $\vec{F}$  zadano je s  $\vec{F}(x, y, z) = (y - z, z - x, xyz)$ .

**Rezultati ispita:** sljedeći radni dan u 13:00 sati

# MATEMATIKA 3

(21. lipnja 2006.)

**Napomena.** Matematika 3A rješava zadatke 1–6; Matematika 3 rješava 1,3, 4, 6, 7, 9; Matematika 3B rješava zadatke 4–9.

1. Metodom bisekcije nađite nultočku funkcije

$$f(x) = \cos x + \frac{1}{x}$$

koja se nalazi na intervalu  $[2.0, 2.5]$ , tako da greška bude manja ili jednaka  $10^{-2}$ .

2. Nađite LR faktorizaciju matrice  $A$  s parcijalnim pivotiranjem, preciznije, nađite matrice  $P$ ,  $L$  i  $R$  takve da je  $PA = LR$ , ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Zadana je diferencijalna jednačba trećeg reda

$$y''' - y'' + 2y' - xy = 3x^2$$

uz početne uvjete  $y(2) = 1$ ,  $y'(2) = 1$ ,  $y''(2) = -2$ . Diferencijalnu jednačbu napišite kao sustav diferencijalnih jednačbi prvog reda.

4. Bacamo dvije igraće kocke. Dobiveni zbroj na njima je 8. Koja je vjerojatnost da je na jednoj od njih (svejedno kojoj) pala 2-ojka?

5. Za slučajnu varijablu  $X$  koja ima normalnu razdiobu  $\mathcal{N}(\mu = 100, \sigma)$  odredite standardnu devijaciju  $\sigma$  tako da vrijedi

$$P(99 < X < 101) = 0.5.$$

6. Predsjednički kandidat  $A$  pobijediti će kandidata  $B$  na predsjedničkim izborima sa 55% glasova.

- a) Kolika je vjerojatnost da slučajni uzorak veličine  $N = 200$  glasača predvidi krivi ishod izbora – odnosno da u tom uzorku  $A$  dobije manje od 50% glasova?  
b) Kolika mora biti veličina uzorka da vjerojatnost krive prognoze izbora bude manja od 5%?

7. Položaji dviju čestica koje se gibaju u prostoru dani su parametrizacijama

$$\vec{r}_1(t) = (2t^3, 1 - t, t^2), \quad \vec{r}_2 = (1 + t, t^2 + 2, t^3).$$

- a) Kolika je međusobna udaljenost čestica u trenutku  $t = 0$ ?  
b) Koja čestica ima veće ubrzanje u trenutku  $t = 1$ ?

8. Neka je  $U$  skalarno polje zadano s  $U = xyz + yz + z - 1$ . Izračunajte

$$\int_K U |d\vec{r}|$$

gdje je  $K$  dužina koja spaja točke  $A(3, 0, 1)$  i  $B(3, 1, 2)$ .

9. Izračunajte

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r}$$

za polje  $\vec{F} = (y^2, zy, xy)$ . Krivulja  $C$  je pozitivno orijentirani rub kvadrata s vrhovima  $(1, 1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(-1, -1)$ ,  $(1, -1)$  u  $xy$ -ravnini.

**Rezultati ispita:** sljedeći radni dan u 13:00 sati

# MATEMATIKA 3

(06. srpnja 2006.)

**Napomena.** Matematika 3A rješava zadatke 1–6; Matematika 3 rješava 1,3, 4, 6, 7, 9; Matematika 3B rješava zadatke 4–9.

1. Funkciju  $\sin x + \operatorname{sh} x$  aproksimiramo u računalu, korištenjem početnih komada Taylorovih redova oko 0 za te funkcije. Članove svakog reda zbrajamo sve dok prvi odbačeni član ne padne ispod zadane točnosti  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Hoće li za  $x = 10$  takva aproksimacija biti približno točna ili ne? Objasnite.
2. Profesor Senilković našao se u problemima, jer je zaboravio je li LR faktorizaciju matrice radio s parcijalnim pivotiranjem ili bez njega. Dobivena matrica  $L$  bila je

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pomozite prof. Senilkoviću i objasnite mu zbog čega je odmah vidljivo je li koristio pivotiranje ili ne.

3. Nađite koliko je podintervala potrebno (po ocjeni greške), a zatim produljenom Simpsonovom metodom izračunajte približnu vrijednost integrala

$$\int_1^2 \left( \frac{x^5}{60} + \frac{x^4}{4} + 2x^2 - x \right) dx$$

tako da greška bude manja od  $10^{-4}$ .

4. Bacamo dvije igraće kocke. Dobiveni zbroj na njima je 8. Koja je vjerojatnost da je na jednoj od njih (svejedno kojoj) pala 2-ojka?
5. Za slučajnu varijablu  $X$  koja ima normalnu razdiobu  $\mathcal{N}(\mu = 100, \sigma)$  odredite standardnu devijaciju  $\sigma$  tako da vrijedi

$$P(99 < X < 101) = 0.5.$$

6. Predsjednički kandidat  $A$  pobijediti će kandidata  $B$  na predsjedničkim izborima sa 55% glasova.
  - a) Kolika je vjerojatnost da slučajni uzorak veličine  $N = 200$  glasača predvidi krivi ishod izbora – odnosno da u tom uzorku  $A$  dobije manje od 50% glasova?
  - b) Kolika mora biti veličina uzorka da vjerojatnost krive prognoze izbora bude manja od 5%?
7. Položaji dviju čestica koje se gibaju u prostoru dani su parametrizacijama

$$\vec{r}_1(t) = (2t^3, 1 - t, t^2), \quad \vec{r}_2 = (1 + t, t^2 + 2, t^3).$$

- a) Kolika je međusobna udaljenost čestica u trenutku  $t = 0$ ?
  - b) Koja čestica ima veće ubrzanje u trenutku  $t = 1$ ?
8. Neka je  $U$  skalarno polje zadano s  $U = xyz + yz + z - 1$ . Izračunajte

$$\int_K U |d\vec{r}|$$

gdje je  $K$  dužina koja spaja točke  $A(3, 0, 1)$  i  $B(3, 1, 2)$ .

9. Izračunajte

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r}$$

za polje  $\vec{F} = (y^2, zy, xy)$ . Krivulja  $C$  je pozitivno orijentirani rub kvadrata s vrhovima  $(1, 1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(-1, -1)$ ,  $(1, -1)$  u  $xy$ -ravnini.

**Rezultati ispita:** sljedeći radni dan u 13:00 sati

# MATEMATIKA 3

(11. rujna 2006.)

**Napomena.** Matematika 3A rješava zadatke 1–6; Matematika 3 rješava 1,3, 4, 6, 7, 9; Matematika 3B rješava zadatke 4–9.

1. Pomoću LR faktorizacije bez pivotiranja riješite sustav:

$$\begin{bmatrix} 10 & 2 & -10 \\ -5 & -4 & 20 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0.2 \end{bmatrix}.$$

2. Za funkciju  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Newtonovom metodom tražimo nultočku na intervalu  $[a, b]$ .

Koje uvjete mora zadovoljavati funkcija  $f$  i interval  $[a, b]$  da bi Newtonova metoda sigurno konvergirala?

Da li su ti uvjeti ispunjeni za funkciju  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$  i interval  $[-2, 1]$ ? A za interval  $[-\frac{1}{2}, 1]$ ?

Objasnite svoje odgovore!

3. Diskretnom metodom najmanjih kvadrata pronađite funkciju oblika

$$y = A \ln x + \ln^2 x$$

koja najbolje aproksimira skup točaka:  $T_1(e, 1)$ ,  $T_2(e^2, 4)$ , i  $T_3(e^3, 6)$ .

4. U sljedećoj tablici prikazana je podjela radnih mjesta u tvrtki ABC po spolu i po odjelima.

	Muškaraca	Žena
Uprava	7	3
Prodaja	10	11
Proizvodnja	25	40

Odredite vjerojatnost da je slučajno odabrana osoba

- član uprave;
- član uprave ako znamo da je žena;
- radnik u proizvodnji;
- radnik u proizvodnji ako znamo da je žena;
- radnik u proizvodnji ili žena.

5. Trudnoća kod ljudi traje u prosjeku 266 dana sa standardnom devijacijom od 14 dana. Uz pretpostavku da se trajanje trudnoće može dobro aproksimirati normalnim modelom odredite koliki postotak trudnoća traje između 270 i 280 dana.

6. Veliki uzorak muške studentske populacije ima prosječnu visinu 180cm. Standardna devijacija ovog uzorka je 5cm. Procijenite srednju visinu muške studentske populacije uz pouzdanost 90%.

7. Ploha  $P$  parametrizirana je s

$$\vec{r}(u, v)(u, u + v, u - v^2).$$

Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na plohu  $P$  koja prolazi točkom  $T(0, 1, -1)$ .

8. Neka je  $U$  skalarno polje zadano s

$$U = xy + yz + zx.$$

Izračunajte

$$\int_K U |d\vec{r}|$$

gdje je  $K$  dužina koja spaja točke  $A(0, 0, 1)$  i  $B(0, 1, 2)$ .

9. Izračunajte volumen tijela parametriziranog s

$$\vec{r} = (ue^w, v - e^w, v)$$

gdje su  $u, v, w \in [0, 1]$ .

**Rezultati ispita:** sljedeći radni dan u 13:00 sati

# MATEMATIKA 3

(21. rujna 2006.)

**Napomena.** Matematika 3A rješava zadatke 1–6; Matematika 3 rješava 1,3, 4, 6, 7, 9; Matematika 3B rješava zadatke 4–9.

## 1. Sustav

$$\begin{aligned}e^{57,34}x - 12,23y + z &= 1,039 \\e^{54,56}x + y + 5,06z &= 0,45 \\x - 3,45y - 0,11z &= -0,39\end{aligned}$$

rješavamo LR-faktorizacijom bez pivotiranja koristeći aritmetiku računala (recimo dvostruku točnost).

Da li će ta metoda dati točan rezultat ili ne?

Objasnite! Ako ne, može li se to nekako poboljšati?

## 2. Nađite interpolacijski polinom u Newtonovoj formi koji interpolira funkciju

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)$$

u točkama sa  $x$ -koordinatama  $-1, 1, 3$  i  $5$ .

Odredite vrijednost tog polinoma u točki  $0$ . Koliko iznosi greška interpolacije u toj točki?

## 3. Diskretnom metodom najmanjih kvadrata pronađite pravac koji prolazi kroz točku $A(0, 2)$ i najbolje aproksimira skup točaka: $T_1(-1, 2)$ , $T_2(1, 3)$ , $T_3(2, 5)$ i $T_4(3, 6)$ .

## 4. Bacamo dvije igraće kocke. Kolika je vjerojatnost da je dobiveni zbroj na njima veći od $7$ . Koja je vjerojatnost za to ako znamo da je na prvoj kockici pala $4$ -orka?

## 5. Za slučajnu varijablu $Z$ koja ima normalnu razdiobu $\mathcal{N}(\mu = 15, \sigma = 2)$ odredite vrijednost $c$ tako da vrijedi da vrijedi

$$P(Z > c) = 0.4.$$

Skicirajte graf distribucije od  $Z$  i na njemu označite površinu koja odgovara ovoj vjerojatnosti.

## 6. Izračunajte vjerojatnost da u $100$ bacanja (pravednog) novčića padne najviše $30$ glava.

## 7. Položaji dviju čestica $A$ i $B$ koje se gibaju u prostoru dani su parametrizacijama

$$\vec{r}_A(t) = (2t^3, 1 - t, t^2), \quad \vec{r}_B = (1 + t, t^2 + 2, t^3).$$

a) Kolika je međusobna udaljenost čestica u trenutku  $t = 0$ ?

b) Koja čestica ima veće ubrzanje u trenutku  $t = 1$ ?

c) Koja je čestica udaljenija od starta u trenutku  $t = 2$ ?

d) Kolika je međusobna udaljenost čestica u trenutku  $t = 3$ ?

## 8. Neka je $U$ skalarno polje zadano s $U = x + y + z + 1$ . Izračunajte

$$\int_K U |d\vec{r}|$$

gdje je  $K$  dužina koja spaja točke  $A(1, 2, 3)$  i  $B(4, 5, 6)$ .

## 9. Izračunajte

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r}$$

za polje  $\vec{F} = (e^y, e^z, xy)$ . Krivulja  $C$  je pozitivno orijentirani rub kvadrata s vrhovima  $(1, 1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(-1, -1)$ ,  $(1, -1)$  u  $xy$ -ravnini.

**Rezultati ispita:** sljedeći radni dan u 13:00 sati

# MATEMATIKA 3

(02. listopada 2006.)

**Napomena:** Matematika 3 rješava 1, 3, 4, 6, 7, 9;

Matematika 3A rješava zadatke 1–6;

Matematika 3B rješava zadatke 4–9.

1. Metodom raspolavljanja nađite rješenje jednadžbe

$$\cos x = 2x$$

na segmentu  $[0, 1]$  s točnošću  $\varepsilon = 4 \cdot 10^{-2}$ .

2. Sustav

$$2x + 5y - 3z = 2$$

$$2x + 5y + 2z = 7$$

$$-x - 2y - z = -4$$

rješite Gaussovom metodom. Da li ta metoda daje rješenje?

Ako ne, objasnite zašto! Koju metodu upotrijebiti da bi dobili rješenje?

3. Odredite Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma koji interpolira funkciju

$$f(x) = \sin\left(x\frac{\pi}{2}\right)$$

u točkama  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \frac{1}{2}$  i  $x_2 = 1$ .

Napomena: Dobiveni polinom nije potrebno uređivati.

4. Od 100 promatranih muškaraca njih 32 je krvne grupe A, 23 krvne grupe B, 38 krvne grupe AB, 7 krvne grupe 0. Od 100 promatranih žena njih 30 je krvne grupe A, 24 krvne grupe B, 22 krvne grupe AB, 24 krvne grupe 0. Kolika je vjerojatnost da je slučajno odabrana osoba među tih 200:

- krvne grupe A ili žena,
- žena i nije krvne grupe A,
- muškarac ako znamo da je krvne grupe A?

5. Bacamo 2 kockice sve dok ne dobijemo istovremeno 2 šestice. Opisati prostor događaja i odrediti funkciju vjerojatnosti. Kolika je vjerojatnost da smo šestice dobili iz 3. puta?

6. U uzorku od 36 studenata prolaznost na ispitu iz Matematike III bila je  $\bar{p} = 20/36\%$ . Procijenite prolaznost (za sve studente) uz pouzdanost  $c = 99.7\%$ ?

7. Položaj točke A koja se giba u prostoru dan je jednadžbom

$$\vec{r}_A(t) = (t^2 + 1, 2t, t^3 - 1), \quad t \geq 0,$$

dok je položaj točke B koja se giba u prostoru dan jednadžbom

$$\vec{r}_B(t) = (t^2 + 1, 2t, t^3 - 1), \quad t \geq 0.$$

- Odredite koja je točka udaljenija od početne točke u trenutku  $t = 3$ ,
- Odredite iznose njihovih brzina u trenutku  $t = 3$ ,
- U kojem je trenutku njihova međusobna udaljenost  $\sqrt{20}$ ?

8. Napišite jednadžbu tangencijalne ravnine u točki  $T(1, 0, 1)$  za plovu

$$\vec{r}(u, v) = (\sin u, \cos u, v), \quad u \in [0, \pi], \quad v \in [0, 2].$$

9. Izračunajte tok

$$\oiint \vec{F} d\vec{P}$$

za polje  $\vec{F} = (1, e^x, y)$  kroz dio ravnine  $x + y + z = 1$  koji se nalazi u prvom oktantu.

**Rezultati ispita:** sljedeći radni dan u 13:00 sati

# MATEMATIKA 3

(01. veljače 2007.)

**Napomena:** Matematika 3 rješava 1, 3, 4, 6, 7, 9;  
Matematika 3A rješava zadatke 1–6;  
Matematika 3B rješava zadatke 4–9.

1. Odredite matrice  $L$ ,  $R$  i  $P$  metodom LR-faktorizacije s parcijalnim pivotiranjem, tako da vrijedi  $LR = PA$ , gdje je matrica  $A$  zadana s

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

2. Metodom raspolavljanja nađite nultočku funkcije

$$f(x) = 3 \ln(x) - 2 + x$$

na intervalu  $[1, 2]$  s točnošću  $\varepsilon = 10^{-2}$ .

3. Izračunajte  $a \in \mathbb{R}$ , ako u diskretnoj metodi najmanjih kvadrata, skup točaka  $T_1(-1, 2)$ ,  $T_2(0, 1)$ ,  $T_3(1, 3)$ ,  $T_4(2, 4)$  aproksimiramo funkcijom oblika

$$\varphi = a \cdot x^2 + x.$$

4. U prvoj kutiji su 4 crne i 1 bijela kuglica, u drugoj su 2 crne i 3 bijele kuglice. Baca se kocka i ako padne broj manji od 3 izvlači se iz prve kutije, a inače iz druge.

- (a) Kolika je vjerojatnost da je izvučena bijela kuglica?  
(b) Ako je izvučena bijela kuglica, kolika je vjerojatnost da je izvučena iz prve kutije?

5. Baca se kocka i izvlači jedna od dviju kuglica na kojima piše broj 1 ili broj 2. Odredite razdiobu slučajne varijable koja je umnožak brojeva na kocki i kuglici

6. Na uzorku od 100 kuglica za kuglične ležajeve dobivena je prosječna težina od 8.1 g. Standardna devijacija uzorka je 0.2 g. Procijenite standardnu težinu kuglica (cijele serije proizvodnje) uz pouzdanost od 99.7%.

7. Da li je polje  $\vec{F} = (2xy + \frac{z}{x}, x^2 + \frac{z}{y}, \ln xy)$  konzervativno? Izračunati  $\int_K \vec{F} d\vec{r}$  od  $A(1, 1, 0)$  do  $B(1, 1, 1)$ .

8. Neka je ploha zadana s  $\vec{r} = (u^2, v^2, e^{uv})$ . Naći vektor normale na tu plohu u točki  $u = 1, v = 0$ .

9. Izračunati površinu dijela paraboloida  $z = x^2 + y^2$  od  $xy$ -ravnine do ravnine  $z = 1$ .

**Rezultati ispita:** sljedeći radni dan u 13:00 sati

# MATEMATIKA 3

(15. veljače 2007.)

**Napomena:** Matematika 3 rješava 1, 3, 4, 6, 7, 9;

Matematika 3A rješava zadatke 1–6;

Matematika 3B rješava zadatke 4–9.

1. Pomoću LR-faktorizacije odredite matrice L i R tako da vrijedi  $A=LR$ , ako je matrica A zadana s

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Metodom raspolavljanja odredite nultočku funkcije

$$f(x) = e^x - 2 \cdot \cos(x)$$

na intervalu  $[0, 1]$ , tako da greška u izračunatom rješenju bude manja ili jednaka od  $\varepsilon = 10^{-2}$ .

3. Odredite jednadžbe za računanje skalara  $a, b \in \mathbb{R}$ , ako u diskretnoj metodi najmanjih kvadrata, ako skup točaka  $(x_k, y_k)$ ,  $k = 0, \dots, n$ , aproksimiramo funkcijom oblika

$$\varphi = a \cdot \ln(x) + b.$$

**Rezultati ispita:** sljedeći radni dan u 13:00 sati

# MATEMATIKA 3

(05. svibnja 2007.)

**Napomena:** Matematika 3 rješava 1, 3, 4, 6, 7, 9;  
Matematika 3A rješava zadatke 1–6;  
Matematika 3B rješava zadatke 4–9.

1. Gaussovom metodom s parcijalnim pivotiranjem riješite sustav

$$\begin{aligned}2x - 3y + 6z &= 5 \\6x - 12z &= -7 \\-4x - 6y + 6z &= 1\end{aligned}$$

2. Odredite zaustavni kriterij za Newtonovu metodu kojom tražimo nultočku funkcije

$$f(x) = -3 + x \cdot \ln x$$

na intervalu  $[1, 3]$  s točnošću  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

Da li je interval  $[\frac{1}{10}, 3]$  pogodan za traženje nultočke istom metodom? Objasnite zašto!

3. Odredite Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma koji prolazi kroz točke

$T_0(-1, 0)$ ,  $T_1(0, 2)$ ,  $T_2(1, 2)$  i  $T_3(2, 0)$ .

4. Nakon prvog bacanja kockice ako smo dobili neparan broj bacamo ju još jednom. Neka je  $Z$  slučajna varijabla koja predstavlja zbroj dobivenih brojeva (odnosno, prvi broj ako smo bacali samo jednom). Odrediti  $Z$  (tj. njenu funkciju vjerojatnosti).
5. Za prethodni zadatak izračunati vjerojatnost da smo iz prvog bacanja dobili 1 na kockici, ako znamo da smo dobili krajnji zbroj  $z = 5$ .
6. U nekom uzorku od 49 ispitanika onih koji imaju alergijske reakcije je 21%. U kojim granicama očekujemo da će se kretati postotak alergičara u populaciji s pouzdanošću 95%?
7. Nađite tangencijalne vektore te napišite jednadžbu tangencijalne ravnine u točki  $T(1, 0, 1)$  na plohu  $z = x^2 + y^3$ .
8. Koji je smjer najveće promjene od  $U = x^2y - \frac{\ln z}{y}$  u  $T(0, 1, 1)$ ?
9. Izračunajte masu tijela omeđenog s  $z = 2x^2 + 2y^2$  i  $z = 1$  u prvom oktantu ( $x > 0$ ,  $y > 0$ ) gustoće  $U = xyz$ .

**Rezultati ispita:** sljedeći radni dan u 13:00 sati

# MATEMATIKA 3

(11. rujna 2007.)

**Napomena:** Matematika 3 rješava 1, 3, 4, 6, 7, 9;  
Matematika 3A rješava zadatke 1–6;  
Matematika 3B rješava zadatke 4–9.

1. Gaussovom metodom sa parcijalnim pivotiranjem riješite sustav:

$$\begin{aligned}x + y - z &= 75 \\2x - 4y + z &= 75 \\-x - y + 2z &= 0\end{aligned}$$

2. Metodom raspolavljanja tražimo rješenja jednadžbe

$$\ln(x) = e^{-x}.$$

- Koliko rješenja ima ta jednadžba?
- Odredite interval u kojem jednadžba ima točno jedno rješenje. Obrazložite odgovor!
- Koliko je koraka najviše potrebno metodi raspolavljanja da na tom intervalu nađe rješenje s točnošću  $\varepsilon = 10^{-3}$ ?

Napomena: Jednadžbu nije potrebno rješavati!

3. Odredite Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma koji interpolira točke  $T_1(-1, 0)$ ,  $T_2(0, 2)$ ,  $T_3(1, 3)$  i  $T_4(2, 2)$ .

4. Nakon prvog bacanja kockice ako smo dobili paran broj bacamo ju još jednom. Neka je  $Z$  slučajna varijabla koja predstavlja razliku dobivenih brojeva (odnosno, prvi broj ako smo bacali samo jednom). Odredite  $Z$  (tj. njenu funkciju vjerojatnosti).

5. Slučajna varijabla  $X$  ima normalnu razdiobu s parametrima  $\mu = 10$ ,  $\sigma = 1$ . Izračunajte vjerojatnost  $pr(9 < X < 9.5)$ !

6. Kolika je vjerojatnost da će u 100 bacanja (pravednog) novčića glava pasti 53 ili više puta?

7. Nađite tangencijalne vektore te napišite jednadžbu tangencijalne ravnine u točki  $T(1, 1, 0)$  na plohu  $z = y^2 - x$ .

8. Koji je smjer najveće promjene skalarnog polja  $U = x^2 + y^2 + z$  u točki  $T(0, 1, 1)$ ?

9. Izračunati površinu dijela paraboloida  $z = x^2 + y^2$  od  $xy$ -ravnine do ravnine  $z = 2$ .

**Rezultati ispita:** sljedeći radni dan u 13:00 sati

# MATEMATIKA 3

(04. rujna 2008.)

**Napomena:** Matematika 3 rješava 1, 3, 4, 6, 7, 9;  
Matematika 3A rješava zadatke 1–6;  
Matematika 3B rješava zadatke 4–9.

1. Pomoću LR faktorizacije s parcijalnim pivotiranjem, za zadanu matricu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

odredite matrice  $L$ ,  $R$  i  $P$ , tako da vrijedi  $LR = PA$ .

2. Metodom raspolavljanja nađite nultočku funkcije

$$f(x) = \ln(x) - 2$$

na intervalu  $[7, 8]$  s točnošću  $\varepsilon = 10^{-3}$ .

3. Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = \frac{a}{x} + 3$$

koja najbolje aproksimira skup točaka:  $T_1(1, 1)$ ,  $T_2(2, 2)$ ,  $T_3(3, 2)$  i  $T_4(4, 1)$ .

4. Iz kutije s 5 plavih, 3 zelene i 4 žute loptice izvlacimo 3 loptice. Kolika je vjerojatnost da smo izvukli po jednu od svake boje? Opišite prostor elementarnih događaja.
5. Neka je  $X$  slučajna varijabla koja predstavlja broj pojava neparnog broja u bacanju 4 kockice. Izračunati očekivanje  $EX$  i varijancu  $\text{Var } X$ .

6. Kolika je vjerojatnost da u 200 bacanja (pravednog) novčića padne barem 110 glava?

7. Nađite tangencijalne vektore te napišite jednadžbu tangencijalne ravnine u točki  $T(1, 0, 2)$  na plohu  $z = 2x^2 + 3y^3$ .

8. Tijelo  $V$  je parametrizirano s

$$\vec{r}(u, v, w) = (u, u + v, u + w), \quad u, v, w \in [0, 1].$$

Izračunajte

$$\iiint_V dV.$$

9. Izračunajte rot  $\vec{F}$  i div  $\vec{F}$  ako je

$$\vec{F}(\vec{r}) = (x + y^2, y + z^2, z + x^2).$$

**Rezultati ispita:** sljedeći radni dan u 13:00 sati