

Kolokviji i pismeni ispiti

Sadržaj

Matematika 3	2
Kolokviji	3
prvi kolokvij, 17.11.2003.	4
prvi kolokvij, 17.11.2003.	5
prvi kolokvij, 17.11.2003.	6
prvi kolokvij, 17.11.2003.	7
drugi kolokvij, 22.12.2003.	8
drugi kolokvij, 22.12.2003.	9
drugi kolokvij, 22.12.2003.	10
drugi kolokvij, 22.12.2003.	11
treći kolokvij, 02. 02. 2004.	12
treći kolokvij, 02. 02. 2004.	13
drugi ponovljeni kolokvij, 06.02.2004.	14
kolokvij iz vjerojatnosti i statistike, 17.12.2004.	15
kolokvij iz vjerojatnosti i statistike, 17.12.2004.	16
kolokvij iz vektorske analize, 01.02.2004.	17
kolokvij iz vektorske analize, 01.02.2004.	18
ponovljeni kolokvij iz vjerojatnosti i statistike, 04.02.2005.	19
Pismeni ispiti	20
01. Listopad 2003.	21
07. Studeni, 2003.	22
16. Siječanj, 2004.	23
10. Veljače, 2004.	24
19. Studeni, 2004.	25
01. Listopad 2003.	26
07. Studeni, 2003.	27
16. Siječanj, 2004.	28
10. Veljače, 2004.	29
19. Studeni, 2004.	30
01. Veljače 2005.	31
01. Veljače, 2005.	32

Matematika 3

Kolokviji iz matematike 3

A1

MATEMATIKA 3

(prvi kolokvij, 17.11.2003.)

1. Izračunati:

$$\operatorname{Re} \left(i(e^i + e^{i\frac{\pi}{3}}) \right).$$

(10 bodova)

2. Skiciraj područje u kompleksnoj ravnini za koje vrijedi

$$\operatorname{Im}(iz) < \operatorname{Re}(iz).$$

(10 bodova)

3. Nađi sva rješenja jednadžbe

$$z^2 + iz + \frac{i-1}{4} = 0.$$

(15 bodova)

4. Odredi kako funkcija e^z preslikava područje $0 < \operatorname{Im} z < \pi$.

(20 bodova)

5. Riješi jednadžbu

$$\sin 2z = \sqrt{3}.$$

(20 bodova)

6. Ispitaj gdje je funkcija $e^z(\bar{z} + z)$ analitička.

(10 bodova)

7. Odredite sliku skupa $|z - 1| < \frac{1}{2}$ preslikavanjem

$$\frac{2z}{z-1}.$$

(15 bodova)

B1

MATEMATIKA 3

(prvi kolokvij, 17.11.2003.)

1. Izračunati:

$$\operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{81} + (i^{99} + i^{55} + i^{11} + i) \right\}.$$

(10 bodova)

2. Skiciraj područje u kompleksnoj ravnini za koje vrijedi

$$\arg \frac{z}{i-1} = \frac{\pi}{6}.$$

(10 bodova)

3. Nađi sva rješenja jednadžbe

$$z^2 + i\sqrt{3}z + 1 = 0.$$

(15 bodova)

4. Odredi kako funkcija z^2 preslikava područje za koje vrijedi $0 < |z| < 2$ i $\arg z < \frac{3}{4}\pi$.

(15 bodova)

5. Riješi jednadžbu

$$\cos z = i\sqrt{2}.$$

(20 bodova)

6. Ispitaj gdje je funkcija

$$e^{\operatorname{Re} z} (\cos(\operatorname{Im} z) + i \sin(\operatorname{Im} z))$$

analitička.

(10 bodova)

7. Odredite sliku skupa $|z + 2i| > 4$ preslikavanjem

$$\frac{3z}{z+1}.$$

(20 bodova)

A2

MATEMATIKA 3

(prvi kolokvij, 17.11.2003.)

1. Izračunati:

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{1 + \sqrt{3}i} \right)^{24}.$$

(10 bodova)

2. Skicirati u ravnini područje omeđeno s:

$$2 \leq |z + 2| \leq 3, \quad \pi/3 \leq \text{Arg } z \leq 2\pi/3.$$

(10 bodova)

3. Naći sva rješenja jednadžbe:

$$z^2 - 4iz + \frac{9}{4} = 0.$$

(15 bodova)

4. Odrediti kako funkcija

$$f(z) = e^{\pi i/4} z - 1$$

preslikava pravac $z + \bar{z} = 6$.

(20 bodova)

5. Odrediti kako funkcija

$$f(z) = e^z$$

preslikava područje $\frac{\pi}{2} \leq \text{Im } z \leq \pi$.

(15 bodova)

6. Naći sva rješenja jednadžbe

$$\text{ch}(2z) = 4.$$

(20 bodova)

7. Ispitati gdje je funkcija

$$f(z) = \frac{z + 2}{(z - 1)(z + 2)}$$

analitička i ako je moguće odrediti njenu derivaciju.

(10 bodova)

B2

MATEMATIKA 3

(prvi kolokvij, 17.11.2003.)

1. Odrediti z ako vrijedi:

$$\operatorname{Arg}(2z + i) = \frac{\pi}{4}, \quad |2z + i| = 4.$$

(10 bodova)

2. Skicirati u ravnini područje omeđeno s:

$$|z - 2 + i| \geq 3, \quad \frac{3\pi}{2} \leq \operatorname{Arg} z \leq 2\pi.$$

(10 bodova)

3. Naći sva rješenja jednadžbe:

$$z^2 - 3iz + 4 = 0.$$

(15 bodova)

4. Odrediti kako funkcija

$$f(z) = \frac{z + i}{z - i}$$

preslikava krivulju $|z| = 1$.

(20 bodova)

5. Odrediti kako funkcija

$$f(z) = \operatorname{Ln} z$$

preslikava područje $2 \leq |z| \leq 3$.

(15 bodova)

6. Naći sva rješenja jednadžbe

$$\sin(iz) = i.$$

(20 bodova)

7. Ispitati gdje je funkcija

$$f(z) = \frac{\sin z}{z + i + 1}$$

analitička i ako je moguće odrediti njenu derivaciju.

(10 bodova)

A1**MATEMATIKA 3**

(drugi kolokvij, 22.12.2003.)

1. Izračunajte: (15)

$$\int_C \ln z \, dz,$$

gdje je krivulja C gornja polukružnica sa središtem u ishodištu koja spaja točke -1 i 1 .**2. Izračunajte:** (20)

$$\int_C \frac{e^{2z}}{(z-i)(z-1)} dz,$$

$$C \equiv |z-1| = 1.$$

3. Razvijte u Taylorov red oko točke $z_0 = 0$: (15)

$$f(z) = \frac{1}{(1+z)^3}.$$

4. Odredi singularitete funkcije i njihov tip: (15)

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^3}.$$

5. Razvijte funkciju u Laurentov red oko točke $z_0 = 2$: (15)

$$f(z) = \frac{z+1}{(z-2)^2(z-1)}.$$

6. Odredite radijus područja konvergencije Laurentovog razvoja oko $z_0 = 2i$: (20)

$$f(z) = \frac{1}{\sin z}.$$

B1**MATEMATIKA 3**

(drugi kolokvij, 22.12.2003.)

1. Izračunajte: (15)

$$\int_C \ln z \, dz,$$

gdje je krivulja C lijeva polukružnica sa središtem u ishodištu koja spaja točke i i $-i$.

2. Izračunajte: (20)

$$\int_C \frac{e^{iz}}{(z+1)(z-i)} dz,$$

$$C \equiv |z+1| = 1.$$

3. Razvijte u Taylorov red oko točke $z_0 = 0$: (15)

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

4. Odredi singularitete funkcije i njihov tip: (15)

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^2}.$$

5. Razvijte funkciju u Laurentov red oko točke $z_0 = -1$: (15)

$$f(z) = \frac{z-1}{(z+1)^2(z+2)}.$$

6. Odredite radijus područja konvergencije Laurentovog razvoja oko $z_0 = 3 + \frac{\pi}{2}i$: (20)

$$f(z) = \frac{1}{\cos iz}.$$

A2

MATEMATIKA 3

(drugi kolokvij, 22.12.2003.)

1. Izračunajte:

$$\int_C \frac{1}{z-2} dz,$$

gdje je C polukružnica sa središtem u ishodištu koja spaja točke $-i$ i i .

(20 bodova)

2. Izračunajte:

$$\oint_C ze^{z^2} dz,$$

gdje je C kvadrat s vrhovima u $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$.

(15 bodova)

3. Razvijte u Taylorov red oko točke $z_0 = 2$:

$$f(z) = ze^{z^2}.$$

(15 bodova)

4. Odredi singularitete funkcije i njihov tip:

$$f(z) = z \sin \frac{1}{z}.$$

(15 bodova)

5. Razvijte funkciju u Laurentov red na području $0 < |z-2| < \frac{3}{2}$:

$$f(z) = \frac{z-1}{(z-2)(2z+1)}.$$

(20 bodova)

6. Odredite radijus područja konvergencije Laurentovog razvoja oko $z_0 = -1$:

$$f(z) = \frac{z^2}{\ln(2+z)}.$$

(15 bodova)

B2

MATEMATIKA 3

(drugi kolokvij, 22.12.2003.)

1. Izračunajte:

$$\int_C \cos z + i \sin z \, dz,$$

gdje je C najkraća spojnica točke 1 i $2i$.

(15 bodova)

2. Izračunajte:

$$\oint_C \frac{e^{-z}}{(z+1)^3} dz,$$

$C \equiv |z+1| = 1$.

(20 bodova)

3. Razvijte u Taylorov red oko točke $z_0 = 0$:

$$f(z) = \ln(z^2 + 5z + 6) .$$

(15 bodova)

4. Odredi singularitete funkcije i njihov tip:

$$f(z) = ze^{\frac{1}{z+2}} .$$

(15 bodova)

5. Razvijte funkciju u Laurentov red na području $0 < |z-3| < 6$:

$$f(z) = \frac{1}{(z+3)(z-3)} .$$

(20 bodova)

6. Odredite radijus područja konvergencije Laurentovog razvoja oko $z_0 = -1$:

$$f(z) = \frac{1}{3z+2} e^{\frac{1}{z}} .$$

(15 bodova)

A**MATEMATIKA 3**

(treći kolokvij, 02. 02. 2004.)

1. Izračunajte sve reziduume funkcije:

$$f(z) = \frac{e^{2z}}{(z+1)^3}.$$

(20 bodova)

2. Izračunajte:

$$\oint_C \frac{z-1}{(z^2+2z+2)^2} dz,$$

gdje je C kvadrat s vrhovima u $0, -2, -2-2i, -2i$.

(25 bodova)

3. Izračunajte:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2} d\varphi}{3 + \cos \varphi}.$$

(20 bodova)

4. Izračunajte:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx.$$

(25 bodova)

5. Zadan je kompleksni potencijal $F(z) = 3z^2 - 2i$. Odrediti jednadžbe ekvipotencijalnih krivulja, strujnica te ih skicirati u kompleksnoj ravnini. Također, odrediti brzinu $v(z)$.

(10 bodova)

B**MATEMATIKA 3**

(treći kolokvij, 02. 02. 2004.)

1. Izračunajte sve reziduume funkcije:

$$f(z) = \frac{e^{-z}}{(z-1)^3}.$$

(20 bodova)

2. Izračunajte:

$$\oint_C \frac{2-z}{(z^2+2z+2)^2} dz,$$

gdje je C kvadrat s vrhovima u $0, -2, -2+2i, 2i$.

(25 bodova)

3. Izračunajte:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2} d\varphi}{3 - \cos \varphi}.$$

(20 bodova)

4. Izračunajte:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+1)(x^2+9)} dx.$$

(25 bodova)

5. Odrediti jednadžbu strujanja topline za područje određeno zrakama $\phi = \frac{\pi}{3}$ i $\phi = -\frac{\pi}{3}$ gdje se krak $\phi = \frac{\pi}{3}$ grije na 30°C , a $\phi = -\frac{\pi}{3}$ na 60°C .

(10 bodova)

MATEMATIKA 3

(drugi ponovljeni kolokvij, 06.02.2004.)

1. Izračunajte:

$$\int_C (\ln z + z) dz,$$

gdje je krivulja C gornja polukružnica radijusa $r = 3$, sa središtem u ishodištu koja spaja točke -3 i 3 .

(15 bodova)

2. Izračunajte:

$$\int_C \frac{e^{z^2}}{(z - 2i)(z - 1)} dz,$$

gdje je C kružnica radijusa $r = 1$ oko $z_0 = 1$.

(20 bodova)

3. Razvijte u Taylorov red oko točke $z_0 = 0$:

$$f(z) = \frac{1}{2 + 3z}.$$

(15 bodova)

4. Odredi singularitete funkcije i njihov tip:

$$f(z) = \frac{\sin(z - 1)}{(z - 1)^3}.$$

(15 bodova)

5. Razvijte funkciju u Laurentov red oko točke $z_0 = 2$:

$$f(z) = \frac{z + 1}{(z - 2)^7(z - 3)}.$$

(15 bodova)

6. Odredite radijus područja konvergencije Laurentovog razvoja oko $z_0 = 1 + 4i$:

$$f(z) = \frac{1}{\cos(z + 1)}.$$

(20 bodova)

A**MATEMATIKA 3**

(kolokvij iz vjerojatnosti i statistike, 17.12.2004.)

1. Bacamo dvije kockice - jedna ima redom brojeve 1, 2, 2, 3, 3, 3 na svojim stranicama, druga na stranicama ima ispisane brojeve 2, 2, 4, 4, 4, 4. Odredite prostor elementarnih događaja i izračunajte vjerojatnost da je zbroj na kockicama 5.
(15 bodova)
2. Pouzdanost testa na bolest B je 90%. Učestalost bolesti u općoj populaciji je 1%. Koja je vjerojatnost da osoba koja je pozitivna na test zaista boluje od bolesti B ?
(15 bodova)
3. Ante i Boris gađaju metu. Ante pogađa sa vjerojatnošću 0.5, Boris sa vjerojatnošću 0.2. Ante gađa dvaput, Boris samo jednom. Nađi funkciju razdiobe i očekivanje za slučajnu varijablu X koja broji ukupan broj pogodaka za obojicu.
(15 bodova)
4. Neka je $f(x)$ gustoća slučajne varijable X , zadana s ax^2 na intervalu $(0, \pi)$, a 0 inače. Odredite parametar a , izračunati EX , $\text{Var } X$ i $p(\frac{\pi}{4} \leq X \leq \frac{\pi}{2})$.
(15 bodova)
5. Kontrola provjerava aparate. Aparat ima defekt s vjerojatnošću 0.04. Radimo uzorke od po 100 proizvoda. Kolika je vjerojatnost da u uzorku imamo između 2 i 6 defektnih proizvoda? (tj. da je proporcija između 0.02 i 0.06)
(20 bodova)
6. Na uzorku od 30 kolokvija iz matematike dobivena je srednja prolaznost $\bar{X} = 0.63$. Uz pretpostavljenu standardnu devijaciju od 0.08 odredite granice za očekivanu prolaznost na kolokvijima s pouzdanošću od 99%.
(20 bodova)

B**MATEMATIKA 3**

(kolokvij iz vjerojatnosti i statistike, 17.12.2004.)

1. Bacaju se istovremeno novčić i 2 kocke. Odredite prostor elementarnih događaja i izračunajte vjerojatnost da je dobivena glava i bar jedna šestica.
(15 bodova)
2. Od djece neke osnovne škole $\frac{3}{7}$ ih se upisalo u gimnaziju, $\frac{2}{7}$ u neku tehničku školu i $\frac{2}{7}$ u preostale škole. Među gimnazijalcima ih je 35% odlikaša, dok ih je u tehničkim školama i preostalim školama po 21%. Kolika je vjerojatnost da je odabrani odlikaš učenik tehničke škole?
(15 bodova)
3. Kutija sadrži 2 bijele i 3 plave kuglice. Izvlačimo jednu po jednu dok ne izvučemo i drugu bijelu. Neka je slučajna varijabla X broj takvih izvlačenja. Naći funkciju razdiobe za X .
(15 bodova)
4. Slučajna varijabla X ima gustoću $f(x) = \frac{a}{x}$ na intervalu $(1, e)$, inače $f(x) = 0$. Odrediti a i izračunati očekivanje i varijancu za varijablu X . Izračunajte $p(X > \frac{e}{2})$.
(15 bodova)
5. Prosječna masa odraslog muškarca iznosi 80kg uz standardnu devijaciju od 10kg. Kolika je vjerojatnost da uzorak od 50 ljudi ima prosječnu masu ispod 79kg?
(20 bodova)
6. U uzorku od 100 studenata druge godine FSB-a njih 63 je položilo matematiku III preko kolokvija. Odrediti očekivanu proporciju svih studenata druge godine koji će ispit položiti preko kolokvija s pouzdanošću od 90%?
(20 bodova)

A**MATEMATIKA 3**

(kolokvij iz vektorske analize, 01.02.2004.)

1. Za gibanje opisano parametrizacijom $\vec{r}(t) = (t^2, t - \sin t, \cos t)$ odredite \vec{v} i \vec{a} .

(15 bodova)

2. Odredite vektor normale na plohu $z = 1 - y^2$ u točki $P(1, 0, 1)$.

(15 bodova)

3. Neka je U skalarno polje zadano s $U = x^2 - yz$. Izračunajte

$$\int_A^B U |d\vec{r}|$$

duž pravca koji spaja točke $A(1, 0, 0)$ i $B(0, 2, 2)$.

(15 bodova)

4. Odredite funkciju $\varphi(z)$ tako da za skalarno polje $U = xy + \varphi(z)$ i vektorsko polje $\vec{F} = (y, x, 3z^2)$ vrijedi

$$\nabla U = \vec{F}.$$

(15 bodova)

5. Neka je ploha P parametrizirana s $\vec{r}(u, v) = (u, v, u^4)$, $u, v \in [0, 1]$. Izračunajte

$$\iint_P \vec{F} d\vec{P}$$

gdje je \vec{F} vektorsko polje zadano s $\vec{F} = (0, xy, 2x + 2y)$.

(20 bodova)

6. Izračunajte volumen cilindra radijusa $r = 2$ i visine $h = 5$ parametriziranog s

$$\vec{r}(u, v, w) = (u \cos v, w, u \sin v).$$

(20 bodova)

B**MATEMATIKA 3**

(kolokvij iz vektorske analize, 01.02.2004.)

1. Neka je krivulja zadana parametrizacijom $\vec{r}(t) = (\cos t, t - \sin t, t \cos t)$. Odredite $\frac{d\vec{r}}{dt}$ i $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ u točki sa koordinatom $t = 2$.

(15 bodova)

2. Ploha P parametrizirana je s

$$\vec{r}(u, v) = (u, 1 + \cos u, uv).$$

Odredite tangencijalne krivulje plohe \vec{r}_u i \vec{r}_v na plohi P koje prolaze točkom s koordinatama

$$u = \frac{\pi}{2}, v = 1.$$

(15 bodova)

3. Neka je U skalarno polje zadano s $U = x^3y^2z$. Izračunajte

$$\int_K U |d\vec{r}|$$

gdje je K dužina koja spaja točke $A(0, 0, 1)$ i $B(1, 2, 3)$.

(15 bodova)

4. Izračunajte

$$\oint_K \vec{F} d\vec{r},$$

gdje je K jedinična kružnica u xy ravnini, a polje $\vec{F} = (x, -y, z)$.

Da li \vec{F} može biti potencijalno polje?

(15 bodova)

5. Neka je P dio plohe $z = x^4$ za koji je $x \in [0, 1]$ i $y \in [0, 2]$. Izračunajte

$$\iint_P \vec{F} d\vec{P}$$

gdje je \vec{F} vektorsko polje zadano s $\vec{F} = (0, xy, 2x + 2y)$.

(20 bodova)

6. Izračunajte volumen tijela parametriziranog s

$$\vec{r}(u, v, w) = (1 + w, 2 + u \cos v, 3 + u \sin v),$$

gdje je $u \in [0, 1]$, $v \in [0, \pi/2]$, $w \in [0, 1]$.

(20 bodova)

MATEMATIKA 3

(ponovljeni kolokvij iz vjerojatnosti i statistike, 04.02.2005.)

1. Strijelac gađa metu s vjerojatnošću 0.7. Vršiti 5 uzastopnih gađanja. Opisati prostor događaja i odrediti vjerojatnost da je pogodio cilj barem 4 puta.
(15 bodova)
2. Matematiku 3 (statistika, numerika, vektorska) sluša 25% studenata, matematiku 3A (numerika, statistika) 40%, matematiku 3B (statistika, vektorska) 35%. Koja je vjerojatnost da odabrani student koji sluša vektorsku analizu ima upisanu matematiku 3B?
(15 bodova)
3. U kutiji su 3 plave i 2 zelene kuglice. Izvlačimo kuglice dok ne izvučemo zelenu, pri tom ako smo izvukli plavu vraćamo je u kutiju. Opisati zakon vjerojatnosti za slučajnu varijablu X koja predstavlja broj izvlačenja.
(15 bodova)
4. Neka je $f(x) = ce^x$ funkcija gustoće slučajne varijable X na intervalu $(0, \ln 2)$, drugdje je ona 0. Odrediti c , EX , $\text{Var } X$.
(15 bodova)
5. Vjerojatnost gripe u nekom razdoblju je $p = 0.03$. Naći vjerojatnost da je u uzorku od 200 ljudi najmanje 5 i najviše 8 razboljelih.
(20 bodova)
6. U 30 gradova je dobiveno da politički kandidat ima udio od $\bar{X} = 0.61$ glasača. Uz standardnu devijaciju od 0.07 odrediti granice za očekivani udio glasača u nekom gradu s pouzdanošću od 95%.
(20 bodova)

Pismeni ispiti iz matematike 3

MATEMATIKA 3

(01. Listopad 2003.)

1. Izračunati:

$$z^5 + 2z^3 + z = 0.$$

2. Preslikavanjem

$$f(z) = z^3$$

preslikati područje kompleksnih brojeva z za koje vrijedi $0 < |z| < 1$ i $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$.

3. Razviti funkciju

$$f(z) = \frac{1}{z} + z + e^{\frac{1}{z}} + e^z$$

u Laurentov red na području $|z| > 0$. Odredite reziduum dobivenog Laurentovog reda.

4. Provjerite je li funkcija $f(z) = 2\bar{z} + 1$ analitička na cijeloj kompleksnoj ravnini.

5. Izračunati

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4x + 5)^2}.$$

6. Koristeći Cauchyjevu integralnu formulu izračunajte

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z-1},$$

gdje je Γ kružnica radijusa 3 oko točke $z = \pi$.

MATEMATIKA 3

(07. Studeni, 2003.)

1. Izračunati:

$$z^2 + (1 + i)z + \frac{i}{4} = 0.$$

2. Preslikavanjem

$$f(z) = z^2 + 1$$

preslikati područje kompleksnih brojeva z za koje vrijedi $0 < |z| < 1$ i $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$.

3. Razvijte funkciju $f(z) = \sin \frac{1}{z}$ u Laurentov red na području $|z| > 0$. Odredite reziduum dobivenog reda.

4. Provjerite je li funkcija $f(z) = 2z(\bar{z})^2 + 2z^3 + 1$ analitička na cijeloj kompleksnoj ravnini.

5. Izračunati

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + \sqrt{3}x + 1)^2}.$$

6. Izračunati

$$\int z \sin z \, dz$$

po trokutu s vrhovima $z_0 = -1 - i$, $z_1 = 1 - i$ i $z_2 = i$.

MATEMATIKA 3

(16. Siječanj, 2004.)

1. Riješi jednađbu:

$$z^2 + \frac{i}{4} = (1 + i)z.$$

2. Provjerite je li funkcija $f(z) = (\bar{z})^2 + 1$ analitička na cijeloj kompleksnoj ravnini.

3. Izračunaj:

$$\int_C i \cos iz \, dz ,$$

gdje je C najkraća spojnica točaka 0 i $2\pi i$.

4. Razvij u Laurentov red oko $z = 1$ funkciju

$$f = \frac{1}{(z - 1)(z - 7)} ,$$

na području u kojem se nalazi $z = 0$.

5. Odredi singularitete funkcije i njihov tip:

$$f(z) = \sin z^2 + \sin \frac{1}{z^2} .$$

6. Izračunaj:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^2} .$$

MATEMATIKA 3

(10. Veljače, 2004.)

1. Izračunati:

$$z^4 + 2z^2 + 1 = 0.$$

2. Izračunaj:

$$\int_C (2 + i) \sin iz \, dz ,$$

gdje je C najkraća spojnica točaka 0 i $2\pi i$.

3. Razvij u Laurentov red oko $z = 1$ funkciju

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^8(z-8)},$$

na području u kojem se nalazi $z = 0$.

4. Odredite radijus područja konvergencije Laurentovog razvoja oko $z_0 = \pi + 2i$:

$$f(z) = \tan z .$$

5. Izračunajte sve reziduume funkcije:

$$f(z) = \frac{e^{-z^2}}{(z-1)(z-2)^3}.$$

6. Izračunati

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4x + 5)^2} .$$

MATEMATIKA 3

(19. Studeni, 2004.)

1. Riješi jednađbu:

$$(z + i)^2 + 2i(z + i) - 1 = 0.$$

2. Preslikavanjem

$$f(z) = z^2 + 1$$

preslikati područje kompleksnih brojeva z za koje vrijedi $0 < |z| < 1$ i $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$.

3. Razvijte funkciju $f(z) = \frac{1}{z} + \cos \frac{1}{z}$ u Laurentov red na području $|z| > 0$. Odredite reziduum dobivenog reda.

4. Korištenjem Cauchy-Riemannovih uvjeta provjerite je li funkcija $f(z) = z(\bar{z})^2 + z^2(\bar{z})$ analitička na cijeloj kompleksnoj ravnini.

5. Izračunati

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 9)^2}.$$

6. Izračunati

$$\int z \sin z \, dz$$

po rubu trokuta s vrhovima $z_0 = -10 - i$, $z_1 = 10 - i$ i $z_2 = 20i$ u pozitivnom smjeru.

MATEMATIKA 3

(01. Listopad 2003.)

1. Izračunati:

$$z^5 + 2z^3 + z = 0.$$

2. Preslikavanjem

$$f(z) = z^3$$

preslikati područje kompleksnih brojeva z za koje vrijedi $0 < |z| < 1$ i $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$.

3. Razviti funkciju

$$f(z) = \frac{1}{z} + z + e^{\frac{1}{z}} + e^z$$

u Laurentov red na području $|z| > 0$. Odredite reziduum dobivenog Laurentovog reda.

4. Provjerite je li funkcija $f(z) = 2\bar{z} + 1$ analitička na cijeloj kompleksnoj ravnini.

5. Izračunati

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4x + 5)^2}.$$

6. Koristeći Cauchyjevu integralnu formulu izračunajte

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z-1},$$

gdje je Γ kružnica radijusa 3 oko točke $z = \pi$.

MATEMATIKA 3

(07. Studeni, 2003.)

1. Izračunati:

$$z^2 + (1 + i)z + \frac{i}{4} = 0.$$

2. Preslikavanjem

$$f(z) = z^2 + 1$$

preslikati područje kompleksnih brojeva z za koje vrijedi $0 < |z| < 1$ i $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$.

3. Razvijte funkciju $f(z) = \sin \frac{1}{z}$ u Laurentov red na području $|z| > 0$. Odredite reziduum dobivenog reda.

4. Provjerite je li funkcija $f(z) = 2z(\bar{z})^2 + 2z^3 + 1$ analitička na cijeloj kompleksnoj ravnini.

5. Izračunati

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + \sqrt{3}x + 1)^2}.$$

6. Izračunati

$$\int z \sin z \, dz$$

po trokutu s vrhovima $z_0 = -1 - i$, $z_1 = 1 - i$ i $z_2 = i$.

MATEMATIKA 3

(16. Siječanj, 2004.)

1. Riješi jednađbu:

$$z^2 + \frac{i}{4} = (1 + i)z.$$

2. Provjerite je li funkcija $f(z) = (\bar{z})^2 + 1$ analitička na cijeloj kompleksnoj ravnini.

3. Izračunaj:

$$\int_C i \cos iz \, dz ,$$

gdje je C najkraća spojnica točaka 0 i $2\pi i$.

4. Razvij u Laurentov red oko $z = 1$ funkciju

$$f = \frac{1}{(z - 1)(z - 7)} ,$$

na području u kojem se nalazi $z = 0$.

5. Odredi singularitete funkcije i njihov tip:

$$f(z) = \sin z^2 + \sin \frac{1}{z^2} .$$

6. Izračunaj:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^2} .$$

MATEMATIKA 3

(10. Veljače, 2004.)

1. Izračunati:

$$z^4 + 2z^2 + 1 = 0.$$

2. Izračunaj:

$$\int_C (2 + i) \sin iz \, dz,$$

gdje je C najkraća spojnica točaka 0 i $2\pi i$.

3. Razvij u Laurentov red oko $z = 1$ funkciju

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^8(z-8)},$$

na području u kojem se nalazi $z = 0$.

4. Odredite radijus područja konvergencije Laurentovog razvoja oko $z_0 = \pi + 2i$:

$$f(z) = \tan z.$$

5. Izračunajte sve reziduume funkcije:

$$f(z) = \frac{e^{-z^2}}{(z-1)(z-2)^3}.$$

6. Izračunati

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4x + 5)^2}.$$

MATEMATIKA 3

(19. Studeni, 2004.)

1. Riješi jednadžbu:

$$(z + i)^2 + 2i(z + i) - 1 = 0.$$

2. Preslikavanjem

$$f(z) = z^2 + 1$$

preslikati područje kompleksnih brojeva z za koje vrijedi $0 < |z| < 1$ i $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$.

3. Razvijte funkciju $f(z) = \frac{1}{z} + \cos \frac{1}{z}$ u Laurentov red na području $|z| > 0$. Odredite reziduum dobivenog reda.

4. Korištenjem Cauchy-Riemannovih uvjeta provjerite je li funkcija $f(z) = z(\bar{z})^2 + z^2(\bar{z})$ analitička na cijeloj kompleksnoj ravnini.

5. Izračunati

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 9)^2}.$$

6. Izračunati

$$\int z \sin z \, dz$$

po rubu trokuta s vrhovima $z_0 = -10 - i$, $z_1 = 10 - i$ i $z_2 = 20i$ u pozitivnom smjeru.

MATEMATIKA 3

(01. Veljače 2005.)

Napomena. Ovo je pismene zadaća za studente koji su slušali matematiku 3 (gradivo kompleksne analize) 2003/2004. ili ranijih godina.

1. Riješi jednađbu:

$$z^2 + \frac{i}{4} = (1 + i)z.$$

2. Preslikavanjem

$$f(z) = z^3$$

preslikati područje kompleksnih brojeva z za koje vrijedi $0 < |z| < 1$ i $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$.

3. Razviti funkciju

$$f(z) = \frac{1}{z} + z + e^{\frac{1}{z}} + e^z$$

u Laurentov red na području $|z| > 0$. Odredite reziduum dobivenog Laurentovog reda.

4. Provjerite je li funkcija $f(z) = 2z(\bar{z})^2 + 2z^3 + 1$ analitička na cijeloj kompleksnoj ravnini.

5. Izračunati

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4x + 5)^2}.$$

6. Koristeći Cauchyjevu integralnu formulu izračunajte

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z-1},$$

gdje je Γ kružnica radijusa 3 oko točke $z = \pi$.

MATEMATIKA 3

(01. Veljače, 2005.)

Napomena. Matematika 3A rješava zadatke 1–6; Matematika 3 rješava 1,3, 4, 6, 7, 9; Matematika 3B rješava zadatke 4-9.

1. Poznata je LR faktorizacija (s parcijalnim pivotiranjem) matrice $PA = LR$, gdje su

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ & 4 & 0 \\ & & 4 \end{bmatrix}.$$

Korištenjem te faktorizacije nađite rješenje sustava $Ax = b$, ako je

$$b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. Nađite interpolacijski polinom u Newtonovoj formi, koji interpolira funkciju

$$f(x) = \log_{10} x$$

u točkama s x -koordinatama 0.1, 1 i 10. Nađite vrijednost tog polinoma u točki 5.

3. Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nađite parabolu koja prolazi točkom $A = (0, 2)$ i u točki A ima derivaciju jednaku 4, a aproksimira skup podataka (x_k, f_k) , $k = 0, \dots, n$.

4. Iz kutije s 5 plavih, 3 zelene i 4 žute loptice izvlačimo 3 loptice. Kolika je vjerojatnost da smo izvukli po jednu od svake boje? Opišite prostor elementarnih događaja.

5. Strijelac gađa metu. Pogodak u središnji krug iznosi 10 bodova, pogodak u vanjski krug 5 bodova, a sve ostalo je promašaj (0 bodova). Strijelac gađa središnji krug s vjerojatnošću 0.4, vanjski s vjerojatnošću 0.5, te promašuje s vjerojatnošću 0.1. Strijelac gađa 2 puta. Napravite zakon razdiobe (funkciju vjerojatnosti) za slučajnu varijablu X koja predstavlja ukupan broj bodova strijelca nakon dva gađanja. Izračunajte očekivanje EX .

6. Kolika je vjerojatnost da u 200 bacanja (pravednog) novčića padne barem 105 glava?

7. Odredite vektor normale na plohu $z = 1 - y^2$ u točki $P(1, 0, 1)$.

8. Odredite funkciju $\varphi(z)$ tako da za skalarno polje $U = xy + \varphi(z)$ i vektorsko polje $\vec{F} = (y, x, 3z^2)$ vrijedi

$$\nabla U = \vec{F}.$$

9. Izračunajte volumen tijela parametriziranog s

$$\vec{r}(u, v, w) = (1 + w, 2 + u \cos v, 3 + u \sin v),$$

gdje je $u \in [0, 1]$, $v \in [0, \pi/2]$, $w \in [0, 1]$.