MATEMATIKA 3

(vektorska analiza, tjedan 1)

ime i prezime	

1. Parametrizirajte gibanje po pravcu od točke $A(0,1,2)$ do točke $B(-1,-2,-3)$. Obavezno navedite granice u kojima se nalazi parametar t.

2. Gibanje čestice u vremenu (u sekundama) dano je parametrizacijom

$$\vec{r}(t) = (2\cos\frac{\pi}{2}t, t^2/2 + t, \sin\pi t).$$

a) U kojem se trenutku t čestica nalazi u točki $(2,12,0)$?
b) Koliko se čestica udaljila od početnog položaja $\vec{r}(0)$ nakon 5 sekundi?
c) Koja je brzina čestice u trenutku $t = 5$?

3. Skalarno polje $U(x,y,z) = 2x + y - z$ opisuje temperaturu u proizvoljnoj točki prostora. Odredite:

a) Temperaturu u točki $T(-1,5,2)$
b) Temperaturu u proizvoljnoj točki krivulje $\vec{r}(t) = (t, t^2, 2t)$.
c) Gradijent polja U u točki $T(1,1,2)$.
d) Derivaciju $\frac{dU}{dt}$ polja U po krivulji $\vec{r}(t) = (t, t^2, 2t)$, u proizvoljnoj točki krivulje i u točki s parametrom $t_0 = 1$.

4. Skicirajte nivo krivulje za skalarno polje $U(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$. Pokušajte na osnovu nivo krivulja skicirati graf polja $U(x,y)$.

5. Izračunajte gradijent skalarnog polja $U(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$ u točkama $A(1, 1, 2)$ i $B(1, 3, 2)$.
Da li u točki A polje U raste kad se krene prema točki B (po pravcu)?

6. Izračunajte vektor normale na sferu $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ u točki $T(1, 0, \sqrt{2})$

7. Izračunajte integral skalarnog polja $U(x, y) = x + y$ duž trokuta s vrhovima $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$.

8. Izračunajte duljinu luka krivulje $\vec{r}(t) = (t, t^2, \frac{2t^3}{3})$ od točke $A(1, 1, \frac{2}{3})$ do točke $B(3, 9, 18)$.

9. Izračunajte rad sile $\vec{F} = (y - z, z - x, x - z)$ po dijelu pravca od točke $A(1, -1, 2)$ do $B(2, 0, 1)$.

10. Izračunajte rad sile $\vec{F} = (3z, 2, y)$ duž zavojnice $\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, at)$ od točke $t_0 = 0$ do $t_1 = \frac{\pi}{2}$.

11. Provjerite da li je vektorsko polje $\vec{F} = (1, 2yz, y^2)$ konzervativno.

MATEMATIKA 3

(vektorska analiza, tjedan 2)

ime i prezime	

1. Napišite vektorsku jednadžbu ravnine u kojoj leže vektori (1,1,1) i točke (1,0,0) i (2,-2,1).

2. Parametrizirajte dio sfere radijusa 3 sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava koji se nalazi u donjoj polovici prostora. Odredite jedinični vektor normale u točki $T(0, \frac{-3\sqrt{2}}{2}, \frac{-3\sqrt{2}}{2})$ (bez računanja!).

3. Parametrizirajte kapicu (kalotu) koja je dio sfere sa središtem u ishodištu radijusa 1 tako da vrijedi $\frac{1}{2} \leq z \leq 1$.

4. Napišite vektorsku jednadžbu cilindra $x = y^2 + 2$, odredite tangencijalne vektore i vektor normale u proizvoljnoj točki te posebno vektor normale u točki u kojoj je $y = 1$, $z = -2$

5.* Izračunajte integral skalarnog polja po plohi

$$\iint_{(P)} (x + y + z)\, dP$$

ako je P dio ravnine $x + y + z = 1$ koji se nalazi u prvom oktantu.

6. Izračunajte integral skalarnog polja po plohi

$$\iint_{(P)} (x^2 + y^2)\, dP$$

ako je P dio sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ koji se nalazi u prvom oktantu.

7. Izračunajte površinu dijela cilindra $x^2 + y^2 = 4$ između ravnina $z = 0$ i $z = 3$, a za $x, y \geq 0$.

8. Izračunajte masu dijela ravnine $z = 2x - 3y + 2$ za $x \in [0, 1]$, $y \in [-1, 0]$ ako je gustoća zadana s $\rho = x^2 + y^2 + z$.

9. Izračunajte integral vektorskog polja po plohi (tok)

$$\iint_{(P)} (z, x, y)\, d\vec{P}$$

ako je P dio ravnine $x - y + z = 1$ koji isjecaju koordinatne ravnine.

10. Izračunajte integral vektorskog polja po plohi (tok)

$$\iint_{(P)} (x, y, z)\, d\vec{P}$$

ako je P dio sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ za $z \geq 0$.

11. Izračunajte integral vektorskog polja po plohi (tok)

$$\iint_{(P)} (yz, 2, xy)\, d\vec{P}$$

ako je P dio cilindra $x^2 + y^2 = 1$ između ravnina $z = 0$ i $z = 2$.

MATEMATIKA 3

(vektorska analiza, vježbe 3)

ime i prezime	

1. Izračunajte komadić volumena dV u slučaju kad je tijelo parametrizirano sfernim koordinatama, tj. izračunajte Jacobian za sferne koordinate.

2. Izračunajte integral skalarnog polja $U = \sin^2 x \cos 2z$ nad tijelom omeđenim s $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = -2$, $y = 0$, $z = \frac{\pi}{4}$, $z = \frac{\pi}{2}$.

3. Izračunajte volumen tijela koje se nalazi između $z = 1$ i $z = 3 - x^2 - y^2$, a nad područjem omeđenim s $x = 0$, $x = 1$, $y = -1$, $y = 1$.

4. Izračunajte volumen tijela omeđenog cilindrom $x^2 + y^2 = 4$ i plohama $z = 4$ i $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

5. Izračunajte integral skalarnog polja $U = 2y$ nad tijelom omeđenim s $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $z = 3x$ u prvom oktantu.

6. Izračunajte integral skalarnog polja $U = z(x^2 + y^2)$ nad gornjom polovicom kugle $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$.

7. Izračunajte volumen dijela kugle $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ koji odozdo izrezuje konus $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$.

MATEMATIKA 3

(vektorska analiza, vježbe 4)

ime i prezime	

1. Izračunajte rotor i divergenciju sljedećih polja

a) $\vec{F}(x,y,z) = (y-z,\ z-x,\ x-y)$,

b) $\vec{F}(x,y,z) = (x^2-z^2+y^2,\ x^2y,\ xy^2z)$,

c) $\vec{F}(x,y,z) = (y\sin x,\ yz,\ zx)$.

2. Pokažite da je polje $\vec{F} = (z\sin 2x, ze^y, \sin^2 x + e^y)$ konzervativno. Koliko iznosi $\oint \vec{F}d\vec{r}$ po kružnici $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ od točke $t = 0$ do točke $t = 2\pi$?

3. Pokažite da je polje $\vec{F} = (3x^2+y^2, 2xy, -\frac{1}{z})$ konzervativno. Koliko iznosi $\int \vec{F}d\vec{r}$ po dužini od točke $A(1,0,1)$ do točke $B(0,-1,e)$?

4. Izračunajte $\oint \vec{F}d\vec{r}$ direktno i pomoću Stokesova teorema: $\vec{F} = (xy, y^2, z)$ po kružnici $x^2+y^2 = 1$, $z = 1$.

5. Izračunajte $\oint \vec{F}d\vec{r}$, gdje je $\vec{F} = (y^2, zy, xy)$, po rubu kvadratu $[-1,1]\times[-1,1]$ u xy-ravnini.

6. Izračunajte cirkulaciju $\oint \vec{F}d\vec{r}$ pomoću Stokesova teorema $\vec{F} = (y, -x, z)$ po kružnici C koja je presjek sfere $x^2+y^2+z^2 = 4$ i stošca $z = \sqrt{x^2+y^2}$. Primjeniti Stokesov teorem uzimajući za područje integracije:

a) krug;

b) dio sfere čiji je C rub;

c) dio stošca čiji je C rub.

7. Izračunajte tok vektorskog polja $\vec{F} = (x, y, xy)$ kroz oplošje kvadra omeđenog ravninama $z = 0$, $z = -2$, $x = -1$, $x = 1$. $y = 0$, $y = 3$ koristeći Gaussov (Gauss-Green-Ostrogradski) teorem.

8. Izračunajte tok vektorskog polja $\vec{F} = (zy, -x, -y)$ kroz plašt stošca $y = \sqrt{x^2+y^2}$, $0 \le y \le 1$, direktno i koristeći Gaussov (Gauss-Green-Ostrogradski) teorem.

9. Izračunajte tok vektorskog polja $\vec{F} = (x, y, 2z^2)$ kroz dio paraboloida $z = 2(x^2+y^2)$, $0 \le z \le 2$, direktno i koristeći Gaussov (Gauss-Green-Ostrogradski) teorem.

Rješenja zadataka

1. $\vec{r}(t) = \vec{r}_A + t \cdot \overrightarrow{AB}$
3. a) $U(-1, 5, 2) = -2 + 5 - 2 = 1$, c) $\nabla U(x, y, z) = (2, 1, -1)$ u svakoj točki

1. $\vec{r}(u, v) = (1 + u + v, u - 2v, u + v)$
2. $\vec{n} = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$
3. Parametriziramo pomoću sfernih koordinata
$\vec{r}(\varphi, \theta) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$; $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi/3$.
4. Parametrizacija: stavimo $y(u, v) = u$, $x(u, v) = u^2 + 2$, $z = v$.
7. povrsina = $\iint_P 1 dP$

1. $J = r^2 \sin\theta$
2. $= \iiint \sin^2 x \cos 2z \, dxdydz$
3. $\frac{8}{3}$
7. $\frac{2\pi}{3}(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$

1. a) $\nabla \cdot \vec{F} = (0, 0, 0)$
2. Ako je polje konzervativno, integral po zatvorenoj krivulji je 0
3. $U(B) - U(A)$
4. $\oint \vec{F} d\vec{r} = 0$
7. Koristite koordinatizaciju kvadra $\vec{r}(x, y, z) = (x, y, z)$. Jakobijan je jednak 1. $\oiint \vec{F} d\vec{P} = 24$
8. $\nabla \cdot \vec{F} = 0$