MATEMATIKA 3

(dodatni materijali za singularitete, 17.12.2003.)

Uvod

... nastavit će se ...

Zadaci

1. Odredi singularitete funkcije $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ i odredi njihov tip!

Rješenje. Jedini singularitet od f je $z_0 = 0$. Razvijmo f u Laurentov red oko $z_0 = 0$:

$$f(z) = \frac{1}{z}\sin z = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots\ .$$

Prema tome Laurentov red oko z_0 ne sadrži glavni dio, što znači da je singularitet uklonjiv.

Mogli smo pogledati postoji li limes $\lim_{z\to z_0} f(z)$:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{\sin z}{z} = \text{ upotrijebimo L'H. pravilo } = \lim_{z\to 0} \frac{\cos z}{1} = 1.$$

Dakle limes postoji, konačan je. Prema tome f u $z_0 = 0$ ima uklonjivi singularitet. □

2. Nađi i ispitaj kojeg su tipa singulariteti funkcije $f(z) = \frac{e^{1/z}-1}{z-1}$.

Rješenje. Singulariteti su u $z_0 = 0$, $z_1 = 1$.
z_0 je bitni singularitet funkcije $f_1(z) = e^{1/z} - 1$, pošto razvoj u red

$$f_1(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots$$

ima beskonačan glavni dio. Funkcija $f_2(z) = \frac{1}{z-1}$ je u $z_0 = 0$ analitička. Funkcija f kao produkt analitičke f_2 i funkcije f_1 sa bitnim singularitetom u z_0 ima isti bitni singularitet (u z_0). Dakle, $z_0 = 0$ je bitni singularitet od f.

z_1 je očigledno pol prvog reda funkcije f_2, pošto je $\frac{1}{z-1}$ Laurentov razvoj od f_1. f_1 je analitička u z_1 i različita od nule. Prema tome i funkcija f (ponovo kao produkt f_1 i f_2) ima pol prvog reda u $z_1 = 1$.

□

... nastavit će se ...